ЛЕКЦИЯ 8
Центр тяжести

Приведение параллельных сил.

После того как было рассмотрено приведение к центру плоской системы и произвольной пространственной системы сил, возвращаемся к рассмотрению частного случая системы параллельных сил.

Приведение двух параллельных сил.

В ходе рассмотрения такой системы сил возможны три следующих случая приведения:

1. Система двух коллинеарных сил. Рассмотрим систему двух параллельных и направленных в одну сторону сил P и Q, приложенных в точках A и B. Будем считать, что силы перпендикулярны к этому отрезку (рис.1,а).

Выберем в качестве центра приведения точку C, ÷принадлежащую отрезку AB и удовлетворяющую условию: $AC/CB = Q/P$. (1)

Главный вектор системы $R_C = P + Q$ по модулю равен сумме этих сил: $R_C = P + Q$. Главный момент относительно центра C с учетом (1) равен нулю: $M_C = P\cdot AC – Q\cdot CB = 0$. Т.о., в результате приведения получаем: $R_C \neq 0$, $M_C = 0$. Это означает, что главный вектор эквивалентен равнодействующей, проходящей через центр приведения, то есть: равнодействующая коллинеарных сил равна по модулю их сумме, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внутренним образом. Отметим, что положение точки C не изменится, если силы P и Q повернуть на угол α. Точка C, обладающая таким свойством называется центром параллельных сил.

2. Система двух антиколлинеарных и не равных по модулю сил. Пусть силы P и Q, приложенные в точках A и B, параллельны, направлены в противоположные стороны и по модулю не равны (рис.1,б).

Выберем в качестве центра приведения точку C, удовлетворяющую по-прежнему соотношению (1) и лежащую на той же прямой, но за пределами отрезка AB. Главный вектор этой системы $R_C = P + Q$ по модулю теперь будет равен разности модулей векторов: $R_C = Q – P$. Главный момент относительно центра C по-прежнему равен нулю: $M_C = P\cdot AC – CB = 0$, поэтому равнодействующая антиколлинеарных и не равных по модулю сил равна их разности, направлена в сторону большей силы, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внешним образом.

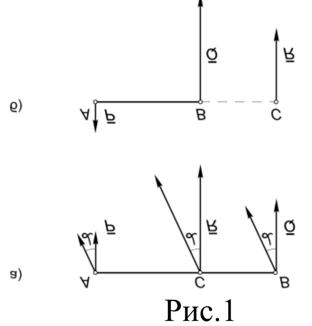

Рис.1

3. Система двух антиколлинеарных и равных по модулю сил. Возьмем за исходный предыдущий случай приведения. Зафиксируем силу P, а силу Q устремим по модулю к силе P. Тогда при $Q \to P$ в формуле (1) отношение $AC/CB \to 1$. Это означает, что $AC \to CB$, т. е. расстояние $AC \to \infty$. При этом модуль главного вектора $R_C \to 0$, а модуль главного момента не зависит от положения центра приведения и остается равным первоначальному значению: $M_C = P \cdot AC - Q \cdot CB = P \cdot (AC - CB) = P \cdot AB$.

Итак, в пределе получаем систему сил, для которой $R_C = 0$, $M_C \neq 0$, а центр приведения удален в бесконечность, которую нельзя заменить равнодействующей. В этой системе нетрудно узнать пару сил, поэтому пара сил равнодействующей не имеет.

Центр системы параллельных сил.

Рассмотрим систему n сил P_i, приложенных в точках A_i (x_i, y_i, z_i) и параллельных оси Ov с ортом l (рис.2).

Если заранее исключить случай системы, эквивалентной паре сил, то можно доказать существование ее равнодействующей R.

Координаты центра $C(x_c,y_c,z_c)$ параллельных сил, т. е. координаты точки приложения равнодействующей этой системы.

Воспользуемся теоремой Вариньона: $M_0(R) = \Sigma M_0(P_i)$.

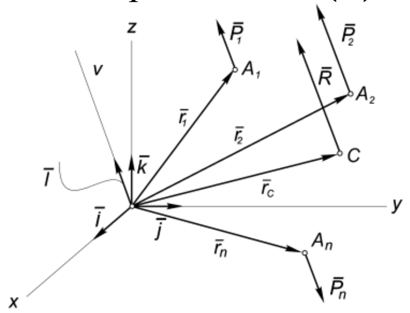

Рис.2

Вектор-момент силы представляем в виде векторного произведения, поэтому: $M_0(R) = r_c \times R = \Sigma M_{0i}(P_i) = \Sigma(r_i \times P_i)$. Учитывая, что $R = R_v \cdot l$, а $P_i = P_{vi} \cdot l$ и воспользовавшись свойствами векторного произведения, получим:

$r_c \times R_v \cdot l = \Sigma(r_i \times P_{vi} \cdot l)$, $r_c \cdot R_v \times l = \Sigma(r_i \cdot P_{vi} \times l) = \Sigma(r_i \cdot P_{vi}) \times l$, или:$[r_c R_v - \Sigma(r_i\ P_{vi})] \times l = 0$.

Последнее выражение справедливо только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Поэтому, опуская индекс v и учитывая, что равнодействующая $R = \Sigma P_i$, отсюда получим: $r_c = (\Sigma P_i\ r_i)/(\Sigma P_i)$.

Проектируя последнее векторное равенство на оси координат, получим искомое выражение координат центра параллельных сил: $x_c = (\Sigma P_i\ x_i)/(\Sigma P_i)$;
$y_c = (\Sigma P_i y_i)/(\Sigma P_i)$ $\quad z_c = (\Sigma P_i z_i)/(\Sigma P_i)$. (2)

Центр тяжести тел
Координаты центров тяжести однородного тела

Рассмотрим твердое тело весом P и объемом V в системе координат Oxyz , где оси x и y связаны с поверхностью земли, а ось z направлена в зенит.

Если разбить тело на элементарные части объемом ΔV_i, то на каждую его часть будет действовать сила притяжения ΔP_i, направленная к центру Земли. Предположим, что размеры тела значительно меньше размеров Земли, тогда систему сил, приложенных к элементарным частям тела можно считать не сходящейся, а параллельной (рис.3) к ней применимы все выводы предыдущей главы.

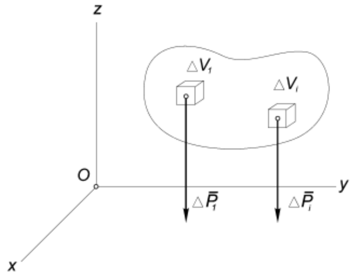

Рис.3

Определение. Центром тяжести твердого тела называется центр параллельных сил тяжести элементарных частей этого тела.

Удельным весом элементарной части тела называется отношение ее веса ΔP_i к объему ΔV_i: $\gamma_i = \Delta P_i/\Delta V_i$. Для однородного тела эта величина является постоянной: $\gamma_i = \gamma = P/V$. Подставляя в (2) $\Delta P_i = \gamma_i \cdot \Delta V_i$ вместо P_i, учитывая последнее замечание и сокращая числитель и знаменатель на –, получим выражения координат центра тяжести однородного тела: $x_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot x_i)/(\Sigma\Delta V_i)$; $y_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot y_i)/(\Sigma\Delta V_i)$; $z_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot z_i)/(\Sigma\Delta V_i)$. (3)

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1) Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии, то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_C по (3), будет равна нулю, т.к. в сумме $\Sigma P_i z_i$ все члены имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_C и y_C, вычисленные по формулам (3), окажутся равными нулю. Аналогично доказывается и третья теорема.

3) Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И ещё несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку, а в формулах (3) P_i – определять как вес соответствующей части и x_i, y_i, z_i – как координаты её центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где – удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i – объём этой части тела. И формулы (3) примут более удобный вид. Например, $x_C = \sum P_i x_i / P = \sum V_i \cdot \gamma \cdot x_i / V \cdot \gamma = \sum V_i x_i / V$. И аналогично, $y_C = \sum V_i y_i / V$, $z_C = \sum V_i z_i / V$, где $V = \sum V_i$ – объём всего тела.

Третье замечание. Пусть тело имеет вид тонкой пластинки площадью F и толщиной t, лежащей в плоскости Oxy. Подставляя в (3) $\Delta V_i = \Delta F_i$, получим координаты центра тяжести однородной пластинки: $x_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot x_i) / (\Sigma\Delta F_i)$; $y_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot y_i) / (\Sigma\Delta F_i)$. $z_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot z_i) / (\Sigma\Delta F_i)$, где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $F = \sum F_i$ – общая площадь тела.

Четвёртое замечание. Для тела в виде тонкого криволинейного стержня длиной L с площадью поперечного сечения a элементарный объем $\Delta V_i = a \cdot \Delta L_i$, поэтому координаты центра тяжести тонкого криволинейного стержня будут равны: $x_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot x_i)/(\Sigma\Delta L_i)$; $y_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot y_i)/(\Sigma\Delta L_i)$; $z_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot z_i)/(\Sigma\Delta L_i)$. (4)
где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i-го участка; $L = \sum \Delta L_i$.

Отметим, что согласно определению центр тяжести - это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Примечание.

В этом разделе курса не делается разницы между силой притяжения, силой тяжести и весом тела. В действительности, сила тяжести представляет собой разность между силой притяжения Земли и центробежной силой, вызванной ее вращением.

Координаты центров тяжести неоднородных тел.

Координаты центра тяжести **неоднородного твердого тела**(рис.4) в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

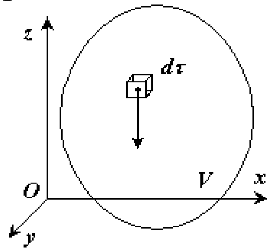

Рис.4

$$x_C = \int_V x \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau \Big/ \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau; \; y_C = \int_V y \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau \Big/ \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau;$$

$$z_C = \int_V z \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau \Big/ \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau$$

, где $\gamma_T = (x,y,z)$ – вес единицы объема тела (удельный вес) $\int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau$ – вес всего тела.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную поверхность** (рис.5), то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

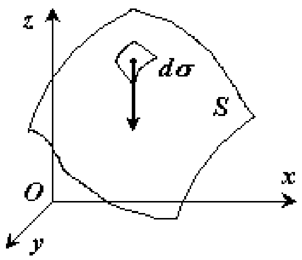

Рис.5

$$x_C = \int_S x \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma; \; y_C = \int_S y \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma;$$

$$z_C = \int_S z \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma$$

, где $\gamma_S = (x,y,z)$ – вес единицы площади тела, $\int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma$ – вес всего тела.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную линию** (рис.6), то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

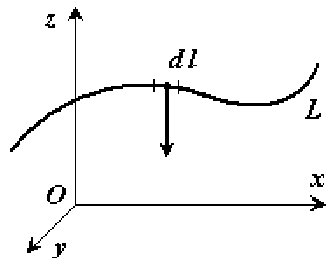

Рис.6

$$x_C = \int_L x \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl; \; y_C = \int_L y \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl;$$

$$z_C = \int_L z \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl$$

, где $\gamma_L = (x,y,z)$ – вес единицы длины тела, $\int_L \gamma_S(x,y,z)dl$ – вес всего тела.

Способы определения координат центра тяжести.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1.Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии (рис.7), то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, оси симметрии или в центре симметрии.

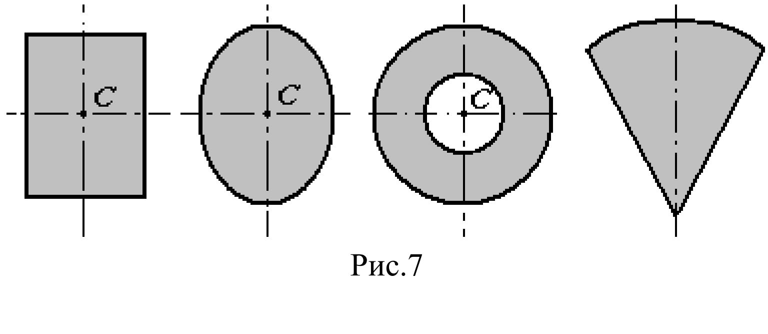

Рис.7

2. **Разбиение.** Тело разбиваеся на конечное число частей (рис.8), для каждой из которых положение центра тяжести и площадь известны.

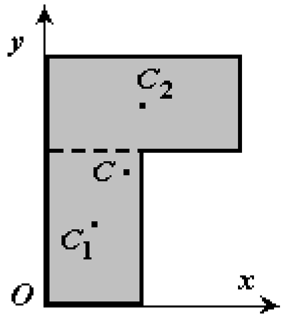

Рис.8

$C_1(x_1, y_1), S_1$ $C_2(x_2, y_2), S_2$ $x_C = (x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2)/S_1 + S_2$ $y_C = (y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2)/S_1 + S_2$ $S=S_1+S_2$.

3. **Метод отрицательных площадей.** Частный случай способа разбиения (рис.9). Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны. Тело в виде пластинки с вырезом представляют комбинацией сплошной пластинки (без выреза) с площадью S_1 и площади вырезанной части S_2.

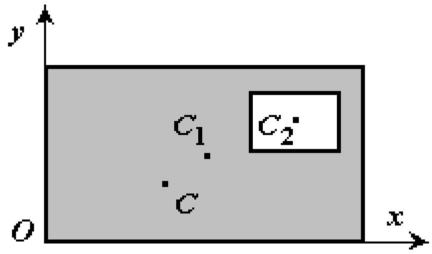

Рис.9

$C_1(x_1, y_1), S_1$ $C_2(x_2, y_2), S_2$ $x_C = (x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2)/(S_1 - S_2)$ $y_C = (y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2)/(S_1 - S_2)$ $S=S_1-S_2$.

4. **Метод группировки.** Является хорошим дополнением двух последних методов. После разбиения фигуры на составные элементы часть их бывает удобно объединить вновь, чтобы затем упростить решение путем учета симметрии этой группы.

Центры тяжести некоторых однородных тел.

1)Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 10).

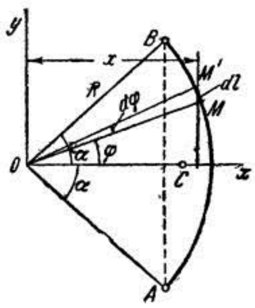

Рис.10

Найдем координату x_C по формуле $x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl$. Для этого выделим на дуге AB элемент MM’ длиною $dl = Rd\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата x элемента MM будет $x = Rcos\varphi$. Подставляя эти значения x и dl и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим: $x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} cos\varphi d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha,$ где L – длина дуги AB, равная $R = 2\alpha$.

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном $x_C = Rsin\alpha/\alpha$, где угол α измеряется в радианах.

2)**Центр тяжести площади треугольника.** Рассмотрим треугольник, лежащий в плоскости Oxy, координаты вершин которого известны: A_i (x_i,y_i), (i = 1,2,3). Разбивая треугольник на узкие полоски, параллельные стороне A_1A_2, придем к выводу, что центр тяжести треугольника должен принадлежать медиане A_3M_3(рис.11).

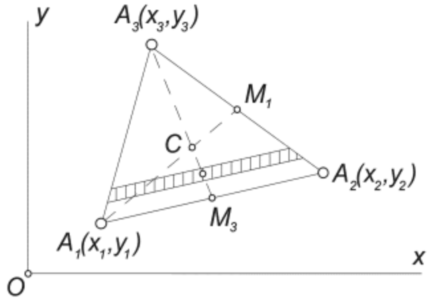

Рис.11

Разбивая треугольник на полоски, параллельные стороне A_2A_3, можно убедиться, что он должен лежать на медиане A_1M_1. Т. о., центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, которая, как известно, отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

В частности, для медианы A_1M_1 получим, учитывая, что координаты точки M_1 – это среднее арифметическое координат вершин A_2 и A_3:
$x_c = x_1 + (2/3)\cdot(x_{M1} - x_1) = x_1 + (2/3)\cdot[(x_2 + x_3)/2 - x_1] = (x_1 + x_2 + x_3)/3$. Т. о., координаты центра тяжести треугольника представляют собой среднее арифметическое из координат его вершин: $x_c = (1/3)\Sigma x_i$; $y_c = (1/3)\Sigma y_i$.

3)**Центр тяжести площади кругового сектора.** Рассмотрим сектор круга радиуса R с центральным углом 2α, расположенный симметрично относительно оси Ox (рис.12). Очевидно, что $y_c = 0$, а расстояние от центра круга, из которого вырезан этот сектор, до его центра тяжести можно определить по формуле:

$$x_c = \frac{1}{F}\int_F x dF. \quad (5)$$

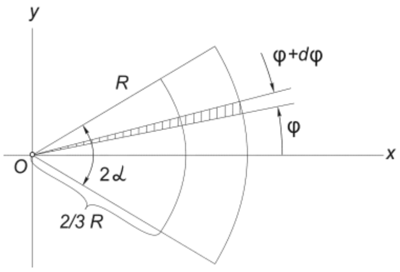

Рис.12

Проще всего этот интеграл вычислить, разбивая область интегрирования на элементарные секторы с углом $d\varphi$. С точностью до бесконечно малых первого порядка такой сектор можно заменить треугольником с основанием, равным $R – d\varphi$ и высотой R. Площадь такого треугольника $dF=(1/2)R^2\cdot d\varphi$, а его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины, поэтому в (5) положим $x = (2/3)R\cdot\cos\varphi$. Подставляя в (5) $F = \alpha R^2$, получим:

$$x_c = \frac{1}{\alpha R^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{R}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{3\alpha}\Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{R}{3\alpha}[\sin\alpha - \sin(-\alpha)] = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}. \qquad (6)$$

С помощью последней формулы вычислим расстояние до центра тяжести полукруга. Подставляя в (2) $\alpha = \pi/2$, получим: $x_c = (4R)/(3\pi) \cong 0{,}4R$.