ЛЕКЦИЯ 5
Приведение пространственной системы сил к данному центру

Полученные результаты позволяют решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы $\bar{F}$ из точки А (рис. 1,а) в точку О прикладываем в точке О силы $\overline{F'} = \bar{F}$ и $\bar{F'} = -\bar{F}$. Тогда сила $\bar{F'} = \bar{F}$ окажется приложенной в точке О и к ней будет присоединена пара ($\bar{F'}, \bar{F}$) с моментом $\bar{m}$, что можно показать еще так, как на рис. 1,б. При этом $\bar{m} = \bar{m}_0(\bar{F})$.

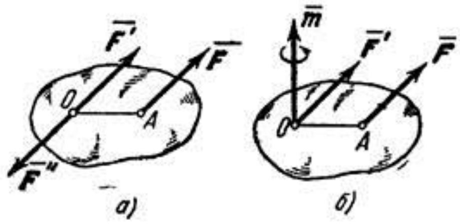

Рис.1

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$,…, $\bar{F}_n$ (рис. 2,а). Выберем произвольную точку О за центр приведения и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил $\bar{F}_1 = \bar{F}_1,\ \bar{F}_2 = \bar{F}_2, \dots,\ \bar{F}_n = \bar{F}_n$, приложенных в центре О, и система пар, моменты которых будут равны $\bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1), \bar{m}_2 = \bar{m}_0(\bar{F}_2), \dots, \bar{m}_n = \bar{m}_0(\bar{F}_n)$.

Силы, приложенные в точке О, заменяются одной силой $\bar{R}$, приложенной в той же точке, при этом $\bar{R} = \sum F_k'$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$.

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\bar{M}_0 = \sum \overline{m_k}$ или $\bar{M}_0 = \sum \overline{m_0}(\bar{F}_k)$.

Как и в случае плоской системы, величина $\bar{R}$,равная геометрической сумме всех сил, называется **главным вектором системы**; величина $\bar{M}_0$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра О, называется **главным моментом системы** относительно этого центра.

Рис.2

Таким образом мы доказали следующую теорему, любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру О заменяется одной силой $\bar{R}$, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения О, и одной парой с моментом $\bar{M}_0$, равным главному моменту системы относительно центр О (рис. 2,б).

Векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_0$ обычно определяют аналитически, т.е. по их проекциям на оси координат.

Выражения для R_x, R_y, R_z известны. Проекции вектора $\bar{M}_0$ на оси координат обозначим M_x, M_y, M_z. По теореме о проекциях суммы векторов на ось будет $M_x = \Sigma |m_0(\overline{F_k})|_x$ или $M_x = \Sigma m_x(\overline{F_k})$. Аналогично находятся величины M_y и M_z.

Окончательно для определения проекций главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}_0$ получаем формулы: $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.
$M_x = \sum m_x(\overline{F_k})$, $M_y = \sum m_y(\overline{F_k})$, $M_z = \sum m_z(\overline{F_k})$.

При этом главный вектор пространственной системы сил: $R_0 = \Sigma P_i$ отличается от главного вектора плоской системы сил только наличием третьей компоненты, поэтому его модуль будет равен:
$R_0 = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2}$.

Главный момент пространственной системы сил: $M_0 = \Sigma M_0(P_i)$ - это вектор, модуль которого находится аналогично: $M_0 = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2}$, где M_x, M_y, M_z - суммы моментов всех сил системы относительно соответствующих осей.

В зависимости от значений главного вектора и главного момента, а также от их взаимного расположения возможны следующие варианты приведения пространственной системы сил:
1) $R_0 = 0$, $M_0 = 0$ - система сил находится в равновесии;
2) $R_0 = 0$, $M_0 \neq 0$ - система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;
3) $R_0 \neq 0$, $M_0 = 0$ - система эквивалентна равнодействующей R, равной и эквивалентной главному вектору системы R_0, линия действия которой проходит через центр приведения: $R = R_0$, $R \sim R_0$;
4) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ и $R_0 \perp M_0$ - система эквивалентна равнодействующей R, равной главному вектору системы R_0, ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_0|/R_0$ от центра приведения;
5) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ и главный вектор R_0 не перпендикулярен главному моменту M_0 - система эквивалентна скрещивающимся силам или **динаме**.

При этом скрещивающимися называются силы, которые не параллельны и не лежат в одной плоскости, а динамой называется система, состоящая из силы и пары сил, плоскость которой перпендикулярна этой силе. Динама, приложенная к твердому телу, стремится вызвать его винтовое движение, которое представляет совокупность вращательного и поступательного движений.

Примечание.

Для пространственной системы сил, как и для плоской, справедлива следующая **теорема Вариньона:**

Момент равнодействующей пространственной системы сил относительно произвольного центра (оси) равен геометрической (алгебраической) сумме моментов всех сил этой системы относительно данного центра (оси).

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому-нибудь центру O и заменить одной результирующей силой $\bar{R}$ и парой с моментом $\bar{M}_0$. Рассуждая так, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно было R = 0 и M_o = 0. Но векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_0$ могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т. е. когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$ или, когда действующие силы удовлетворяют условиям $\Sigma X_i = 0$; $\Sigma M_x (P_i) = 0$; $Y_i = 0$; $\Sigma M_y (P_i) = 0$; $\Sigma Z_i = 0$; $\Sigma M_z (P_i) = 0$.

Таким образом, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из координатных осей, а также суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялись нулю.

В частных случаях системы сходящихся или параллельных сил эти уравнения будут линейно зависимы, и только три уравнения из шести будут линейно независимыми.

Например, уравнения равновесия системы сил, параллельных оси Oz, имеют вид: $\Sigma Z_i = 0$; $\Sigma M_x (P_i) = 0$ $\Sigma M_y (P_i) = 0$.