ЛЕКЦИЯ 9

КИНЕМАТИКА. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Введение. Задачи кинематики

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается геометрия движения тел без учета их массы и приложенных к ним сил. При изучении кинематики ориентируются на конкретную систему отсчета (систему координат), по отношению к которой рассматривается движение тела.

Если изучается движение материальной точки, то определяются траектория точки, ее скорость и ускорение, характер изменения скорости и ускорения точки с течением времени. Если изучается движение материального тела с учетом его размеров, то определяются траектории точек (частиц) тела, скорости и ускорения различных точек тела, а также закономерности изменения скорости и ускорения любой точки тела с течением времени. В связи с этим кинематика делится на две части: кинематика точки и кинематика абсолютно твердого тела. В кинематике твердого тела рассматриваются пять видов движения: поступательное, вращательное (вращение тела вокруг неподвижной оси), плоское (или плоско-параллельное), сферическое и движение свободного твердого тела (общий случай движения тела).

Кинематика точки

Способы задания движения точки

Чтобы определить траекторию (когда ее вид не известен), скорость и ускорение движущейся точки в любой момент времени, необходимо использовать исходные данные, т.е. задавать движение точки. Исторически сложились три главных способа задания движения точки: естественный (способ Эйлера), координатный (в декартовых, полярных и других координатах) и векторный.

Рассмотрим векторный способ задания движения точки.

По отношению к неподвижному центру O в пространстве движется точка M (рис.1).

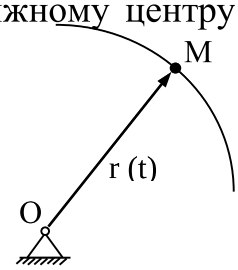

Рис.1

Ее положение в любой момент времени можно определить с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из неподвижного центра O в точку M. При движении точки величина и направление вектора $\vec{r}$ непрерывно изменяются с течением времени: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Это – векторное уравнение движения точки. Траектория точки в этом случае определяется как годограф вектора $\vec{r}$, т.е. как геометрическое место концов вектора $\vec{r}$ в разные моменты времени. Векторное уравнение движения точки позволяет определить скорость и ускорение точки. Этот способ задания движения точки используется в теоретических исследованиях и выводах.

Рассмотрим способ задания движения точки в декартовых координатах.

Положение точки M в пространстве относительно прямоугольной системы координат (рис..2) определяется координатами x, y, z. При движении точки эти координаты изменяются с течением времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

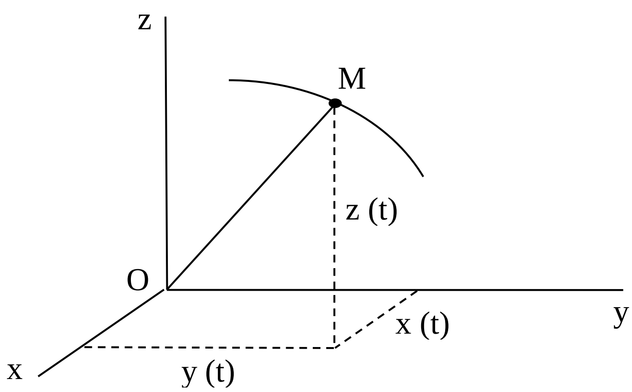

Рис..2

Получаем уравнения движения точки, которые позволяют определять скорость и ускорение точки в любой момент времени. Уравнения движения точки в координатной форме – это, по существу, параметрические уравнения траектории (роль параметра играет время t). Чтобы получить уравнение траектории в явной форме, достаточно исключить из заданных уравнений движения точки параметр t. Например, в случае плоской траектории: $x = x(t)$ и $y = y(t)$; исключив параметр t, получим: $y = f(x)$, или $F(x, y) = 0$.

Таким образом, для решения задач кинематики точки в этом случае следует задавать уравнения движения точки в декартовых координатах.

Теперь рассмотрим естественный способ задания движения точки (предложен Л.Эйлером). Задаются траектория точки (вид траектории относительно выбранной системы отсчета), начало и положительное направление отсчета дуговой координаты S (точка O +), закон изменения дуговой координаты (расстояния вдоль траектории): $S = S(t)$ - уравнение движения точки по заданной траектории (рис..3).

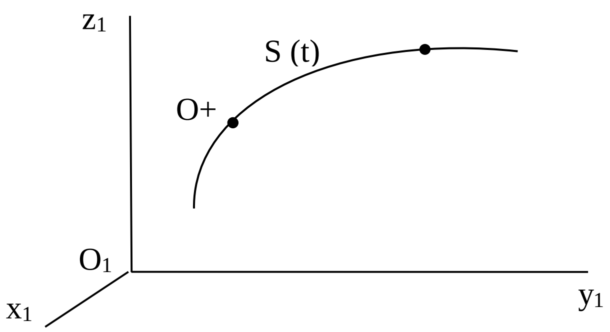

Рис..3

Этот способ задания движения точки позволяет определять скорость и ускорение точки в любой момент времени, а также получить уравнения равномерного и равнопеременного движения точки.

Определение скорости и ускорения точки

Скорость точки при векторном способе задания ее движения можно определить, рассматривая перемещение точки за малый промежуток времени Δt, при котором радиус-вектор $\vec{r}$ получает малое перемещение

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, что дает среднюю скорость точки $\vec{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ за промежуток времени Δt ($\Delta\vec{r}$ - вектор приращение точки *M*). Скорость точки *M* в данный момент времени t определяем, переходя к пределу, к которому стремится вектор $\vec{v}_{cp}$ при $\Delta t \to 0$, (рис.4) т.е. $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

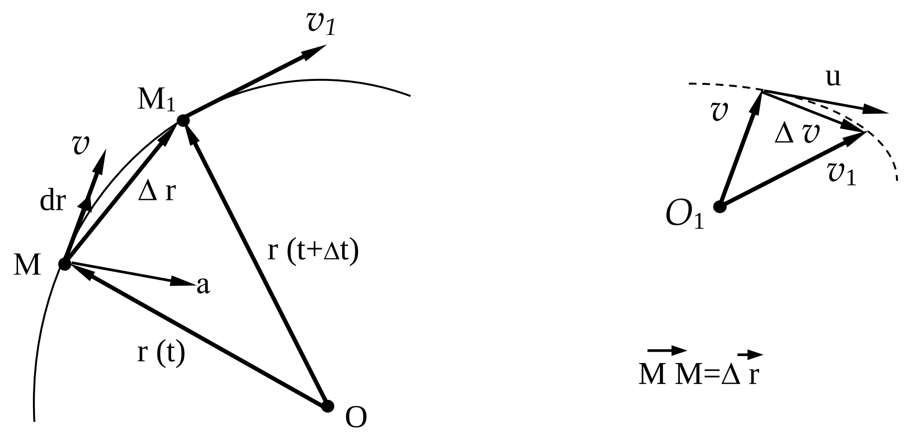

Рис.4

При этом вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ стремится к вектору $d\vec{r}$, направляемому по касательной к траектории. Таким образом, скорость точки равна первой производной по времени от радиуса-вектора $\vec{r}$, т.к. $\vec{r} = \vec{r}(t)$, и вектор $\vec{v}$ направляется по касательной к траектории в сторону движения точки.

Ускорение точки находим, определяя предел среднего ускорения $\vec{a}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{v}$ - приращение скорости за малый промежуток времени Δt, устремляя Δt к нулю (рис.4), т.е.

$$\vec{a} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки, так как $\vec{v} = \vec{v}(t)$, или второй производной по времени от радиуса-вектора $\vec{r}$, т.к. $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Направление вектора $\vec{a}_{cp}$ определяется по направлению вектора $\Delta\vec{v}$, а направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью годографа вектора $\vec{v}$ (векторная функция $\vec{v} = \vec{v}(t)$ позволяет построить годограф скорости $\vec{v}$; в момент времени t скорость $\vec{u}$ конца вектора $\vec{v}$, равная $\frac{d\vec{v}}{dt}$, направляется по касательной к годографу, а ускорение , а ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}$).