ЛЕКЦИЯ 12

Сферическое движение тела

Сферическим называется движение тела, у которого одна точка неподвижна. В этом случае любая точка тела, кроме неподвижной, при движении остается на поверхности сферы, радиус которой равен расстоянию от этой точки до неподвижной точки.

Положение тела с одной неподвижной точкой относительно неподвижных прямоугольных координатных осей x_1, y_1 и z_1 (см.рис.12.1) определяется с помощью углов Эйлера: θ - угол нутации (откладывается от оси z_1 в сторону оси z (прямоугольные оси x, y, z жестко связаны с телом и непрерывно движутся вместе с ним), Ψ - угол прецессии (откладывается от оси x_1 в сторону линии узлов OJ, которая получается в результате пересечения наклонной плоскости x, y с горизонтальной плоскостью x_1, y_1), φ - угол собственного вращения (откладывается от линии узлов OJ в сторону оси x).

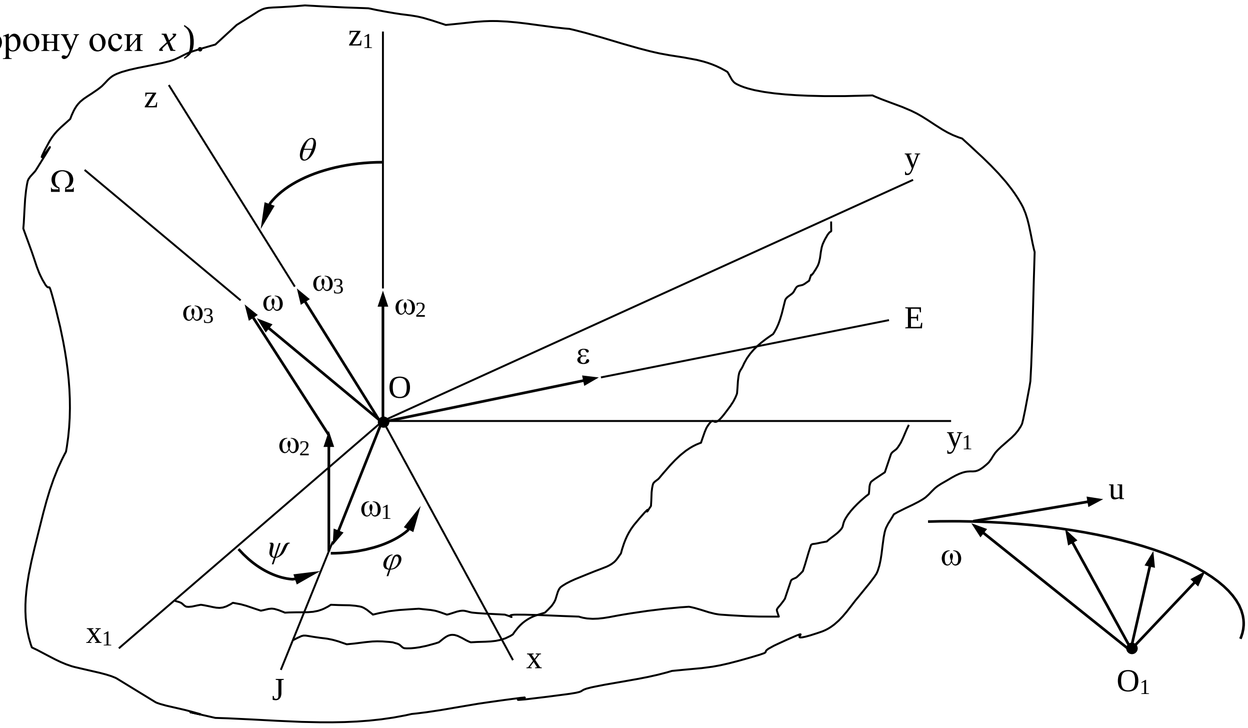

Рис.12.1

Нутация – кивание (ось Oz то приближается к оси z_1, то удаляется от нее), *прецессия* – предшествование (название взято из астрономии, день весеннего или осеннего равноденствия каждый год наступает чуть раньше, чем в прошлом году, для нас практически это незаметно и неощутимо), *собственное вращение* – вращение тела вокруг его оси симметрии Oz, которая перпендикулярна к плоскости угла φ.

При движении тела все три угла изменяются с течением времени, таким образом, получаем три уравнения сферического движения:

$$\theta = f_1(t), \qquad \psi = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t).$$

Если из трех углов изменяется только угол θ, то тело вращается вокруг неподвижной оси – вокруг линии OJ. Угловая скорость этого вращения $\omega_1 = \frac{d\theta}{dt}$, вектор $\vec{\omega}_1$ направляется по линии узлов (см.рис.12.1 при $\frac{d\theta}{dt} > 0$).

Если из трех углов изменяется только угол ψ, то тело вращается вокруг неподвижной оси – вокруг линии Oz_1. Угловая скорость этого вращения $\omega_2 = \frac{d\psi}{dt}$, вектор $\vec{\omega}_2$ направляется по оси Oz_1 (на рис.13.1 при $\frac{d\psi}{dt} > 0$).

Если из трех углов изменяется только угол φ, то тело вращается вокруг неподвижной оси – вокруг линии Oz и угловая скорость этого вращения $\omega_3 = \frac{d\varphi}{dt}$. Вектор $\vec{\omega}_3$ направляется по оси Oz (на рис.13.1 при $\frac{d\varphi}{dt} > 0$).

Если одновременно изменяются все три угла, то тело совершает сферическое движение, которое характеризуется мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$ и мгновенным угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Мгновенная угловая скорость тела $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$ (изображается замыкающей стороной векторного многоугольника угловых скоростей – см.рис.12.1). Вектор $\vec{\omega}$ определяет положение мгновенной оси вращения (мгновенной оси угловой скорости) Ω. Так как вектор $\vec{\omega}$ непрерывно изменяется с течением времени, то и положение мгновенной оси вращения непрерывно изменяется.

Мгновенное угловое ускорение тела можно найти, используя формулу $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. Построив годограф вектора $\vec{\omega}$, можно определить мгновенную скорость конца вектора $\vec{\omega}$ - $\vec{u} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$, отсюда $\vec{\varepsilon} = \vec{u}$, что позволяет показать вектор $\vec{\varepsilon}$ и определить положение мгновенной оси углового ускорения E (рис.12.1). Мгновенные оси Ω и E не совпадают, так как векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не лежат на одной прямой.

Мгновенную ось вращения можно определить как геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю.

Мгновенную ось углового ускорения можно определить как геометрическое место точек тела, вращательное ускорение которых в данный момент времени равны нулю.

Скорости точки тела в его сферическом движении можно определить, пользуясь формулой Эйлера, - $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ (см.рис.12.2), что дает

$$v_A = \omega \cdot r_A \sin\left(\vec{\omega}, \hat{\vec{r}}_A\right) = \omega\, h_1,$$

где h_1 - кратчайшее расстояние от точки A до мгновенной оси вращения.

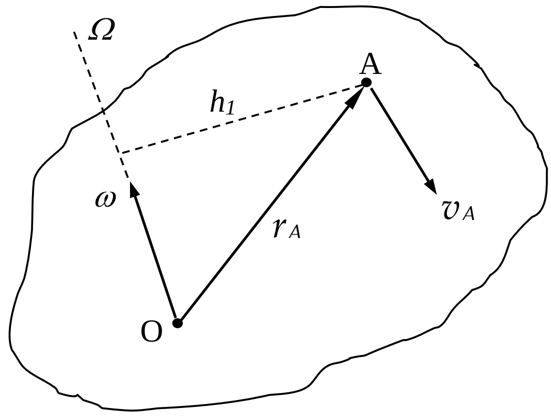

Рис.12.2

Ускорение точки A определяем по формуле

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \varepsilon \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A,$$

т.е. $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{вр} + \vec{a}_A^{ос}$, где вращательное ускорение $a_A^{вр} = \varepsilon \cdot r_A \sin\left(\vec{\varepsilon}, \hat{\vec{r}}_A\right) = \varepsilon\, h_2$ (h_2 - кратчайшее расстояние от точки A до мгновенной оси углового ускорения), $a_A^{oc} = \omega \cdot v_A \sin 90^0 = \omega^2 h_1$, a_A^{oc} - осестремительное ускорение точки A (см.рис.12.3).

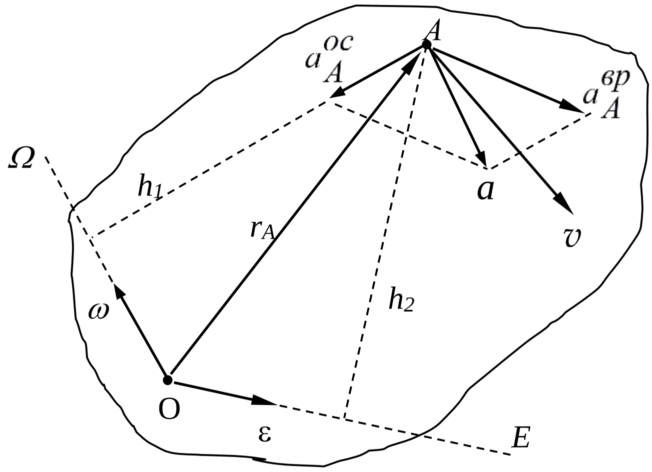

Рис.12.3

Так как $\vec{a}_A^{вр} \not\perp \vec{a}_A^{oc}$ (в общем случае), то величину ускорения точки A надо определять, используя тригонометрическую теорему косинусов (в общем случае векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{a}_A^{вр}$ не лежат на одной прямой).