ЛЕКЦ.ИЯ 3

Плоская система сил
Приведение плоской системы сил к данному центру.
Условия равновесия плоской системы сил

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку *O*, которую назовем центром приведения, и, перенесем все силы в центр *O* (рис.9,*а*). В результате на тело будет действовать система сил $\bar{F}_1' = \bar{F}_1, \bar{F}_2' = \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n' = \bar{F}_n$ приложенных в центре *O*, и система пар, моменты которых будут равны: $m_1 = m_0(\bar{F}_1),\ \ m_2 = m_0(\bar{F}_2),\ m_n = m_0(\bar{F}_n)$

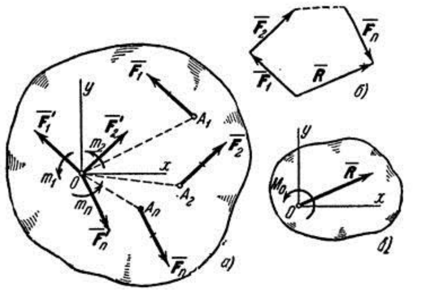

Рис.1

Силы, приложенные в центре *O*, можно заменить одной силой $\bar{R}$, приложенной в том же центре; при этом $\bar{R} = \sum \bar{F}_k'$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$. Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_0 = \sum m_k$ или $M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k)$.

Величина $\bar{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, **главным вектором системы**; величину M_o, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O, будем называть **главным моментом системы** относительно центра O.

В результате доказана следующая теорема: всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру *O* заменяется одной силой *R*, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения *O*, и одной парой с моментом M_0, равным главному моменту системы относительно центра *O* (рис. 1,*в*).

Примечания:

1. Для плоской системы сил под главным моментом системы часто также понимают величину этого момента.
2. Главный вектор R_0 не зависит, а главный момент M_0 зависит от выбора центра приведения.

Частные случаи приведения плоской системы сил

В зависимости от значений главного вектора R_0 и главного момента M_0 возможны следующие случаи приведения плоской системы сил.

1) $R_0 = 0$, $M_0 = 0$ - система сил находится в равновесии;

2) $R_0 = 0$, $M_0 \neq 0$ - система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному

моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;
3) $R_0 \neq 0$, $M_0 = 0$ - система эквивалентна равнодействующей R, равной и эквивалентной главному вектору системы R_0, линия действия которой проходит через центр приведения: $R = R_0$, $R \sim R_0$;
4) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ - система эквивалентна равнодействующей R, равной главному вектору системы R_0, ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_0|/R_0$ от центра приведения (рис.1,*б*).

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: $R = 0$, $M_0 = 0$. Здесь O - любая точка плоскости. Из этого условия следуют **уравнения равновесия произвольной плоской системы сил,** которые можно записать в трех различных формах:
1) Первая форма: $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$.
2) Вторая форма: $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma Y = 0$, где ось Oy не перпендикулярна отрезку AB.
3) Третья форма: $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma M_C = 0$, где точки А, В и С не лежат на одной прямой.

Равенства выражают, следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Теорема о трех моментах. Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю: $\sum M_A(\bar{F}_i) = 0;\ \sum M_B(\bar{F}_i) = 0,\ \sum M_C(\bar{F}_i) = 0$.

Равновесие плоской системы параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy параллельно им. Тогда проекция каждой из сил на Ox будет равна нулю и первое из 3-х равенств обратится в тождество вида $0 = 0$. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия: $\sum F_{ky} = 0,\ \sum m_0(\bar{F}_k) = 0$, где ось Oy параллельна силам.

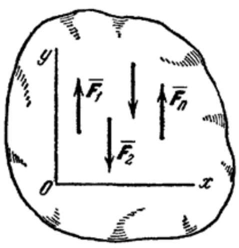

Рис.2

Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил

Пусть даны две параллельные силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис.3).

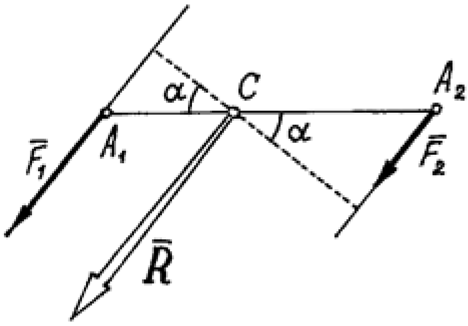

Рис.3

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор её параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона найдём точку приложения равнодействующей – точку *C*. По этой теореме $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F_i})$. Значит $0 = F_1 \cdot A_1C \cdot cos\alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot cos\alpha$. Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$ То есть точка приложения равнодействующей делит расстояние между точками A_1 и A_2 на части обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис.4), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке *C*. А расстояния от точки *C* до точек приложения сил обратно пропорциональны силам: $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$/

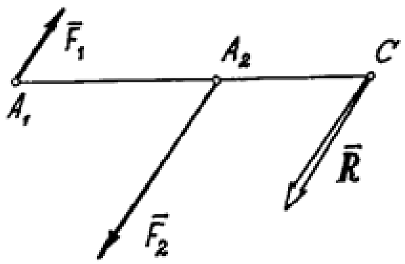

Рис.4

Если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2, точками приложения сил, то, при повороте этих сил в одну сторону на одинаковый угол, равнодействующая также повернётся вокруг точки приложения *C* в том же направлении, и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется **центром параллельных сил**.

Если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия. Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденный последовательным сложением каждых двух сил, будем называть точку *C*, радиус-вектор которой определяется формулой $\vec{r}_c = \sum F_i \vec{r}_i / \sum F_i = \sum F_i \vec{r}_i / R$, где $\vec{r}_i$ – радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$ – величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя формулу для радиуса-вектора , находим координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны их координатам. Поэтому, проектируя векторное равенство на оси, получим $x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \sum \frac{F_i y_i}{R}; \quad z_c = \sum \frac{F_i z_i}{R}$, где x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

Понятие о распределенной нагрузке

Наряду с рассмотренными выше сосредоточенными силами строительные конструкции и сооружения могут подвергаться воздействию распределенных нагрузок – по объему, по поверхности или вдоль некоторой линии – и определяемых ее интенсивностью.

Примером нагрузки, распределенной по площади, является снеговая нагрузка, давление ветра, жидкости или грунта. Интенсивность такой поверхностной нагрузки имеет размерность давления и измеряется в кН/м^2 или килопаскалях (кПа = кН/м^2).

При решении задач очень часто встречается нагрузка, распределенная по длине балки. Интенсивность *q* такой нагрузки измеряется в кН/м.

Рассмотрим балку, загруженную на участке *a*, *b* распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону $q = q(x)$. Для определения опорных реакций такой балки нужно заменить распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной. Это можно сделать по следующему правилу:

Рассмотрим частные случаи распределенной нагрузки.

а)**общий случай распределенной нагрузки** (рис.5)

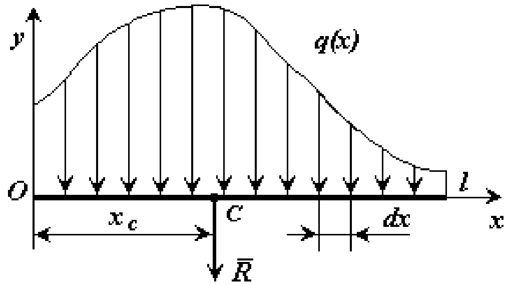

Рис.5

q(x) – интенсивность распределенной силы [Н/м],

$dR = q(x) \cdot dx$ – элементарная сила.

l – длина отрезка

Распределенная по отрезку прямой сила интенсивности q(x) эквивалентна сосредоточенной силе $R = \int_0^l q(x)dx$.

Сосредоточенная сила прикладывается в точке C (центре параллельных сил) с координатой $x_C = \int_0^l xq(x)dx / R$.

б) **постоянная интенсивность распределенной нагрузки** (рис.6)

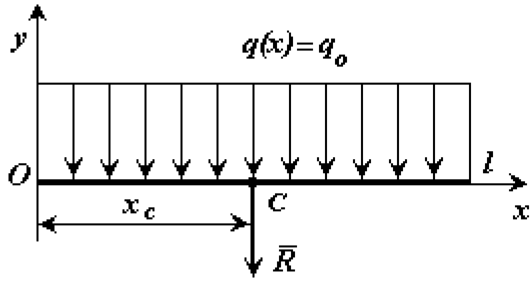

Рис.6

$R = \int_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l$, $\int_0^l xq_0 dx = q_0 \cdot l^2/2$, $x_c = l/2$.

в) **интенсивность распределенной нагрузки, меняющаяся по линейному закону** (рис.7)

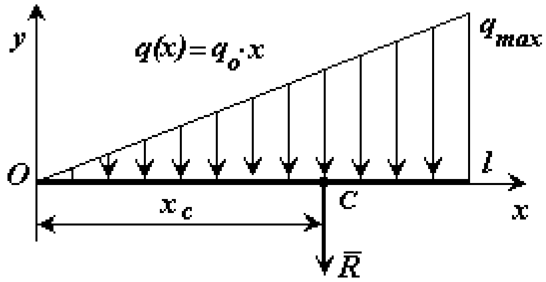

Рис.7

$R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$, $R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$, $x_c = 2 \cdot l/3$.

Расчет составных систем.

Под **составными системами** понимают конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных друг с другом. Прежде, чем переходить к рассмотрению особенностей расчета таких систем, введем следующее определение.

Статически определимыми называются такие задачи и системы статики, для которых число неизвестных реакций связей не превышает максимально допустимого числа уравнений. Если число неизвестных больше числа уравнений, соответствующие задачи и системы называются **статически неопределимыми**. При этом разность между числом неизвестных и числом уравнений называется **степенью статической неопределимости** системы.

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых условия равновесия. Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных реакций связи.

В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условия равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более шести неизвестных реакций связи.

Примеры.

1. Пусть центр невесомого идеального блока удерживается при помощи не двух, а трех стержней: АВ, ВС и BD и нужно определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

С учетом условий задачи мы получим систему сходящихся сил, где для определения трех неизвестных: S_A, S_C и S_D можно составить систему только двух уравнений: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y=0$. Очевидно, поставленная задача и соответствующая ей система будут статически неопределимыми.

2. Балка, жестко защемленная на левом конце и имеющая на правом конце шарнирно-неподвижную опору, загружена произвольной плоской системой сил (рис.8).

Для определения опорных реакций можно составить только три уравнения равновесия, куда войдут 5 неизвестных опорных реакций: X_A, Y_A, M_A, X_B и Y_B. Поставленная задача будет дважды статически неопределимой.

Такую задачу нельзя решить в рамках теоретической механики, предполагая рассматриваемое тело абсолютно твердым.

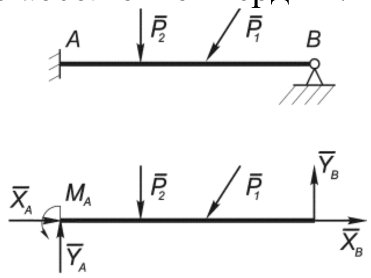

Рис.8

Рассмотрим изучение составных систем, типичным представителем которых является трехшарнирная рама (рис. 9,а). Она состоит из двух тел: АС и ВС, соединенным ключевым шарниром С.

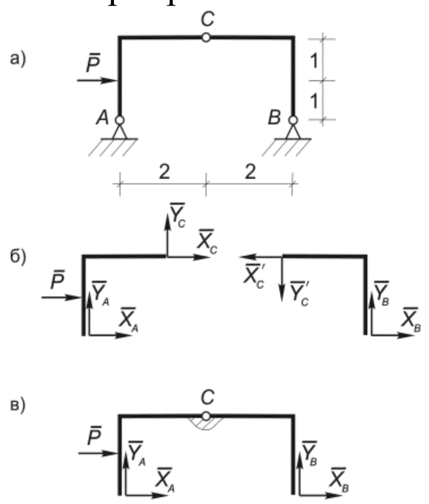

Рис.9

На примере этой рамы рассмотрим **два способа определения опорных реакций составных систем.**

1 способ. Рассмотрим тело АС, загруженное заданной силой, отбросив все связи и заменив их соответственно реакциями внешних (X_A,Y_A) и внутренних

(X_C,Y_C) связей (рис. 9,б). Аналогично можно рассмотреть равновесие тела *BC* под действием реакций опоры *B* – (X_B, Y_B) и реакций в соединительном шарнире *C* – (X_C',Y_C') , где в соответствии с аксиомой 5: $X_C = X_C'$, $Y_C = Y_C'$.

Для каждого из этих тел можно составить три уравнения равновесия, т. о., общее число неизвестных: X_A, Y_A, $X_C = X_C'$, $Y_C = Y_C'$, X_B, Y_B равняется суммарному числу уравнений, и задача является статически определимой.

По условию задачи требовалось определить только 4 опорные реакции, а пришлось проделать дополнительную работу, определяя реакции в соединительном шарнире. В этом и заключается недостаток данного способа определения опорных реакций.

2 способ. Рассмотрим равновесие всей рамы *ABC*, отбросив только внешние связи и заменив их неизвестными опорными реакциями X_A, Y_A, X_B , Y_B. Полученная система состоит из двух тел и не является абсолютно твердым телом, поскольку расстояние между точками *A* и *B* может изменяться вследствие взаимного поворота обеих частей относительно шарнира *C*. Тем не менее можно считать, что совокупность сил, приложенных к раме *ABC* образует систему, если воспользоваться аксиомой отвердевания (рис.9,*в*). Итак, для тела *ABC* можно составить три уравнения равновесия. Например: $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y=0$.

В эти три уравнения войдут 4 неизвестных опорных реакции X_A, Y_A, X_B и Y_B. Попытка использовать в качестве недостающего уравнения, например, такое: ΣM_B ,= 0 к успеху не приведет, поскольку это уравнение будет линейно зависимым с предыдущими. Для получения линейно независимого четвертого уравнения необходимо рассмотреть равновесие другого тела. В качестве него можно взять одну из частей рамы, например, *BC*. При этом нужно составить такое уравнение, которое содержало бы «старые» неизвестные X_A, Y_A, X_B, Y_B и не содержало новых. Например, уравнение:$\Sigma X^{(BC}=0$ или подробнее:$-X_C' + X_B=0$ для этих целей не подходит, поскольку содержит «новое» неизвестное X_C', а вот уравнение $\Sigma M_C^{(BC)}=0$ отвечает всем необходимым условиям. Т.о., искомые опорные реакции можно найти в следующей последовательности: $\Sigma M_A=0$; $\rightarrow Y_B = P/4$; $\Sigma M_B = 0$; $\rightarrow Y_A = -P/4$; $\Sigma M_C^{(BC)} = 0$; $\rightarrow X_B = -P/4$; $\Sigma X = 0$; $\rightarrow X_A = -3P/4$.

Для проверки можно использовать уравнение: $\Sigma M_C^{(AC)} = 0$ или, подробнее: $-Y_A{\cdot}2 + X_A{\cdot}2 + P{\cdot}1 = P/4{\cdot}2 - 3P/4{\cdot}2 + P{\cdot}1 = P/2 - 3P/2 + P = 0$. В это уравнение входят все 4 найденные опорные реакции: X_A и Y_A – в явной форме, а X_B и Y_B –– в неявной, поскольку они были использованы при определении двух первых реакций.

Аналогично можно рассмотреть равновесие тела *BC* под действием реакций опоры *B* (X_B, Y_B) и реакций в соединительном шарнире *C* – (X_C', Y_C'), где в соответствии с аксиомой :$X_C = X_C'$, $Y_C = Y_C'$.

Графическое определение опорных реакций

Во многих случаях решение задач можно упростить, если вместо уравнений равновесия или в дополнение к ним непосредственно использовать условия равновесия, аксиомы и теоремы статики. Соответствующий подход и получил название графического определения опорных реакций.

Прежде чем перейти к рассмотрению графического метода отметим, что, как и для системы сходящихся сил, графически можно решить только те задачи, которые допускают аналитическое решение. При этом графический метод определения опорных реакций удобен при небольшом числе нагрузок.

Итак, графический метод определения опорных реакций основан главным образом на использовании:

– аксиомы о равновесии системы двух сил;
– аксиомы о действии и противодействии;
– теоремы о трех силах;
– условия равновесия плоской системы сил.

При графическом определении реакций составных систем рекомендуется следующая последовательность рассмотрения:

– выбрать тело с минимальным числом алгебраических неизвестных реакций связей;
– если таких тел два или больше, то начать решение с рассмотрения тела, к которому приложено меньшее число сил;
– если таких тел два или больше, то выбрать тело, для которого большее число сил известно по направлению.

Решение задач.

При решения задач этого раздела следует иметь в виду все те общие указания, которые были сделаны ранее.

Приступая к решению, надо, прежде всего, установить, равновесие какого именно тела следует в данной задаче рассмотреть. Затем, выделив это тело и рассматривая его как свободное, следует изобразить все действующие на тело заданные силы и реакции отброшенных связей.

Далее следует составить условия равновесия, применяя ту из форм этих условий, которая приводит к более простой системе уравнений (наиболее простой будет система уравнений, в каждое из которых входит по одному неизвестному).

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета):

1) составляя уравнения проекций, проводить координатную ось, перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе;
2) при составлении моментного уравнения в качестве моментной целесообразно выбирать точку, где пересекаются линии действия двух неизвестных опорных реакций из трех – в этом случае они не войдут в уравнение, и оно будет содержать только одно неизвестное;
3) если две неизвестных опорных реакции из трех параллельны, то при составлении уравнения в проекциях на ось последнюю следует направить так, чтобы она была перпендикулярна к двум первым реакциям – в этом случае уравнение будет содержать только последнее неизвестное;

4) при решении задачи систему координат надо выбирать так, чтобы ее оси были ориентированы так же, как большинство приложенных к телу сил системы.

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п.