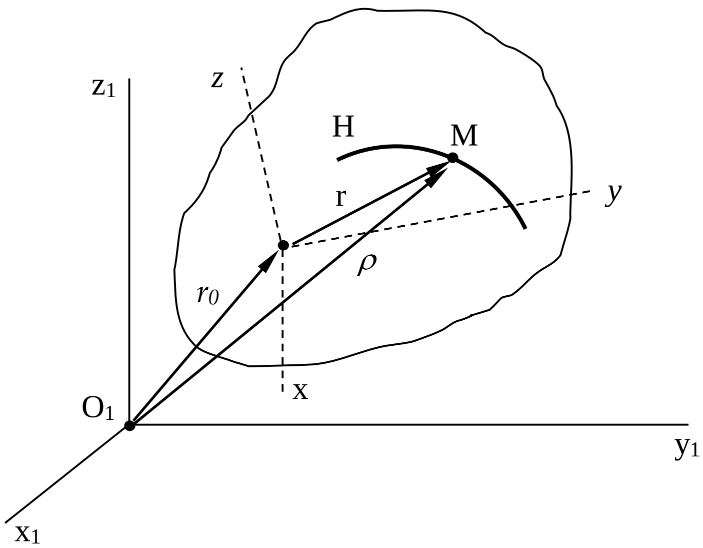
ЛЕКЦИЯ 14

Абсолютное, переносное и относительное движения точки

Сложным называется такое движение точки, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях. Так, человек, движущийся по эскалатору метрополитена, участвует в двух движениях – вместе с эскалатором и относительно балюстрады эскалатора. Поезд, движущийся по поверхности земли, участвует в двух движениях – вместе с земным шаром по отношению к солнцу и относительно земного шара. В технике существует множество механизмов и различных механических систем, где можно обнаружить сложное движение какого-либо элемента устройства.

Рис. 14.1



Рассмотрим движение точки M (рис.14.1) относительно неподвижной системы отсчета x_1, y_1, z_1, которое характеризуется радиусом-вектором $\vec{\rho}$, непрерывно изменяющимся с течением времени: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$. Это движение точки M - результат сложения двух движений. Одно из этих движений – движение точки M по отношению к системе отсчета x, y, z, связанной с движущимся телом H и поэтому перемещающейся в пространстве (это движение характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}$, непрерывно изменяющимся с течением времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$), и движение точки M вместе с телом H, движущимся относительно неподвижной системы отсчета x_1, y_1, z_1.

Первое движение (относительно подвижной системы отсчета) называется *относительным*, а второе движение точки M (вместе с телом H) – *переносным*. Два этих движения порождают сложное движение точки M, которое по отношению к неподвижной системе отсчета называется *абсолютным*.

Итак,векторное уравнение абсолютного движения: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$. В этом движении точка M обладает абсолютной скоростью $\vec{v}$ и абсолютным ускорением $\vec{a}$.

Векторное уравнение относительного движения: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

В этом движении точка обладает относительной скоростью $\vec{v}_r$ и абсолютным ускорением $\vec{a}_r$. Переносное движение точки M - это движение точки, как сказано выше, вместе с телом H, в этом движении переносной скоростью точки M $\vec{v}_e$ становится скорость той точки тела H, с которой точка M совпадает в данный момент времени. Так же и переносное ускорение точки M $\vec{a}_e$ - это ускорение той точки тела H, с которой совпадает точка M в данный момент времени. Уравнения движения тела H позволяют определять скорости и ускорения точек тела, с которыми совпадает точка M, участвуя в относительном движении.

Траекторию точки M в переносном движении показать на рисунке невозможно, а вот траектории точки M в относительном и абсолютном движениях можно определить и показать, решая конкретную задачу.

Например, если точка M движется по образующей прямого кругового конуса H, который вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Oz_1, то траектория точки M, скорость которой $\vec{v}_r$, в относительном движении – прямая линия, совпадающая с образующей конуса. Траектория точки M в абсолютном движении (скорость в этом движении $\vec{v}$) – винтовая линия, радиус которой непрерывно увеличивается; $\vec{v}_e$ - переносная скорость точки M в данный момент времени (на рис.14.2 показана неподвижная система координатных осей x_1, y_1, z_1 и подвижная система координатных осей x, y, z, связанных с конусом).

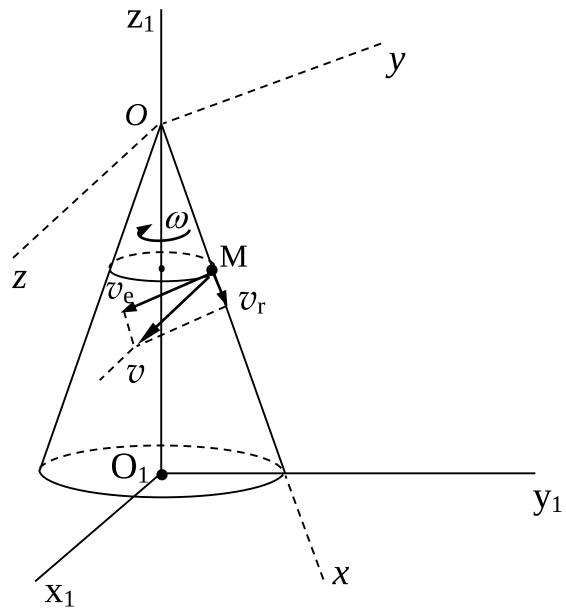


Рис.14.2

Теорема о сложении скоростей

Абсолютная скорость точки в ее сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Докажем эту теорему, зная переносную и относительную скорости точки (эти скорости определяются по заданным уравнениям переносного движения (движения тела H) и относительного движения).

Так как $\vec{\rho} = \vec{r}_0 + \vec{r}$ (см.рис.14.3), то

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{но} \quad \vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z,$$

где x, y, z - координаты точки M относительно подвижной системы $Oxyz$, связанной с телом H, поэтому

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z + \vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\dot{y} + \vec{k}\,\dot{z}. \qquad (*)$$

Рассмотрим движение точки M при $x, y, z = const$, тогда

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{d\vec{i}}{dt}x+\frac{d\vec{j}}{dt}y+\frac{d\vec{k}}{dt}z=\vec{v}_e$$

(получаем скорость точки тела H, с которой совпадает точка M, не участвующая в относительном движении).

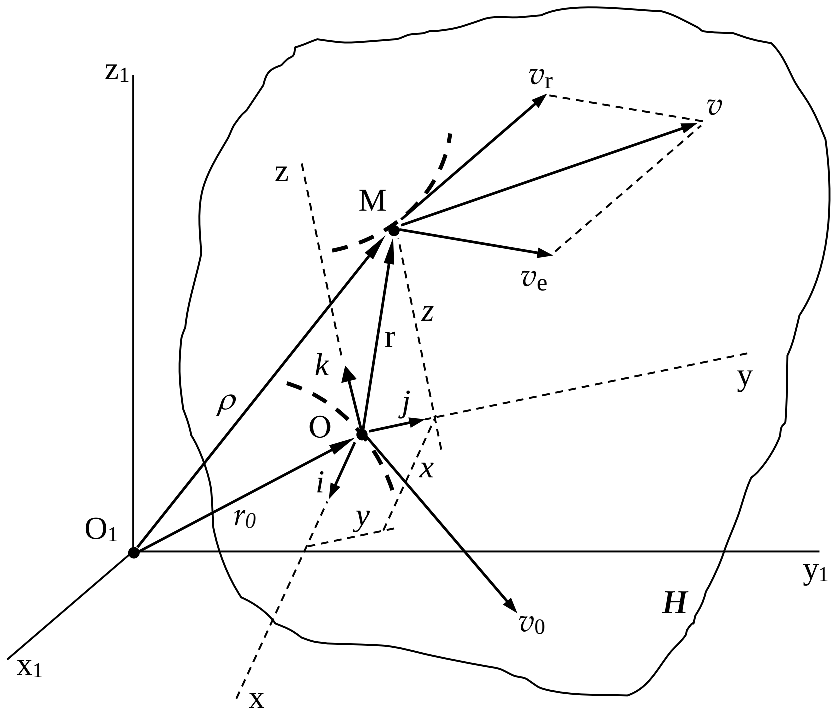


Рис.14.3

Теперь положим $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = const$ (тело H неподвижно). Получим

$$\vec{v}=\vec{i}\,\dot{x}+\vec{j}\,\dot{y}+\vec{k}\,\dot{z}=\vec{v}_r,$$

т.е. относительную скорость (переносного движения нет). Следовательно, в общем случае $\vec{v}=\vec{v}_e+\vec{v}_r$, когда происходят одновременно два движения – переносное и относительное. Теорема доказана.

Теорема о сложении ускорений

Абсолютное ускорение точки в ее сложном движении равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного и ускорения Кориолиса

$$\vec{a}=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_c.$$

Докажем эту теорему, зная уравнения переносного движения (движения тела H) и уравнения относительного движения точки M, которые позволяют определить все три ускорения, а затем и абсолютное ускорение точки M.

Так как $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, то, используя формулу (*), получим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x + \frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y + \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\dot{x} + \frac{d\vec{j}}{dt}\dot{y} + \frac{d\vec{k}}{dt}\dot{z}\right)2 + \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}. \tag{**}$$

Если $x, y, z = const$, то $\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x + \frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y + \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z = \vec{a}_e$ (точка M не участвует в относительном движении).

Если $\vec{v}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = const$, то $\vec{a} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} = \vec{a}_r$ (переносное движение – движение тела H либо отсутствует $(\vec{v}_0 = 0)$, либо поступательное $(\vec{v}_0 = const)$).

Замечаем, что и в первом и во втором случаях удвоенная скобка в уравнении (**) исчезает. Однако, в случае двух одновременно происходящих движений:

$$2\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\dot{x} + \frac{d\vec{j}}{dt}\dot{y} + \frac{d\vec{k}}{dt}\dot{z}\right) \neq 0.$$

Появляется дополнительное ускорение, названное *ускорением Кориолиса*, в честь открывшего это ускорение французского ученого Кориолиса (это ускорение иногда называют «*поворотным*» по предложению российского ученого Сомова).

Итак,

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c,$$

что и требовалось доказать.

Ускорение Кориолиса определяется формулой: $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, что следует из того, что $\dfrac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}$; $\dfrac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}$ и $\dfrac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}$,

где $\vec{\omega}_e$ - вектор угловой скорости тела (в сферическом движении тела – вектор мгновенной угловой скорости), а $\vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\dot{y} + \vec{k}\,\dot{z} = \vec{v}_r$ (относительная скорость).

Модуль вектора $\vec{a}_c$ определяем формулой

$$a_c = 2\,\omega_e \cdot v_r \cdot sin\left(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{v}_r\right),$$

откуда видно, что ускорение Кориолиса действительно равно нулю при поступательном переносном движении $(\omega_e = 0)$, а также в тот момент, когда в относительном движении скорость $v_r = 0$ и когда векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ параллельны.

Н.Е.Жуковский сформулировал правило для определения направления вектора $\vec{a}_c$: вектор $\vec{v}_r$ проектируется на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$, полученная проекция поворачивается в этой плоскости на угол 90^0 в направлении, соответствующем направлению угловой скорости ω_e - получаем направление вектора ускорения Кориолиса (рис.14.4)

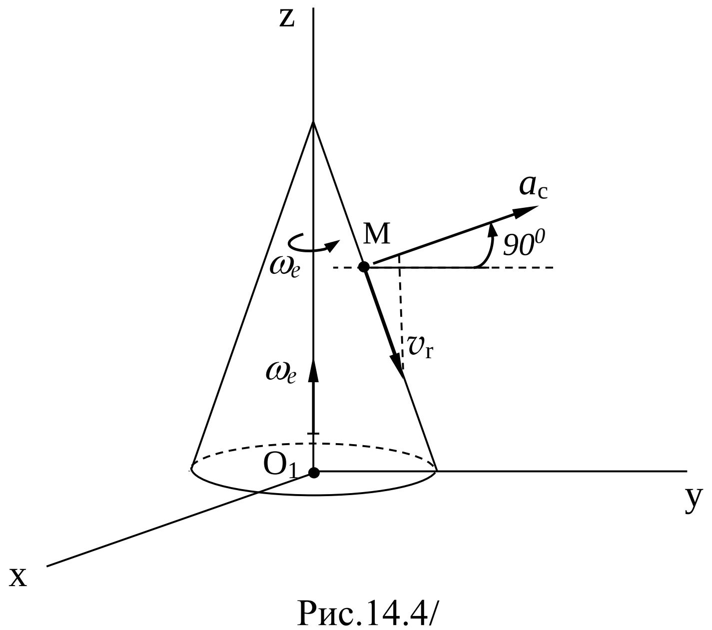


Рис.14.4/