ЛЕКЦИЯ 16

Механическая система. Центр масс механической системы и его координаты

Твердое тело. Тензор инерции. Виды моментов инерции тела.

Механическая система. .Центр масс механической системы.

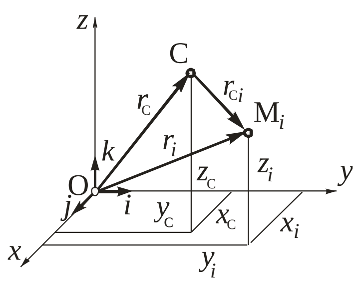
Механической системой называется совокупность материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения всех других точек этой совокупности.

Сумма масс точек механической системы называется массой системы: $m = \sum m_i$.

Состав точек, входящих в механическую систему, зависит от решаемой задачи: одни и те же точки могут быть включенными в механическую систему, либо в нее входить не будут. Если движение точек механической системы не ограничено связями, то такая механическая система называется *свободной*. Например, Солнечная система, планеты которой, часто рассматривающиеся как материальные точки, свободно движутся по своим орбитам. Если же на точки механической системы наложены связи, то система называется *несвободной*. Примерами несвободных механических систем являются различные механизмы, агрегаты и машины, у которых движение отдельных точек или тел ограничено связями.

Центром масс механической системы называется воображаемая точка *C* (рис. 2.1), для которой сумма произведений масс всех материальных точек системы на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю:

$$\sum m_i \vec{r}_{Ci} = 0.$$



В матричной форме:

$$\sum m_i \hat{\mathbf{r}}_{Ci} = \sum m_i \hat{\mathbf{r}}_{Ci}^T = 0,$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{Ci} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{Ci} & y_{Ci} \\ z_{Ci} & 0 & -x_{Ci} \\ -y_{Ci} & x_{Ci} & 0 \end{bmatrix}$ – матрица места i-той точки по отношению к центру масс C, T – индекс транспонирования.

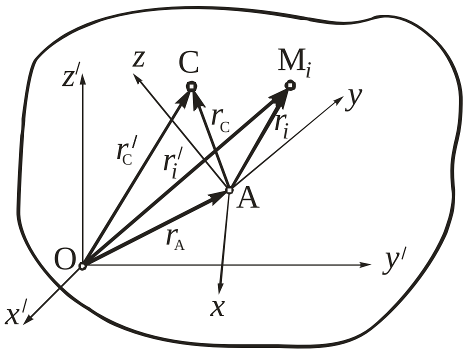
Так как $\vec{r}_{Ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_C$, то, подставляя в , получаем: $\sum m_i \vec{r}_{Ci} = 0$.

Таким образом, положение центра масс механической системы определяется формулой[1] $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$.

Спроецировав векторное выражение на оси координат, получим формулы для вычисления координат центра масс механической системы:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m};\; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m};\; z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Нетрудно доказать, что положение центра масс в теле не зависит от выбора системы координат. Рассмотрим две системы координат: одну − $Axyz$ − жестко свяжем с телом, а вторую − $Ox'y'z'$ − выберем произвольно (рис. 2.2).



Проведем радиус-векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_i'$, фиксирующие положение i-той точки тела в выбранных системах координат, и отметим положение центра масс C тела. Подставляя в соотношение $\vec{r}_i = \vec{r}_i' - \vec{r}_A$, окончательно получаем:

---

[1] Центр масс является частным случаем общего понятия – центра Н приложенных векторов (центра Гамильтона), радиус-вектор $\vec{r}_H$ которого определяется формулой:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_O + \frac{\vec{R}^* \times \vec{M}_O + V_O^* \vec{R}^*}{\left(R^*\right)^2},$$

где $\vec{r}_O$ – радиус-вектор центра приведения О; $\vec{R}^*$, $\vec{M}_O$, V_O^* – главный вектор, главный момент и главный вириал системы векторов относительно центра приведения О.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i\,'}{m} - \frac{\sum m_i \vec{r}_A}{m} = \vec{r}_C\,' - \vec{r}_A = \vec{r}_C .$$

Твердое тело. Тензор инерции. Виды моментов инерции тела.

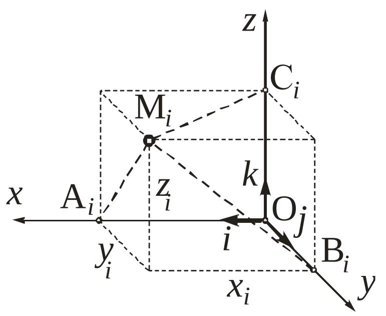
Твердым телом называется совокупность материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

Как известно, инерционные свойства тела при поступательном движении полностью определяются его массой m. При исследовании других видов движения тела необходимо учитывать, так называемую, геометрию масс, то есть закон распределения масс точек тела в пространстве. Мерой инертности тела, кроме его массы, является *тензор инерции* − симметричная матрица размерности 3×3, компонентами которой являются осевые J_x, J_y, J_z и центробежные $J_{xy}= J_{yx}$, $J_{xz}= J_{zx}$, $J_{yz}= J_{zy}$ моменты инерции:

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}.$$

Моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, численно равная сумме произведений масс точек тела на квадраты их расстояний до этой оси.

Моменты инерции тела относительно координатных осей вычисляются по формулам:



$$J_x = \sum m_i \cdot (M_i A_i)^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2);$$

$$J_y = \sum m_i \cdot (M_i B_i)^2 = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2);$$

$$J_z = \sum m_i \cdot (M_i C_i)^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

где m_i, x_i, y_i, z_i – масса и декартовы координаты i-той точки.

Из формул (2.6) следует, что момент инерции твердого тела относительно оси всегда положителен и не равен нулю.

Иногда удобно представить момент инерции твердого тела относительно оси ν как произведение массы m тела на квадрат некоторой величины i_ν, называемой *радиусом инерции* тела относительно этой оси:

$$J_\nu = m i_\nu^2.$$

Радиус инерции тела можно рассматривать как расстояние от оси ν, на котором нужно поместить материальную точку массы m, чтобы момент инерции этой точки относительно оси ν был равен моменту инерции тела относительно этой оси.

Элементы тензора инерции, расположенные вне главной диагонали, называются *центробежными моментами инерции*:

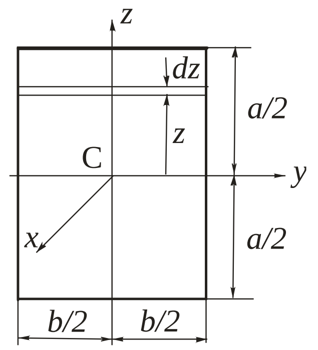
$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i\ ; \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i\ ; \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i\ .$$

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными, либо равными нулю.

Осевые и центробежные моменты инерции тела зависят от выбора системы координат, относительно которой они определяются, и изменяются при изменении распределения масс точек, составляющих данное тело.

Определение моментов инерции некоторых однородных тел

Момент инерции однородной тонкой прямоугольной пластины. Найдем моменты инерции однородной тонкой прямоугольной пластины массы m относительно ее осей симметрии. Длины сторон пластины равны a и b, соответственно



В первую очередь определим момент инерции пластины относительно оси *Cy*. Для этого выделим элементарную массу в виде полосы шириной *dz*, расположенной на расстоянии *z* от оси *y*. Тогда

$$dm=\delta dS=\delta b dz,$$

где δ – масса единицы площади пластины.

Элементарный момент инерции выделенной полосы относительно оси *Cy*

$$dJ_{Cy}=(x^2+z^2)dm=\delta b(x^2+z^2)dz.$$

Учитывая малую толщину пластины, пренебрежем координатой *x*, и проинтегрируем по *z*:

$$J_{Cy}=\delta b\int_{-0,5a}^{0,5a} z^2 dz=\frac{\delta ba^3}{12}.$$

Так как $\delta=m/ab$, окончательно имеем

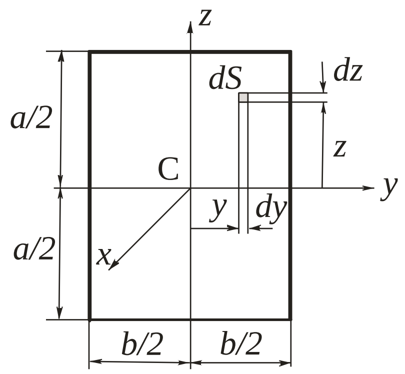
$$J_{Cy}=\frac{ma^2}{12}.$$

Очевидно, что после аналогичных рассуждений не трудно получить момент инерции относительно оси *Cz*:

$$J_{Cz}=\frac{mb^2}{12}.$$

Теперь найдем момент инерции пластины относительно оси *Cx*. Для этого выделим элемент пластины площадью $dS=dydz$ и массой $dm=\delta dydz$ Элементарный момент инерции относительно оси *Cx*:

$$dJ_{Cx}=(y^2+z^2)dm=\delta(y^2+z^2)dz.$$



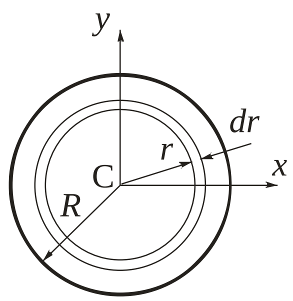
Интегрируем по площади пластины

$$J_{Cx} = \delta \int\limits_{-0,5a}^{0,5a} \int\limits_{-0,5b}^{0,5b} \left(y^2 + z^2\right) dydz = \frac{\delta ab}{12}\left(a^2 + b^2\right).$$

Подставляя $\delta = m/ab$, получаем

$$J_{Cx} = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right).$$

Момент инерции однородной круглой пластины. Определим моменты инерции однородной тонкой круглой пластины массы m и радиуса R относительно оси Cz, проходящей через центр пластины перпендикулярно ее плоскости



Мысленно выделим в пластине элементарное кольцо радиуса r и толщины dr. Масса этого кольца:

$$dm = 2\pi\delta r dr.$$

Элементарный момент инерции кольца относительно оси z:

$$dJ_{Cz} = r^2 dm = 2\pi\delta r^3 dr.$$

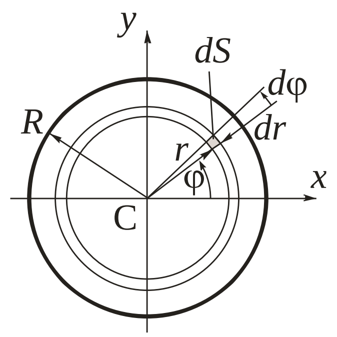
Момент инерции всей пластины относительно оси z:

$$J_{Cz} = 2\pi\delta \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi\delta R^4}{2}.$$

Принимая во внимание, что $\delta = m/\pi R^2$, окончательно находим

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

Определим теперь момент инерции пластины относительно оси *x/*



Воспользуемся полярной системой координат r, φ. Выделим элемент площади $dS=rd\varphi dr$ массы $dm=\delta dS=\delta rd\varphi dr$. Элементарный момент инерции площадки $dJ_{Cx}=dm(y^2+z^2)$ включает в себя координату z, которой в силу малой толщины пластины можно пренебречь. Так как

$y=r\sin\varphi$, то $dJ_{Cx}=r^2\sin^2\varphi dm=\delta r^3\sin^2\varphi\, d\varphi dr$.

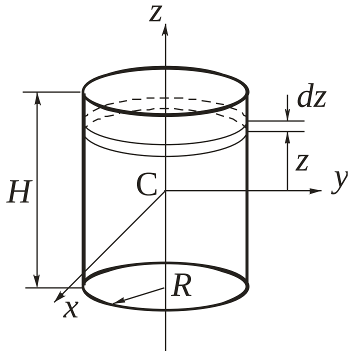
Тогда

$$J_{Cx} = \delta\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi\delta R^4}{4}.$$

Подставляя значение δ, окончательно получаем:

$$J_{Cx} = \frac{mR^2}{4}.$$

Момент инерции однородного прямого кругового цилиндра. Определим моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра массы m, радиуса R и высоты H относительно его осей симметрии).



Сначала найдем момент инерции цилиндра относительно оси Cz, проходящей через его центр масс C. При выводе формулы (3.4) мы в рассуждениях не использовали толщину пластины. Поэтому, рассматривая прямой круговой цилиндр как однородную круглую пластину, сразу получаем:

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

Для определения момента инерции цилиндра относительно оси Cx мысленно рассечем цилиндр двумя сечениями, перпендикулярными оси Cz и расположенными на расстояниях z и $z+dz$ от плоскости Cxy, соответственно. Применяя теорему Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции элементарной пластинки относительно оси Cx:

$$dJ_{Cx}= dmR^2/4+dmz^2,$$

где $dm=\rho dV=\rho\pi R^2dz$ – масса элементарной пластинки; ρ – плотность цилиндра /

Интегрируя по высоте цилиндра, получим

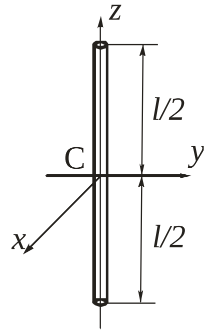
$$J_{Cx} = \pi\rho\int_{-0,5H}^{0,5H}\left(\frac{R^4}{4}+R^2z^2\right)dz = \pi\rho\left(\frac{R^4}{4}H+\frac{R^2H^3}{12}\right).$$

После подстановки в это выражение соотношения $m=\rho\pi R^2H$ имеем

$$J_{Cx} = m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right).$$

Очевидно, что $J_{Cx}=J_{Cy}$.

Момент инерции однородного того стержня. Определим момент инерции однородного тонкого стержня массы m и длины l относительно осей Cx и Cy, перпендикулярных стержню .



Эти моменты инерции найдем, положив в формуле (5.7) $R=0$, а $H=l$:

$$J_{Cx}=J_{Cy}=ml^2/12.$$