ЛЕКЦИЯ 10

Кинематика твердого тела

Поступательное движение тела

Поступательным называется такое движение тела относительно конкретной системы отсчета, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Если известна скорость точки *A* тела, то можно определить скорость любой другой точки тела, например, точки *B*, используя векторное равенство (рис.10.1) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$ и формулу $\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$, что дает $\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_A$, так как $\dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 0$ ($d\vec{r}_{AB} = const$ при поступательном движении тела).

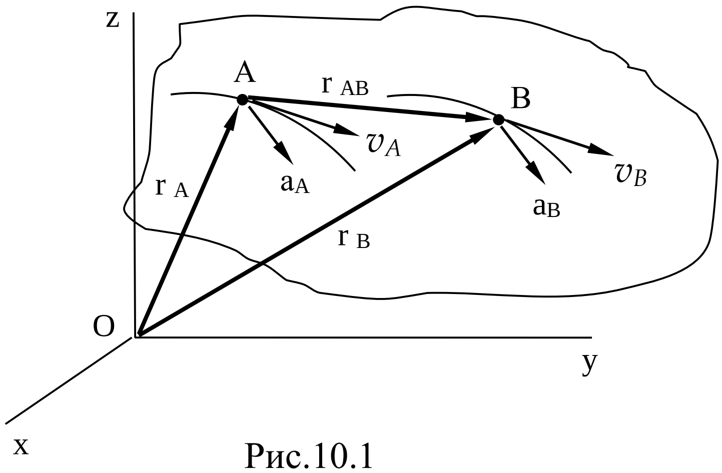

Рис.10.1

Следовательно, скорости точек тела в любой момент времени геометрически равны. То же мы получим, рассматривая ускорения точек тела:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A .$$

Так что и ускорения точек тела в любой момент времени геометрически равны.

Равенство скоростей точек в один и тот же момент времени позволяет утверждать, что траектории точек тела при его поступательном движении параллельны (т.к. параллельны касательные к траекториям точек в каждый момент времени) или тождественны (траектории совпадают при их наложении друг на друга).

Такие свойства поступательного движения тела позволяют записать уравнения поступательного движения в виде:

$$x_A = x(t),\ y_A = y(t),\ z_A = z(t),$$

где A – произвольно выбранная точка тела.

Эти уравнения позволяют определить положение тела, траектории, скорости и ускорения всех точек тела в любой момент времени.

Задачи, связанные с определением скоростей и ускорений точек тела в этом случае сводятся к задачам кинематики точки.

Вращательное движение тела

Вращательным называется движение тела, при котором хотя бы две точки тела неподвижны. Прямая линия, проходящая через эти две точки, называется *осью вращения*.

Положение тела в пространстве однозначно определяется углом φ между плоскостями F_1 и F_2, из которых F_1 - неподвижна, а F_2 - жестко связана с телом. Поэтому уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = \varphi(t)$.

За положительное направление отсчета угла φ обычно принимается направление вращения тела против хода часовой стрелки, если наблюдатель смотрит со стороны положительного направления оси z к началу координат (рис.10.2).

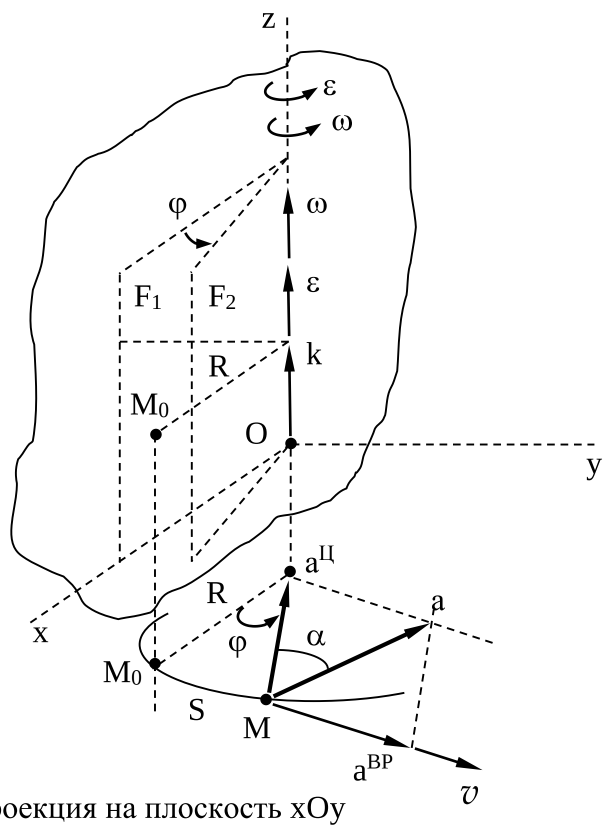

Рис.10.2

Вращательное движение тела характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением.

Угловая скорость тела в данный момент времени определяется как предел средней угловой скорости при стремлении к нулю малого промежутка времени Δt: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ (здесь $\Delta\varphi$ - приращение угла поворота за время Δt, а $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ - средняя угловая скорость тела за промежуток времени Δt).

Угловое ускорение тела в данный момент времени определяется как предел среднего углового ускорения $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, где $\Delta\omega$ - приращение угловой скорости за время Δt, при Δt стремящемся к нулю:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

В механике принято угловую скорость и угловое ускорение обозначать на чертеже в виде векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, направляя их по оси вращения, т.е.

$$\vec{\omega} = \vec{k}\dot{\varphi} \qquad \text{и} \qquad \vec{\varepsilon} = \vec{k}\ddot{\varphi},$$

где k - единичный вектор оси вращения (он задает положительное направление оси), $\dot{\varphi}$ - проекция вектора $\vec{\omega}$ на ось вращения, а $\ddot{\varphi}$ - проекция вектора $\vec{\varepsilon}$ на ось вращения ($\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ еще называют *условными* или *псевдо векторами*).

Если $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ одного направления, то движение считается ускоренным и наоборот.

Уравнение равномерного вращения ($\omega = const$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 - значение угла поворота тела при $t = 0$.

Уравнение равнопеременного вращения ($\varepsilon = const$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где φ_0 и ω_0 - значения угла поворота тела и угловой скорости при $t=0$.

Отсюда можно получить уравнение угловой скорости $\dot{\varphi}=\omega=\omega_0 \pm \varepsilon t$ (при равноускоренном вращении берется знак «плюс»; при равнозамедленном – знак «минус»).

Определение скорости и ускорения точки вращающегося тела.

Любая точка тела, кроме неподвижных точек, лежащих на оси вращения, при вращении тела движется по окружности. Расстояние S (дуговая координата точки *M*) и угол поворота тела φ (рис.10.8) связаны равенством: $S=R\varphi$.

Если задано уравнение вращательного движения тела $\varphi=\varphi(t)$, то можно оперировать функцией времени $S=S(t)$, что дает возможность сразу получить формулы для определения скорости и ускорения точки *M* при естественном способе задания ее движения:

$$v=\left|\dot{S}\right|=R\left|\dot{\varphi}\right|=R\omega, \qquad a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2},$$

где $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2 R=a^{ц}$ - *центростремительное ускорение* (так называется нормальное ускорение точки, принадлежащей вращающемуся телу); $a_\tau=\left|\ddot{S}\right|=R\left|\ddot{\varphi}\right|=R\varepsilon=a^{вр}$ - *вращательное ускорение*, (так называется касательное ускорение точки вращающегося тела).

Окончательная формула ускорения:

$$a=\sqrt{\left(R\omega^2\right)^2+(R\varepsilon)^2}=R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}.$$

Из рис.10.8 видно, что $tg\,\alpha=\dfrac{a^{вр}}{a^{ц}}=\dfrac{R\varepsilon}{R\omega^2}=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ (α - угол между ускорением $\vec{a}$ и радиусом окружности точки *M*).

Для теоретических выводов часто используются векторные выражения скорости и ускорения точки вращающегося тела (рис.10.3) $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ (формула Эйлера).

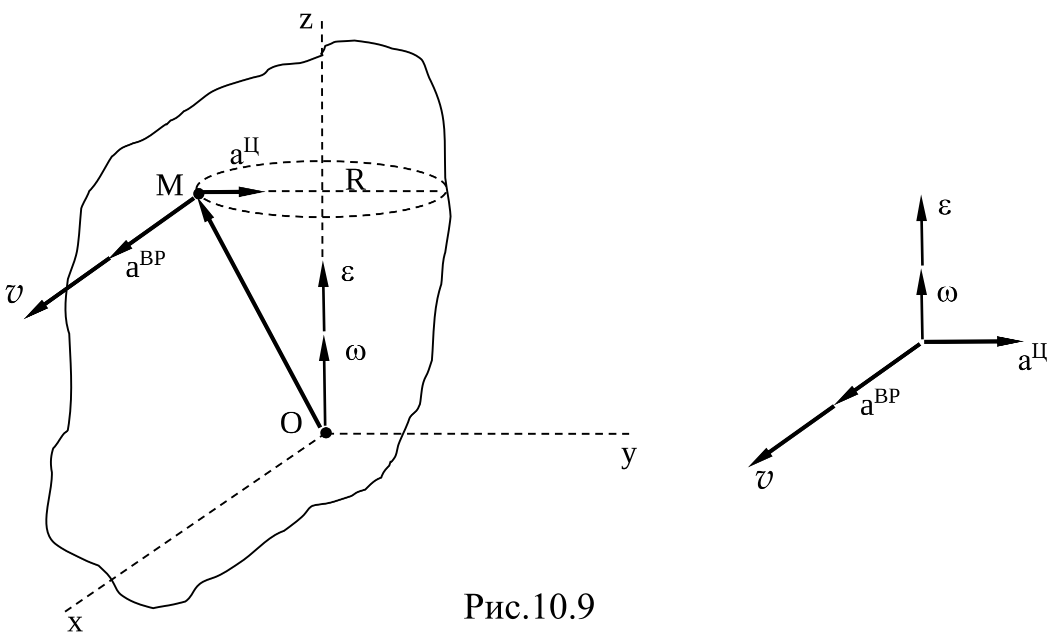

Рис.10.9

Модуль вектора $\vec{v}$: $v = \omega \cdot r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}\right) = \omega R$; направление вектора, равного векторному произведению $\vec{\omega}$ на $\vec{r}$, совпадает с направлением скорости точки *M*. Таким образом, убеждаемся в справедливости формулы Эйлера.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Первое слагаемое совпадает с вращательным ускорением, так как $\varepsilon \cdot r \sin\left(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}\right) = \varepsilon R$, а второе слагаемое совпадает с центростремительным ускорением, так как $\omega \cdot v \sin 90^0 = \omega^2 R$ (направления векторов также проверяются по правилу векторного произведения). Таким образом, получаем:

$$\vec{a}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \text{и} \qquad \vec{a}^{ц} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$