ЛЕКЦИЯ 11

Плоское движение тела

Плоским (или *плоско-параллельным*) называется такое движение тела, при котором все точки тела остаются в плоскостях, параллельных одной и той же неподвижной плоскости (рис.11.1).

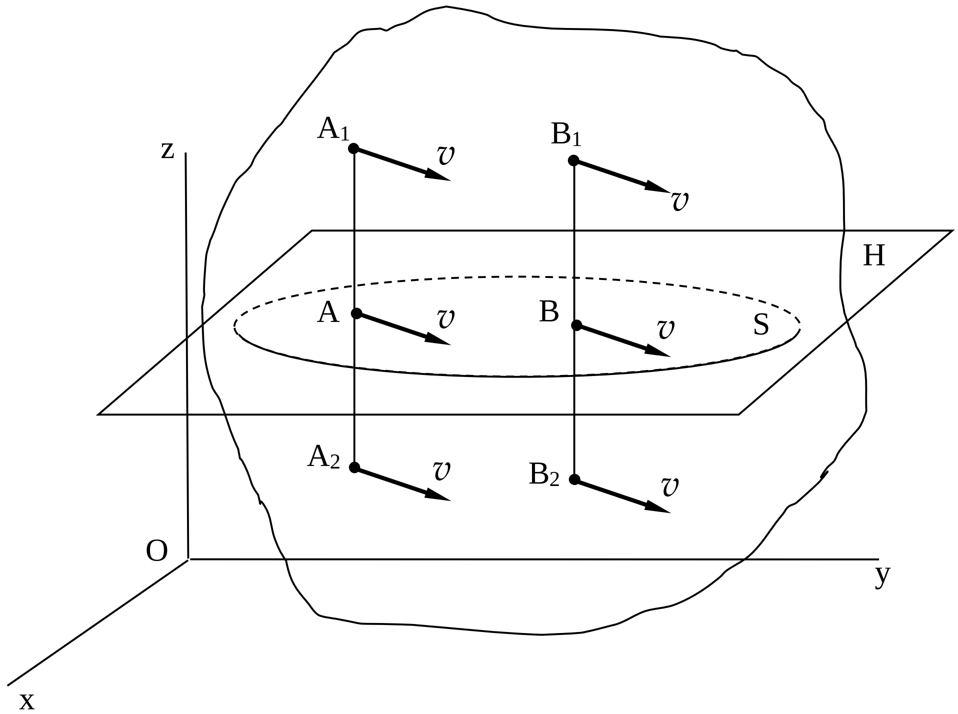

Рис.11.1

Отсюда следует, что любой отрезок прямой, связанной с телом, перпендикулярный к плоскости H (например, отрезок $A_1 A_2$), движется поступательно. Следовательно, траектории точек A_1, A и A_2 одинаковы, скорости этих точек геометрически равны в любой момент времени, ускорения точек также геометрически равны. То же самое можно сказать о точках B_1, B и B_2 отрезка $B_1 B_2$. Делаем вывод: изучать плоское движение объемного тела можно, исследуя движение плоской фигуры S, связанной с телом, в ее плоскости.

Так как положение плоской фигуры в ее плоскости (в плоскости xOy) однозначно определяется положением отрезка AB, принадлежащего плоской фигуре, то можно положение плоской фигуры задавать, задавая координаты точек A и B.

Рассмотрим два положения плоской фигуры (I и II) в моменты времени t и $t+\Delta t$ (два положения отрезка AB). Отрезок AB из первого положения во второе ($A'B'$) можно перевести (рис.11.2), если сначала поступательно переместить отрезок, взяв за полюс точку A, а затем повернуть отрезок $A'B_0$ вокруг точки A' на угол φ_1 (получим отрезок $A'B'$).

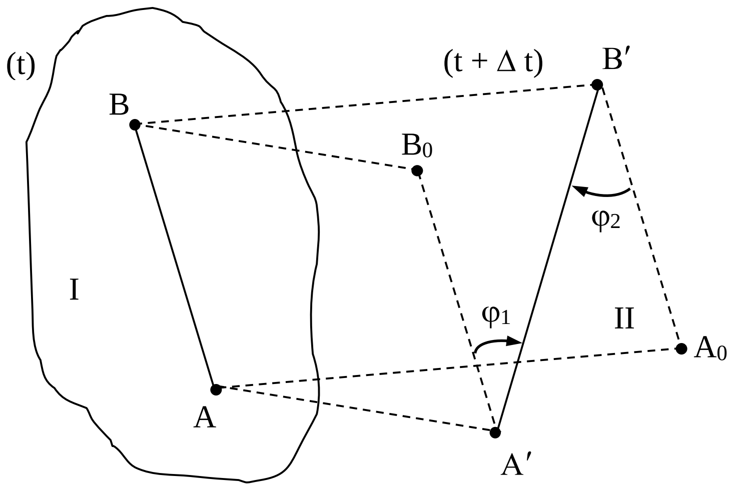

Рис.11.2

То же самое получим, если взять за ориентир (за полюс) точку B: поступательно переместим отрезок AB, а затем повернем его на угол φ_2 вокруг точки B'. Замечаем, что $\varphi_1 = \varphi_2$ (угол поворота от выбора полюса не зависит).

Устремляя Δt к нулю, получим следующий результат: плоское движение можно рассматривать как два одновременно происходящих движения: поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса (вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной к плоскости xOy), при этом ω и ε от выбора полюса не зависят. Следовательно, можно задавать положение отрезка AB на плоскости xOy тремя координатами: линейными - x_A и y_A и угловой - φ (рис.11.3). Отсюда получаем три уравнения плоского движения тела: $x_A = x(t);$ $y_A = y(t);$ $\varphi = \varphi(t),$

которые позволяют определять скорость и ускорение полюса *A* и угловую скорость и угловое ускорение плоской фигуры, используя уже известные формулы.

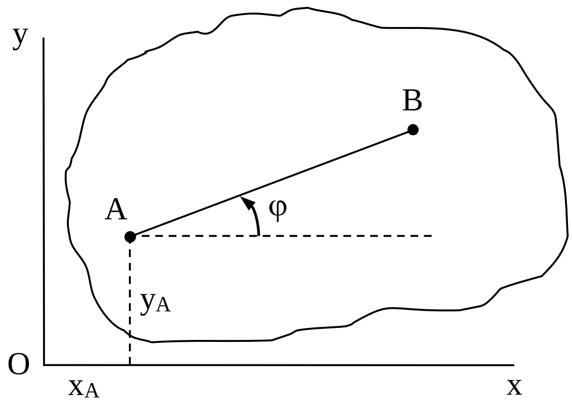

Рис.11.3

Но чтобы определить скорость любой точки другой точки плоской фигуры, необходимо знать теорему о скоростях точек плоской фигуры.

Но чтобы определить скорость любой точки другой точки плоской фигуры, необходимо знать теорему о скоростях точек плоской фигуры.

Теорема: *скорость любой точки* B_i *плоской фигуры* $\vec{v}_{B_i}$ *равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса* $\vec{v}_A$ *и скорости этой точки* B_i *во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса* $\vec{v}_{AB_i}$, *т.е.*

$\vec{v}_{B_i} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB_i}$ *(обозначение полюса принято ставить на первое место в индексе второго слагаемого)*.

Приведем доказательство, задавая скорость $\vec{v}_A$, угловую скорость ω плоской фигуры и длину отрезка *AB* (рис.11.4).

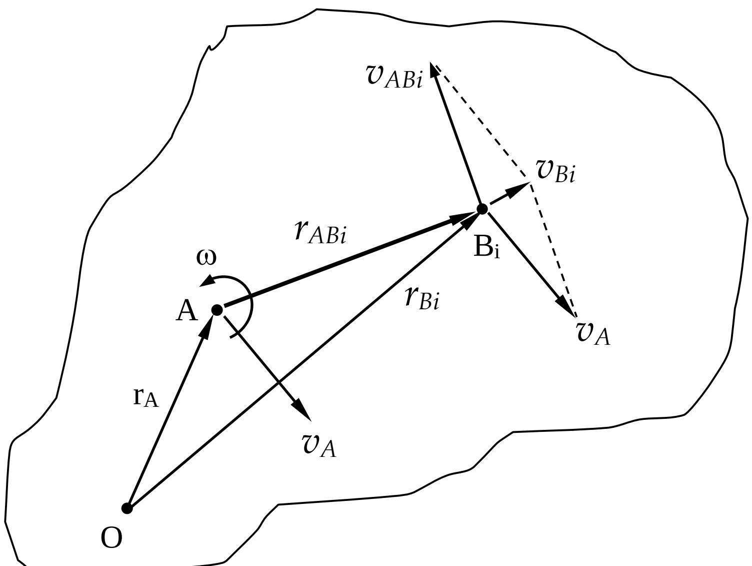

Рис.11.4

Так как $\vec{v}_{B_i} = \dfrac{d\vec{r}_{B_i}}{dt}$, а $\vec{r}_{B_i} = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB_i}$, то, дифференцируя $\vec{r}_B$ по времени ($\vec{r}_B$ зависит от t при движении плоской фигуры), получим: $\vec{v}_{B_i} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{AB_i}}{dt}$, что дает $\vec{v}_{B_i} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB_i}$, где $\vec{v}_{AB_i}$ - скорость точки B_i во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса A (при этом $v_{AB_i} = \omega \cdot AB_i$). Теорема доказана.

При решении задач используются следствия этой теоремы.

Первое следствие: *при движении плоской фигуры проекции скоростей точек одного и того же отрезка прямой на ось, проходящую по этому отрезку, равны*.

Действительно, $v_{B_x} = v_{A_x} + v_{AB_x}$, но $\vec{v}_{AB} \perp \overrightarrow{AB}$, поэтому $v_{AB_x} = 0$, отсюда и получаем $v_{B_x} = v_{A_x}$.

Второе следствие: *концы векторов скоростей точек одного и того же отрезка прямой лежат на одной прямой линии и делят отрезок этой прямой на части, пропорциональные отрезкам на исходной прямой* (рис.11.5).

Но чтобы определить скорость любой точки другой точки плоской фигуры, необходимо знать теорему о скоростях точек плоской фигуры.

Теорема: *скорость любой точки* B_i *плоской фигуры* $\vec{v}_{B_i}$ *равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса* $\vec{v}_A$ *и скорости этой точки* B_i *во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса* $\vec{v}_{AB_i}$ *,*

т.е. $\vec{v}_{B_i} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB_i}$ *(обозначение полюса принято ставить на первое место в индексе второго слагаемого).*

Приведем доказательство, задавая скорость $\vec{v}_A$, угловую скорость ω плоской фигуры и длину отрезка AB (рис.11.4).

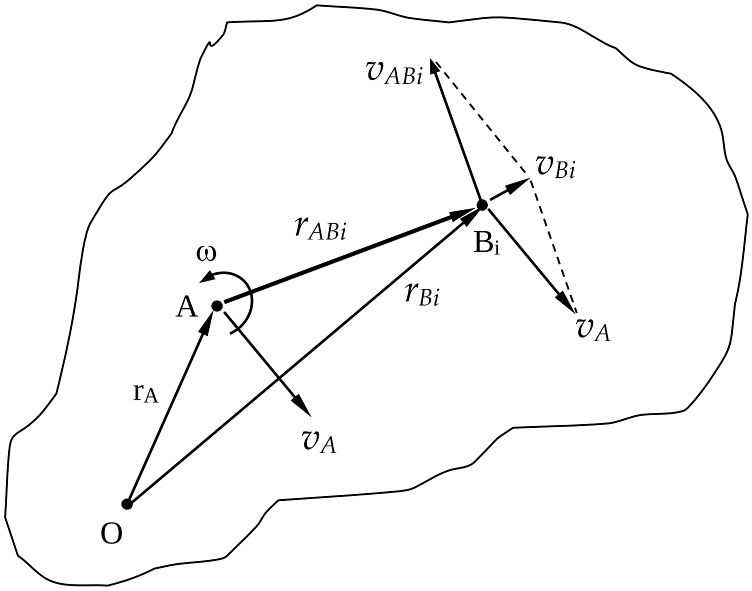

Рис.11.4

Так как $\vec{v}_{B_i} = \dfrac{d\vec{r}_{B_i}}{dt}$, а $\vec{r}_{B_i} = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB_i}$, то, дифференцируя $\vec{r}_B$ по времени ($\vec{r}_B$ зависит от t при движении плоской фигуры), получим: $\vec{v}_{B_i} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{AB_i}}{dt}$, что дает $\vec{v}_{B_i} = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB_i}$, где $\vec{v}_{AB_i}$ - скорость точки B_i во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса A (при этом $v_{AB_i} = \omega \cdot AB_i$). Теорема доказана.

При решении задач используются следствия этой теоремы.

Первое следствие: *при движении плоской фигуры проекции скоростей точек одного и того же отрезка прямой на ось, проходящую по этому отрезку, равны.*

Действительно, $v_{B_x} = v_{A_x} + v_{AB_x}$, но $\vec{v}_{AB} \perp \overrightarrow{AB}$, поэтому $v_{AB_x} = 0$, отсюда и получаем $v_{B_x} = v_{A_x}$.

Второе следствие: *концы векторов скоростей точек одного и того же отрезка прямой лежат на одной прямой линии и делят отрезок этой прямой на части, пропорциональные отрезкам на исходной прямой* (рис.11.5).

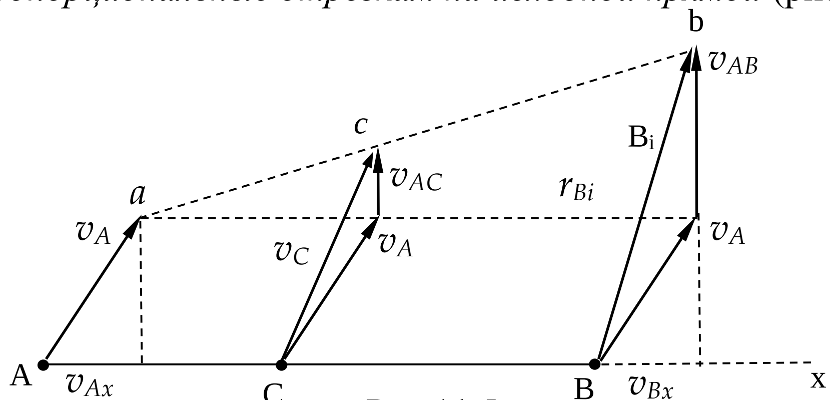

Рис.11.5

Так как скорости точек *B* и *C* определяются с учетом скоростей этих точек во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *A*, а эти скорости пропорциональны расстояниям от точек *B* и *C* до полюса, то и получаем сформулированный выше результат $\left(\dfrac{ac}{cb} = \dfrac{AC}{CB}\right)$.

При определении скоростей точек плоской фигуры часто пользуются понятием *мгновенного центра скоростей*. Это такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если такую точку *P* принять за полюс, то скорость любой другой точки плоской фигуры *B* определяется как скорость точки *B* во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *P*: $\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}$, но $v_P = 0$, следовательно, $\vec{v}_B = \vec{v}_{BP}$, а $v_{BP} = \omega \cdot BP$, при этом $\vec{v}_B \perp \overrightarrow{BP}$.

В этом практическая ценность мгновенного центра скоростей.

Итак, скорости точек плоской фигуры легко определить с помощью мгновенного центра скоростей: $v_B = \omega \cdot BP$, $v_C = \omega \cdot CP$, $v_D = \omega \cdot DP$, откуда следует, что скорости точек пропорциональны их расстояниям до полюса и векторы скоростей перпендикулярны к соответствующим отрезкам *BP*, *CP* или *DP* (рис.11.6).

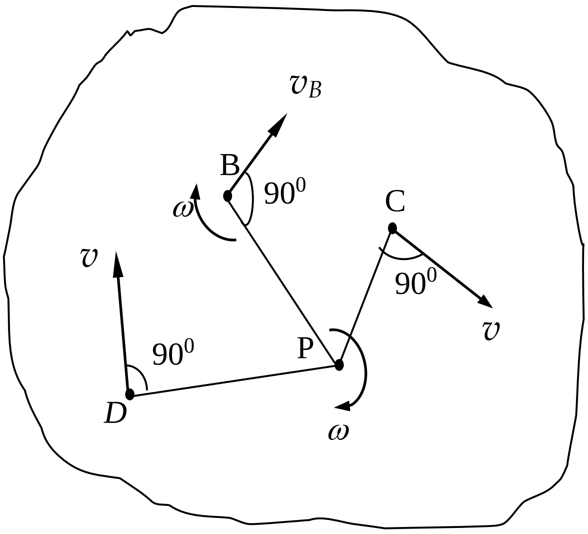

Рис.11.6

Как же определить положение мгновенного центра скоростей? Есть различные способы. Рассмотрим их.

Если даны скорость полюа $\vec{v}_A$ и угловая скорость плоской фигуры ω, то расстояние от полюса до мгновенного центра скоростей определяется по формуле

$$AP = \frac{v_A}{\omega}. \qquad (*)$$

Мгновенный центр скоростей находится на отрезке прямой, перпендикулярной к скорости полюса, на расстоянии от полюса, определяемом по формуле (*).

Действительно, в этом случае $\vec{v}_{AP}$ и $\vec{v}_A$ лежат на одной прямой и

направлены в противоположные стороны (см.рис.11.7), причем $v_{AP} = v_A$ (отрезок *AP* надо, естественно, отложить под углом 90^0 к вектору v_A, откладывая угол в направлении угловой скорости ω) (см. круговую стрелку ω).

Если угловая скорость плоской фигуры неизвестна, но дана скорость $\vec{v}_A$ одной точки и известно направление скорости другой точки, то мгновенный центр скоростей можно найти как точку пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B (рис.11.7).

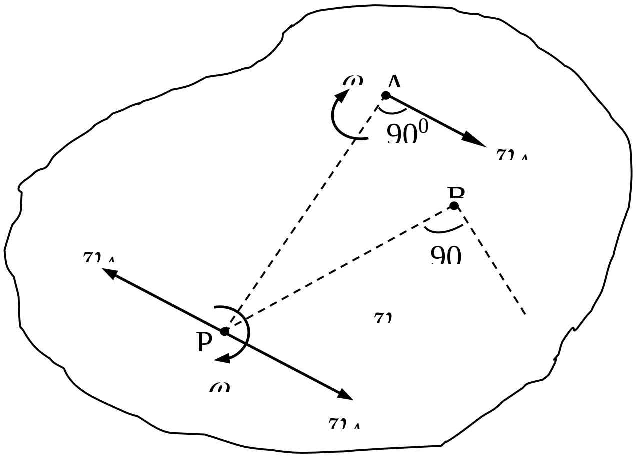

Рис.11.7

Если известны скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек одного отрезка и они параллельны и перпендикулярны отрезку AB, то мгновенный центр скоростей находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов скоростей и прямой, проведенной вдоль отрезка AB (рис.11.8) или находится в бесконечности (не существует), если $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (угловая скорость плоской фигуры в последнем случае равна нулю).

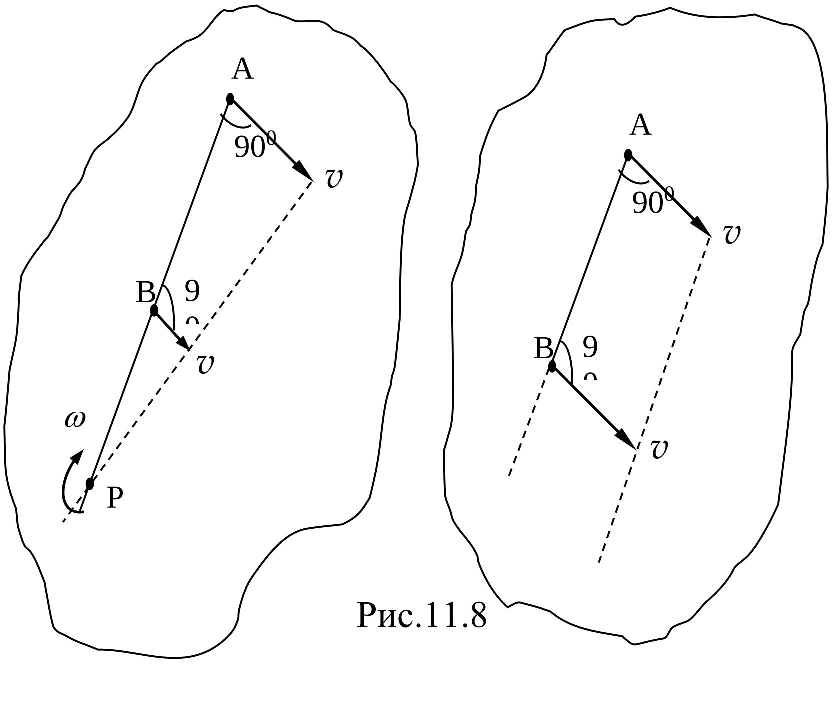

Рис.11.8

Если скорости произвольно выбранных точек плоской фигуры геометрически равны в данный момент времени, то мгновенный центр скоростей не существует и угловая скорость плоской фигуры в этот момент времени равна нулю. Если известно, что плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой или прямой линии, то мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения двух тел (рис.11.9).

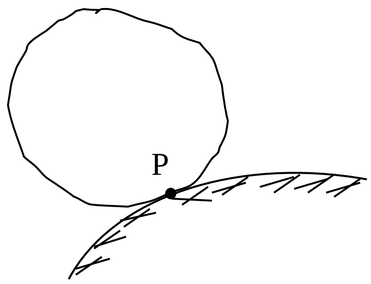

Рис.11.9

Определение ускорений точек плоской фигуры

Для определения ускорений точек плоской фигуры используется теорема об ускорениях точек: ускорения любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме двух ускорений: ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Приведем доказательство этой теоремы $\vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt}$; $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$,

но $\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$ (по формуле Эйлера), поэтому $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$, следовательно,

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{a}_A + \varepsilon \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{AB}.$$

Окончательно,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{вр} + \vec{a}_{AB}^{ц}, \text{ т.е. } \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB},$$

т.к. $\quad \vec{a}_{AB}^{вр} + \vec{a}_{AB}^{ц} = \vec{a}_{AB}$ (рис.11.1). Теорема доказана.

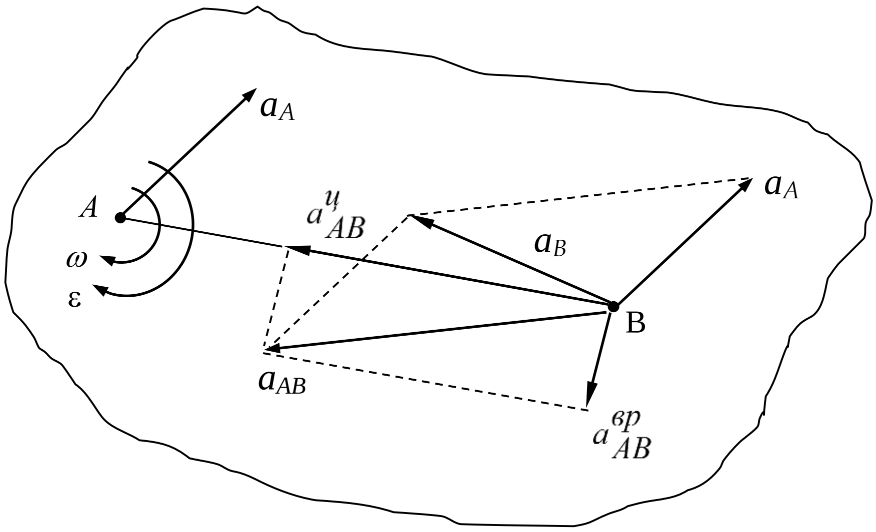

Рис.11.1

У этой теоремы есть два следствия.

Первое следствие: проекция ускорения точки *B* на ось, проходящую через отрезок *AB*, всегда меньше, (в крайнем случае равна) проекции ускорения полюса – точки *A* на эту же ось (рис.11.2).

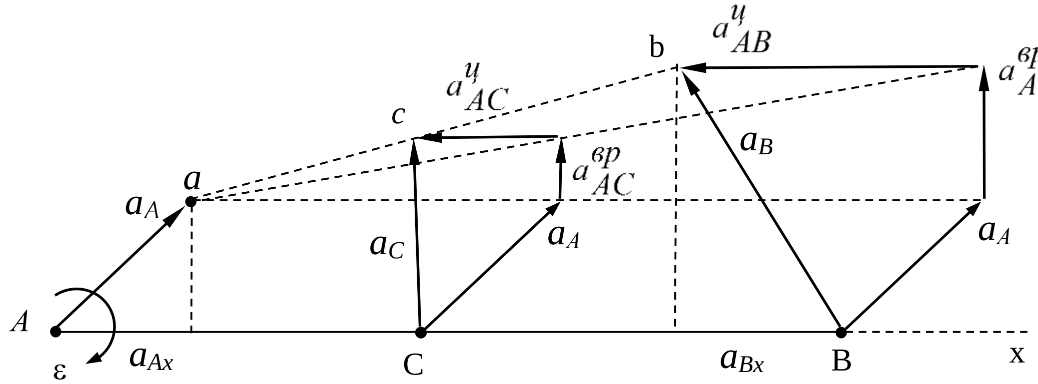

Рис.11.2

Из рисунка видно, что равенство проекций возможно только в момент, когда $\omega = 0$, а $\varepsilon \neq 0$.

Второе следствие: концы векторов ускорений точек *A, B* и *C* одного и того же отрезка лежат на одной прямой и делят отрезок *ab* этой прямой на части *ac* и *bc*, пропорциональные отрезкам *AC* и *BC* на исходном отрезке *AB* (рис.11.2). Это утверждение справедливо потому, что ускорение точек $\vec{a}_{AB}$ и $\vec{a}_{AC}$ пропорциональны расстояниям от точек *B* и *C* до полюса *A*.

Ускорение любой точки плоской фигуры можно определять с помощью *мгновенного центра ускорений* – точки плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. В этом случае, если известны угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры, ускорение произвольно выбранной точки *B*: $\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{QB}$, если $a_Q = 0$ (точка *Q* – мгновенный центр ускорений), то $\vec{a}_B = \vec{a}_{QB} = \vec{a}^{ц}_{QB} + \vec{a}^{вр}_{QB}$. Т.е. ускорение точки *B* равно геометрической сумме центростремительного и вращательного ускорений точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг мгновенного центра ускорений. На рис.11.3 показаны эти ускорения, при этом $tg\,\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ (α - угол между ускорением $\vec{a}_B$ и отрезком *BQ*, этот угол отложен от ускорения $\vec{a}_B$ в направлении углового ускорения ε (см. круговую стрелку ε).

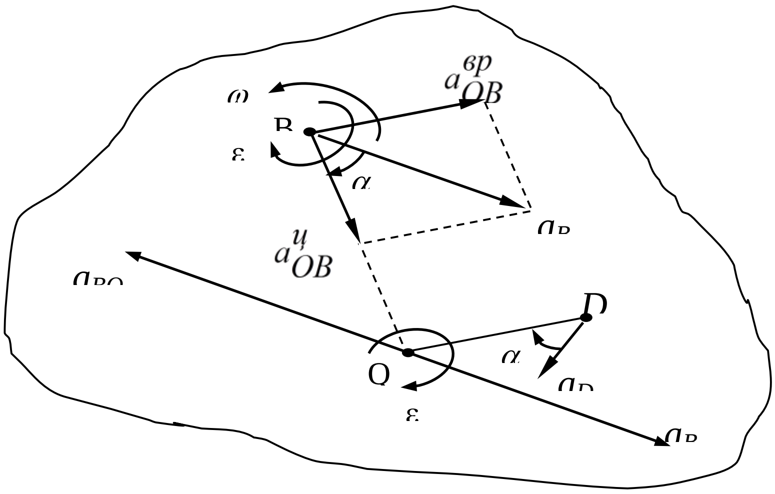

Рис.11.3

Только в этом случае $\vec{a}_Q = \vec{a}_B + \vec{a}_{BQ}$ (по теореме об ускорениях точек плоской фигуры) и $\vec{a}_B = -\vec{a}_{BQ}$, что дает $\vec{a}_Q = 0$ (точка *Q* действительно мгновенный центр ускорений в данный момент времени, для которого ω и ε имеют конкретные числовые значения).

Так как $a_B = BQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, $a_D = DQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, то можно утверждать, что ускорения точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений.

Различные варианты положения мгновенного центра ускорений показаны на рис.11.4.

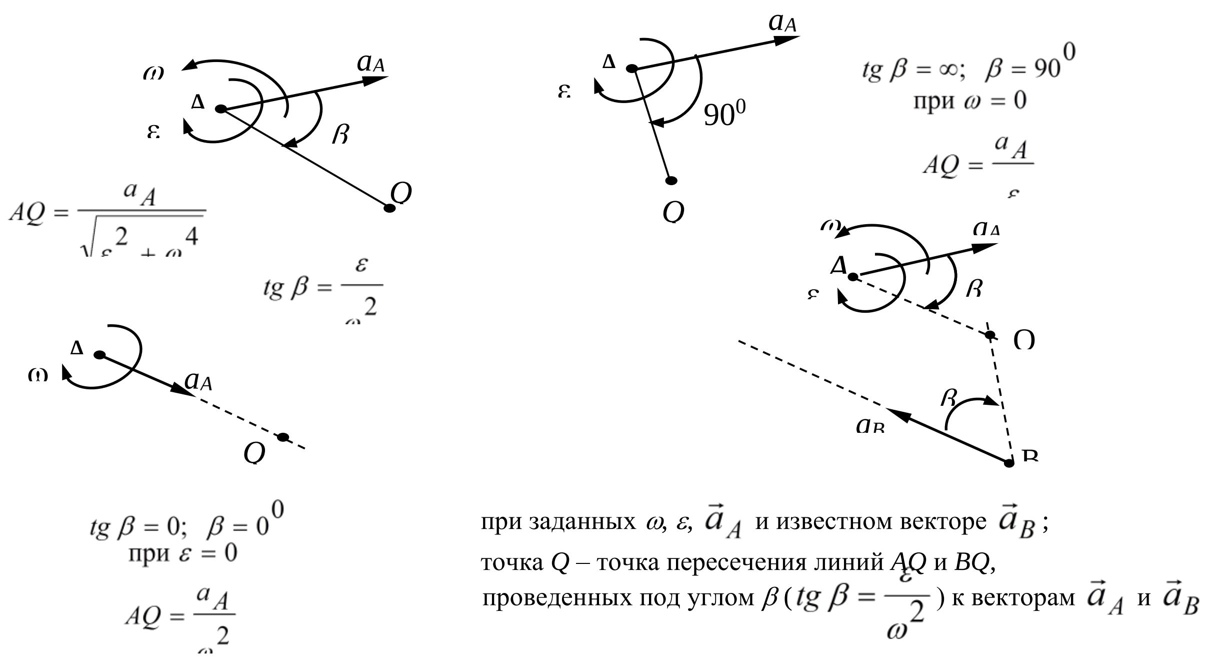
ω
ε
A
a_A
β
O
$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$
$tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$
ε
A
a_A
90^0
O
$tg\,\beta = \infty;\ \ \beta = 90^0$
при $\omega = 0$
$AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}$
ω
A
a_A
O
$tg\,\beta = 0;\ \ \beta = 0^0$
при $\varepsilon = 0$
$AQ = \frac{a_A}{\omega^2}$
ω
ε
A
a_A
β
O
β
a_B
B
при заданных ω, ε, $\vec{a}_A$ и известном векторе $\vec{a}_B$;
точка Q – точка пересечения линий AQ и BQ,
проведенных под углом β ($tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$) к векторам $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$

Рис.11.