ЛЕКЦИЯ 4
Произвольная система сил

Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте силы.

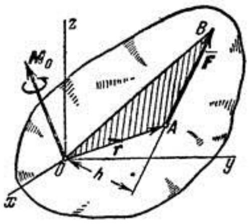

Рис.1

1. Изображение момента вектором. Момент силы $\bar{F}$ относительно центра O (рис. 1) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами:

1) модулем момента, равным произведению модуля силы на плечо, т. е. Fh;

2) плоскостью поворота OAB, проходящей через линию действия силы $\bar{F}$ и центр O;

3) направлением поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр O лежат в одной плоскости, необходимость задавать каждый раз плоскость поворота OAB отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную $\pm Fh$, где знак указывает направление поворота. Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O.

Поэтому в общем случае момент $m_0(\bar{F})$ силы $\bar{F}$ относительно центра O (рис. 1) будем изображать приложенным в центре O вектором $\bar{M}_0$, равным по модулю (в выбранном масштабе) произведению модуля силы $\bar{F}$ на плечо h и перпендикулярным к плоскости OAB, проходящей через центр O и силу $\bar{F}$. Направлять вектор $\bar{M}_0$ будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, вектор $\bar{M}_0$ будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота OAB, разную для разных сил, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора $\bar{M}_0$ определяет положение центра момента.

2. Выражение момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение $\overline{OA} \times \bar{F}$ векторов $\overline{OA}$ и $\bar{F}$ (рис. 1). По определению, $|\overline{OA} \times \bar{F}| = 2\text{пл}\Delta OAB = M_0$, т. к. модуль вектора $\bar{M}_0$ тоже равен 2 пл. ΔOAB. Направлен вектор ($\overline{OA} \times \bar{F}$) перпендикулярно к плоскости OAB, в ту сторону, откуда

кратчайшее совмещение $\overline{OA}$ с $\bar{F}$ (если их отложить от одной точки) видно против хода часовой стрелки, т. е., так же, как вектор $\bar{M}_0$. Следовательно, векторы ($\overline{OA} \times \bar{F}$) и $\bar{M}_0$ совпадают и по модулю, и по направлению, и по размерности, т.е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда $\bar{M}_0 = \overline{OA} \, x \, \bar{F}$ или $\bar{M}_0 = \bar{r} \, x \, \bar{F}$, где вектор $\bar{r} = \overline{OA}$ называется радиусом-вектором точки А относительно центра О. Т. о., момент силы $\bar{F}$ относительно центра О равен векторному произведению радиуса вектора $\bar{r} = \overline{OA}$, соединяющего центр О с точкой приложения силы А, на саму силу. Этим выражением момента силы бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Момент пары сил как вектор.

Действие пары сил на тело характеризуется:

1) величиной модуля момента пары,
2) плоскостью действия,
3) направлением поворота в этой плоскости.

При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, для характеристики каждой из пар необходимо будет задать все эти три элемента. Это можно сделать, если условиться, по аналогии с моментом силы, изображать момент пары соответствующим образом, построенным вектором, а именно: будем изображать момент пары вектором т или М, модуль которого равен (в выбранном масштабе) модулю момента пары, т.е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2).

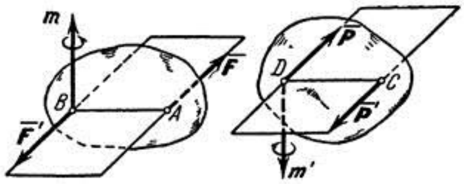

Рис. 2

Как известно модуль момента пары равен моменту одной из ее сил относительно точки, где приложена другая сила, т. е. $\bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F})$; по направлению же векторы этих моментов совпадают. Следовательно, $\bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F}) = \bar{m}_A \bar{F}'$.

Момент силы относительно оси.

Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятие о моменте силы относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 3).

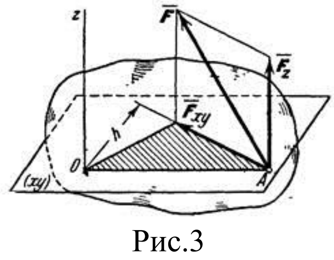

Рис.3

Пусть на это тело действует сила $\bar{F}$, приложенная в точке А. Проведем через точку А плоскость xy, перпендикулярную оси z, и разложим силу $\bar{F}$ на составляющие: $\bar{F}_z$, параллельную оси z, и $\bar{F}_{xy}$, лежащую в плоскости xy ($\bar{F}_{xy}$ является одновременно проекцией силы $\bar{F}$ на плоскости xy). Сила $\bar{F}_z$, направленная параллельно оси z, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело вдоль оси z). Весь вращательный эффект, создаваемый силой $\bar{F}$, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей $\bar{F}_{xy}$. Отсюда заключаем, что $m_z(\bar{F}) = m_z(\bar{F}_{xy})$, где символ $m_{xy}(\bar{F})$ обозначает момент силы $\bar{F}$ относительно оси z.

Для силы $\bar{F}_{xy}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы $\bar{F}_{xy}$ относительно точки О, в которой ось z пересекается с плоскостью xy. Следовательно, $m_z(\bar{F}_{xy}) = m_0(\bar{F}_{xy})$ или, согласно предыдущему равенству, $m_z(\bar{F}) = m_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h$. В результате, приходим к следующему определению: моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

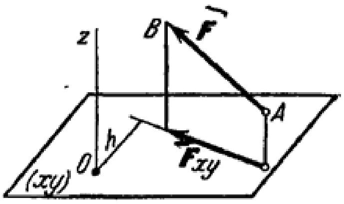

Рис.4

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила $\bar{F}_{xy}$, стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Из чертежа (рис.4) видно, что при вычислении момента плоскость xy можно проводить через любую точку оси z. Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 4) надо:

1) провести плоскость xy, перпендикулярную к оси z (в любом месте);

2) спроектировать силу $\bar{F}$ на эту плоскость и вычислить величину $\bar{F}_{xy}$;

3) опустить из точки О пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление $\bar{F}_{xy}$ и найти его длинуh;

4) вычислить произведение $F_{xy}h$;

5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

1) Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy}= 0$).

2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как h = 0).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости. 3) Если сила перпендикулярна к оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси

Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\bar{F}$ (рис. 5). Проведем какую-нибудь ось z и возьмем на ней произвольную точку O. Момент силы $\bar{F}$ относительно центра O будет изображаться вектором $\bar{M}_0$ перпендикулярным плоскости OAB, причем по модулю $M_0 = Fh = 2\text{пл}\Delta OAB$.

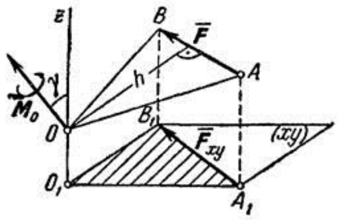

Рис.5

Проведем теперь через любую точку O_1 на оси z плоскость xy, перпендикулярную к оси; проектируя силу $\bar{F}$ на эту плоскость, найдем $m_z = (\bar{F}) = m_{0_1}(\overline{F_{xy}}) = 2\text{пл}\Delta O_1A_1B_1$. Треугольник $O_1A_1B_1$ представляет собою проекцию треугольника OAB на плоскость xy. Угол между плоскостями этих треугольников равен углу между перпендикулярами к плоскостям, т. е. равен γ. Тогда, по известной геометрической формуле $\Delta O_1A_1B_1 = \text{пл}\Delta OAB\cos\gamma$.

Умножая обе части этого равенства на 2 и замечая, что удвоенные площади треугольников $O_1A_1B_1$ и OAB равны соответственно $m_z(\bar{F})$ и $\bar{M}_0$, найдем окончательно: $m_z(\bar{F}) = M_0\cos\gamma$. Так как произведение $M_0\cos\gamma$ дает проекцию вектора $\bar{M}_0 = \bar{m}_0(\bar{F})$ на ось z, то равенство можно еще представить в виде $m_z(\bar{F}) = M_z$ или $m_z(\bar{F}) = |\bar{m}_0(\bar{F})|_z$.

В результате доказано, что между моментом силы относительно оси и ее моментом относительно какого-нибудь центра, лежащего на этой оси, существует следующая зависимость: момент силы $\bar{F}$ относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.