ЛЕКЦИЯ 1

Динамика как раздел теоретической механики. Основные законы классической механики. Основное уравнение динамики.. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественной форме. Механическая система. .Центр масс механической системы.

Динамика как раздел теоретической механики. Основные законы классической механики.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел с учетом их масс и приложенных к ним сил.

Простейшим материальным объектом является материальная точка. Это модель материального тела любой формы, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Более сложные материальные объекты – механические системы и твердые тела – рассматриваются состоящими из материальных точек.

В основе динамики лежат некоторые положения, сформулированные И.Ньютоном и названные им аксиомами или законами движения.

1. *Закон инерции*. Изолированное тело, или тело, к которому приложены взаимно уравновешивающиеся силы, относительно неподвижной системы отсчета, называемой инерциальной, движется по инерции или находится в состоянии покоя.

Движение по инерции: равномерное прямолинейное движение материальной точки, равномерное поступательное (прямолинейное движение твердого тела. Равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси, обладающей особым свойством (главная центральная ось инерции тела), равномерное плоское движение тела, когда полюс движется равномерно прямолинейно и вращение вокруг главной центральной оси инерции тела, проходящей через полюс, также равномерное.

Мерой инертности материальной точки и тела при поступательном движении является его масса m. Чем больше масса, тем труднее изменить скорость тела, тем оно более инертно. Предполагается, что при механических взаимодействиях соблюдается закон сохранения масс: сумма масс тел до их механического взаимодействия равна сумме масс тел после взаимодействия.

2. *Закон пропорциональности силы и ускорения*. Сила $\vec{P}$, приложенная к материальной точке, сообщает этой точке ускорение $\vec{a}$, которое в инерциальной системе отсчета, пропорционально модулю силы и направлено по вектору силы.

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} \text{ или } m\vec{a} = \vec{P}. \tag{1.1}$$

Здесь: m масса тела.

Системы отсчета, по отношению к которым выполняются первый и второй законы, называются *инерциальными* системами отсчета. Во многих задачах роль такой системы может играть система отсчета, связанная с Землей.

3. *Закон равенства действия и противодействия.* При взаимодействии двух тел силы взаимодействия равны по модулю, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Согласно этому закону силы действия и противодействия связаны соотношением (рис. 1.1): $\vec{P}_{12} = -\vec{P}_{21}$.

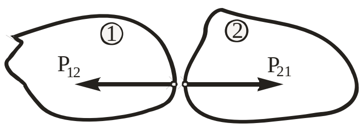

Рис. 1.1

Силы $\vec{P}_{12}$ и $\vec{P}_{21}$ никогда не уравновешиваются, так как приложены к разным телам.

4. *Закон независимости действия сил.* Ускорение, с которым движется материальная точка, находящаяся под действием некоторой системы сил, равно геометрической сумме ускорений, с которыми она двигалась бы под действием каждой из сил системы в отдельности.

Из этого закона следует, что силу $\vec{P}$ в правой части выражения (1.1) можно рассматривать как равнодействующую некоторой системы сил: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$.

Подставляя это соотношение в (1.1), получаем:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i . \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется *основным уравнением динамики*.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах. Две основные задачи динамики точки.

Рассмотрим материальную точку M массы m, которая движется с ускорением $\vec{a}$ по отношению к некоторой неподвижной системе координат Oxyz (рис. 1.2) под действием заданной системы сил $\vec{P}_i$ (i=1,…, n).

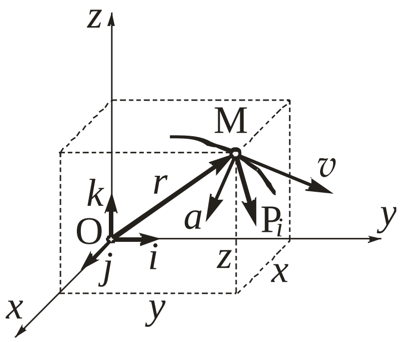

Рис. 1.2

Запишем для этой точки основное уравнение динамики (1.2) и спроецируем его на оси x, y и z. Для этого умножим скалярно обе части равенства (1.2) поочередно на орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\begin{cases} m\vec{a} \cdot \vec{i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{i} \\ m\vec{a} \cdot \vec{j} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{j} . \\ m\vec{a} \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{k} \end{cases} \qquad (1.3)$$

Из кинематики известно, что проекции ускорения на оси координат $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = \ddot{x}$; $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = \ddot{y}$; $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = \ddot{z}$. Скалярные произведения $\vec{P}_i \cdot \vec{i} = X_i$,

$\vec{P}_i \cdot \vec{j} = Y_i$, $\vec{P}_i \cdot \vec{k} = Z_i$ представляют собой проекции *i*-той силы на оси координат. Подставляя эти соотношения в (1.3), получаем дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \\ m\ddot{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \\ m\ddot{z} = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \end{cases} . \qquad (1.4)$$

Если точка движется вдоль плоской кривой, для описания ее движения достаточно двух, а по прямой – одного уравнения.

Отметим, что уравнения (1.4) справедливы до тех пор, пока на точку действуют силы, которые вошли в правые части этих уравнений.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах (1.4) позволяют решать две основные задачи динамики точки.

Первая (прямая) задача. Зная массу *m* точки и ее уравнения движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, требуется найти модуль и направление равнодействующей $\vec{R}$ сил, приложенных к точке.

В такой постановке задача решается очень легко. Достаточно найти вторые производные от координат *x*, *y* и *z*, умножить их на массу *m* точки и получить проекции равнодействующей на оси координат: $R_x = m\ddot{x}$, $R_y = m\ddot{y}$, $R_z = m\ddot{z}$.

Вектор силы *R* $\vec{R} = \vec{i}\, m\ddot{x} + \vec{j} m\ddot{y} + \vec{k} m\ddot{z}$.

Модуль равнодействующей $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Направление равнодействующей $\vec{R}$ определяется направляющими косинусами: $\cos(\vec{R},\vec{i}\,) = R_x / R$, $\cos(\vec{R},\vec{j}\,) = R_y / R$, $\cos(\vec{R},\vec{k}) = R_z / R$.

Заметим, что первую задачу динамики точки можно трактовать как задачу синтеза силы $\vec{P} = \vec{P}(t)$, обеспечивающей заданное программное движение. Из решения задачи следует, что мы не можем представить себе структуру сил, действующих на точку.

Действительно, вектор силы $\vec{R}$ может быть записан разными способами. Предположим, что точка массы *m* движется согласно уравнениям $x = A\sin kt$, $y = A\cos kt$. В этом случае равнодействующая $\vec{R}$ принимает вид:

$$\vec{R} = -\vec{i}\, mk^2 \sin kt - \vec{j} mk^2 \cos kt .$$

Это выражение с учетом уравнений движения можно переписать, по крайней мере, одним из следующих способов:

$$\vec{R} = -\vec{i}\, mk^2 x - \vec{j} mk^2 y; \qquad (1.5)$$

$$\vec{R} = \vec{i}\, mk\dot{y} - \vec{j} mk\dot{x}. \qquad (1.6)$$

Очевидно, что ни одному из этих представлений нельзя отдать предпочтение и, следовательно, нельзя сделать выводы о физической природе действующей силы. Действительно, в случае (1.5) сила зависит от смещения точки (позиционная сила), а в случае (1.6) – от ее скорости (скоростная сила).

Рассмотрим некоторые разновидности первой задачи динамики точки.

1. Зная массу *m* точки, уравнения ее движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а также начальные условия x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ и $\dot{z}_0$ установить структуру действующей силы $\vec{P} = \vec{P}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

Процедуру решения этой задачи поясним на примере прямолинейного движения точки. Пусть материальная точка движется вдоль оси *x* согласно уравнению $x = F_1(t, x_0, \dot{x}_0)$. Тогда ее скорость $\dot{x} = F_2(t, x_0, \dot{x}_0)$. Выразим отсюда x_0 и $\dot{x}_0$: $x_0 = f_1(t, x, \dot{x})$, $\dot{x}_0 = f_2(t, x, \dot{x})$. Подставляя x_0 и $\dot{x}_0$ в выражение для ускорения точки $\ddot{x} = F_3(t, x_0, \dot{x}_0)$, получаем

$$X = m\ddot{x} = mF_3(t, x_0, \dot{x}_0) = mF_3(t, f_1, f_2).$$

Вторая (обратная) задача. Зная массу *m* точки, силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n$, действующие на нее, и начальные условия x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, найти уравнения движения точки. Решение второй задачи динамики точки в общем случае сводится к решению задачи Коши об интегрировании системы трех дифференциальных уравнений второго порядка при заданных начальных условиях.

В процессе интегрирования дифференциальных уравнений возникают постоянные интегрирования, которые обычно определяются из начальных условий (при интегрировании трех дифференциальных уравнений второго порядка возникает шесть постоянных интегрирования C_1- C_6, для определения которых используются шесть начальных условий x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ и $\dot{z}_0$). После подстановки найденных значений постоянных интегрирования в общее решение системы дифференциальных уравнений движения, получают уравнения движения точки в виде:

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{cases}$$

Эти уравнения показывают, что движение материальной точки зависит не только от сил, действующих на нее, но и от начальных условий.

Механическая система. .Центр масс механической системы. Твердое тело. Тензор инерции. Виды моментов инерции тела.

Механическая система. Центр масс механической системы и его координаты

Механической системой называется совокупность материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения всех других точек этой совокупности.

Сумма масс точек механической системы называется массой системы: $m = \sum m_i$.

Состав точек, входящих в механическую систему, зависит от решаемой задачи: одни и те же точки могут быть включенными в механическую систему, либо в нее входить не будут.

Если движение точек механической системы не ограничено связями, то такая механическая система называется *свободной*. Например, Солнечная система, планеты которой, часто рассматривающиеся как материальные точки, свободно движутся по своим орбитам. Если же на точки механической системы наложены связи, то система называется *несвободной*. Примерами несвободных механических систем являются различные механизмы, агрегаты и машины, у которых движение отдельных точек или тел ограничено связями. *Центром масс механической системы* называется воображаемая точка C (рис. 2.1), для которой сумма произведений масс всех материальных точек системы на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю:

$$\sum m_i \vec{r}_{Ci} = 0. \qquad (2.1)$$

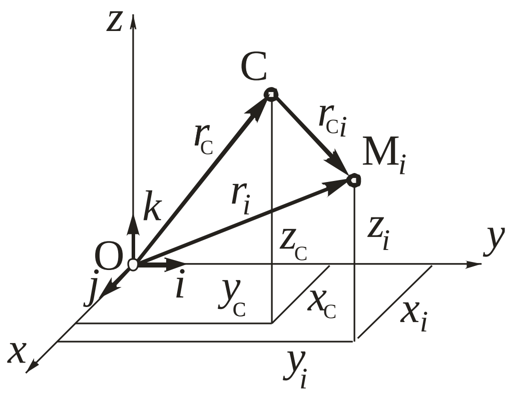

Рис. 2.1

В матричной форме:

$$\sum m_i \hat{\mathbf{r}}_{Ci} = \sum m_i \hat{\mathbf{r}}_{Ci}^T = 0, \qquad (2.2)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{Ci} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{Ci} & y_{Ci} \\ z_{Ci} & 0 & -x_{Ci} \\ -y_{Ci} & x_{Ci} & 0 \end{bmatrix}$ – матрица места i-той точки по отношению к центру масс C, T – индекс транспонирования.

Так как

$$\vec{r}_{Ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_C,$$

то, подставляя в (2.1), получаем:

$$\sum m_i \vec{r}_{Ci} = 0.$$

Таким образом, положение центра масс механической системы определяется формулой[1]

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}. \tag{2.3}$$

Спроецировав векторное выражение (2.3) на оси координат, получим формулы для вычисления координат центра масс механической системы:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m};\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m};\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \tag{2.4}$$

Нетрудно доказать, что положение центра масс в теле не зависит от выбора системы координат. Рассмотрим две системы координат: одну − $Axyz$ − жестко свяжем с телом, а вторую − $Ox'y'z'$ − выберем произвольно (рис. 2.2).

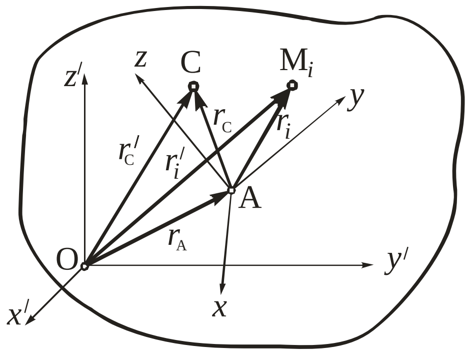

Рис. 2.2

Проведем радиус-векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_i\,'$, фиксирующие положение i-той точки тела в выбранных системах координат, и отметим положение центра масс C тела. Подставляя в (3.3) соотношение $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' - \vec{r}_A$, окончательно получаем:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i\,'}{m} - \frac{\sum m_i \vec{r}_A}{m} = \vec{r}_C\,' - \vec{r}_A = \vec{r}_C.$$

---

[1] Центр масс является частным случаем общего понятия – центра Н приложенных векторов (центра Гамильтона), радиус-вектор $\vec{r}_H$ которого определяется формулой:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_O + \frac{\vec{R}^* \times \vec{M}_O + V_O^* \vec{R}^*}{\left(R^*\right)^2},$$

где $\vec{r}_O$ – радиус-вектор центра приведения О; $\vec{R}^*$, $\vec{M}_O$, V_O^* – главный вектор, главный момент и главный вириал системы векторов относительно центра приведения О.

ЛЕКЦИЯ 3

Классификация сил, действующих на точки механической системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс. Количество движения материальной точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения материальной точки. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы.

Классификация сил, действующих на точки механической системы

Все силы, действующие на точки несвободной механической системы, можно условно разделить на *задаваемые (активные) силы и реакции связей* по одному признаку и на *внешние и внутренние силы* – по другому.

Внешними называются силы, действующие на материальные точки рассматриваемой механической системы со стороны точек, которые в эту систему не входят. *Внутренними* называются силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы. В зависимости от решаемой задачи одни и те же силы могут быть как внутренними, так и внешними. Например, сила притяжения Земли к Солнцу является внешней для Земли и внутренней для Солнечной системы.

Внешние силы условимся обозначать $\vec{P}_i^E$, а внутренние − $\vec{P}_i^J$. Любая сила, действующая на точки механической системы, является либо внешней, либо внутренней и в то же самое время она является реакцией связи или задаваемой силой.

Рассмотрим некоторые простейшие свойства внутренних сил:

1. *Главный вектор всех внутренних сил, действующих на точки механической системы, всегда равен нулю*.

Действительно, по закону равенства действия и противодействия каждой внутренней силе $\vec{P}_i^J$ соответствует другая внутренняя сила $\vec{P}_{i+1}^J$, равная ей по модулю и противоположная по направлению: $\vec{P}_i^J = -\vec{P}_{i+1}^J$ (рис. 4.1).

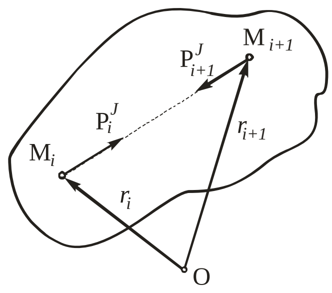

Рис. 4.1

Вследствие этого главный вектор внутренних сил

$$\vec{R}^J = \sum \vec{P}_i^J = 0. \tag{4.1}$$

Отсюда

$$\sum X_i^J = 0; \;\; \sum Y_i^J = 0; \;\; \sum Z_i^J = 0. \tag{4.2}$$

2. *Главный момент всех внутренних сил, действующих на точки механической системы, относительно произвольного центра всегда равен нулю*.

Выберем две точки M_i и M_{i+1} механической системы, к которым приложены силы $\vec{P}_i^J$ и $\vec{P}_{i+1}^J$, и найдем сумму моментов этих сил относительно точки O:

$$\vec{r}_i \times \vec{P}_i^J + \vec{r}_{i+1} \times \vec{P}_{i+1}^J = \vec{r}_i \times \vec{P}_i^J - \vec{r}_{i+1} \times \vec{P}_i^J = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{i+1}\right) \times \vec{P}_i^J = \overrightarrow{M_{i+1}M_i} \times \vec{P}_i^J = 0.$$

Так как главный вектор всех внутренних сил относительно точки O равен геометрической сумме таких выражений, то получаем:

$$\vec{M}_O^J = \sum \vec{M}_{Oi}^J = 0. \tag{4.3}$$

Соответственно, в проекциях на координатные оси:

$$\sum M_{Oxi}^J = 0; \;\; \sum M_{Oyi}^J = 0; \;\; \sum M_{Ozi}^J = 0. \tag{4.4}$$

Несмотря на то, что соотношения (4.2) и (4.4) выглядят как уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных в пространстве, внутренние силы никогда не уравновешиваются, так как приложены к разным точкам системы и могут вызвать их перемещение.

Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Теорема о движении центра масс

Рассмотрим i-тую точку M_i механической системы, имеющую массу m_i. Пусть к этой точке приложены внешние и внутренние силы, равнодействующие которых обозначим $\vec{P}_i^E$ и $\vec{P}_i^J$, соответственно (рис. 4.2).

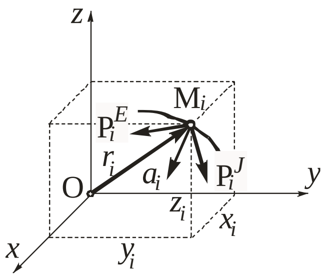

Рис. 4.2

Запишем основное уравнение динамики для каждой из n точек системы:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{P}_i^E + \vec{P}_i^J; \quad (i=1,...,n). \tag{4.5}$$

Проецируя это векторное равенство на оси координат, получим *дифференциальные уравнения движения механической системы*:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i^E + X_i^J; \;\; m_i\ddot{y}_i = Y_i^E + Y_i^J; \;\; m_i\ddot{z}_i = Z_i^E + Z_i^J. \tag{4.6}$$

В большинстве задач внутренние силы, входящие в дифференциальные уравнения (4.6), являются неизвестными, поэтому эта система уравнений может быть проинтегрирована лишь в исключительно редких случаях. Задача интегрирования системы (4.6) становится еще сложнее, если механическая система является несвободной, поскольку силы реакций связей заранее неизвестны. Иногда из дифференциальных уравнений движения системы удается получить первые интегралы, то есть соотношения, не содержащие вторых производных от координат по времени. Конечно, первые интегралы полностью не описывают движение всех точек механической системы, но иногда позволяют сделать важные выводы о движении системы в целом.

Просуммируем все n уравнений (4.5) по числу точек системы (рис. 4.3):

$$\sum m_i\vec{a}_i = \sum\vec{P}_i^E + \sum\vec{P}_i^J \;.$$

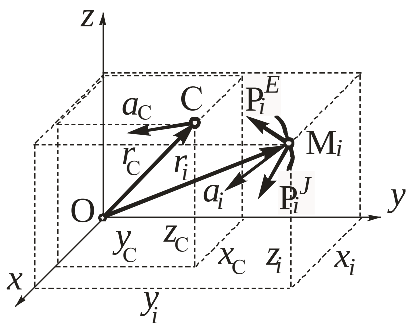

Рис. 4.3

Преобразуем левую часть этого равенства с учетом (6.3):

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum m \vec{r}_C = m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = m\vec{a}_C, \quad (4.7)$$

где m – масса системы.

В соответствии с (4.1) геометрическая сумма внутренних сил равна нулю, поэтому окончательно получаем:

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{P}_i^E \ . \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) выражает суть теоремы о движении центра масс механической системы: *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Проецируя векторное равенство (4.8) на оси координат, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E; \quad m\ddot{z}_C = \sum Z_i^E, \quad (4.9)$$

где $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ – проекции ускорения центра масс на оси координат; X_i^E, Y_i^E, Z_i^E – проекции i-той внешней силы $\vec{P}_i^E$ на эти оси.

Уравнения (4.8) и (4.9) показывают, что внутренние силы не оказывают непосредственного воздействия на движение центра масс механической системы. Иными словами, внутренние силы не могут сообщить ускорение центру масс системы. Однако, внутренние силы могут явиться причиной возникновения внешних сил, приложенных к точкам системы. Например, внутренние силы, приводящие во вращение гребной вал моторной лодки, вызывают появление внешней силы, приложенной к гребному винту.

Напряжение мышц спортсмена вызывает силу, с которой он отталкивается от земли во время прыжка в высоту.

Следствия из теоремы.

1. *Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, остается равной нулю, то центр масс механической системы либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно*.

Если $\sum \vec{P}_i^E = 0$, то из уравнения (4.8) следует, что $\vec{a}_C = 0$, а, значит, $\vec{v}_C = const$. Если при этом в момент времени, когда геометрическая сумма внешних сил стала равна нулю, центр масс покоился, то он и будет находиться в покое. Если же в этот момент центр масс двигался с некоторой скоростью, он и будет продолжать двигаться с этой скоростью.

2. *Если алгебраическая сумма проекций внешних сил, действующих на систему, на некоторую ось остается равной нулю, то координата центра масс механической системы, соответствующая этой оси не изменяется, или проекция скорости центра масс на эту ось постоянна.*

Например, если $\sum X_i^E = 0$, то из первого уравнения (4.9) имеем $\ddot{x}_C = 0$, а, следовательно, $\dot{x}_C = const$. Если при этом в начальный момент времени $\dot{x}_{C0} = 0$, то $\dot{x}_C = 0$, а $x_C = const$ (координата центра масс остается неизменной). В случае, когда $\dot{x}_{C0} \neq 0$, проекция центра масс на ось *x* движется равномерно.

Приведем некоторые примеры, поясняющие теорему о движении центра масс и ее следствия.

При движении человека по шероховатой поверхности его центр масс перемещается под действием силы сцепления обуви человека с опорной поверхностью.

Все самоходные колесные экипажи приходят в движение благодаря силам сцепления их колес с дорогой.

Действие пары сил на свободное твердое тело не может вызвать ускоренного движения его центра масс.

Движение человека вдоль лодки вызывает перемещение лодки в обратную сторону.

Количество движения материальной точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\vec{v}$, *имеющий модуль, равный произведению массы точки на модуль ее скорости, и направление, совпадающее с направлением вектора скорости точки* (рис. 5.1).

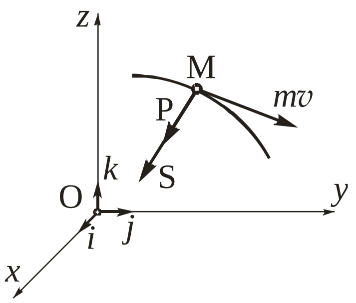

Рис. 5.1

Количество движения является одной из двух мер движения точки (введено в механику Р. Декартом). Одной из двух мер действия силы на точку является импульс силы.

Импульсом постоянной силы $\vec{P}$ *называется вектор* $\vec{S}$, *имеющий модуль, равный произведению модуля силы на время* τ *ее действия, и направление, совпадающее с направлением вектора силы* (рис. 5.1):

$$\vec{S} = \vec{P}\tau .$$

Проекции импульса постоянной силы на оси координат определяются по формулам:

$$S_x = \vec{S}\cdot\vec{i} = \vec{P}\cdot\vec{i}\,\tau = X\tau;\quad S_y = \vec{S}\cdot\vec{j} = \vec{P}\cdot\vec{j}\,\tau = Y\tau;\quad S_z = \vec{S}\cdot\vec{k} = \vec{P}\cdot\vec{k}\,\tau = Z\tau ,$$

где X, Y, Z − проекции силы $\vec{P}$ на оси координат.

Импульсом переменной силы называется векторный интеграл от элементарного импульса силы:

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{P}(t)dt . \qquad (5.1)$$

Модуль и направления импульса переменной силы можно найти, определив проекции этого импульса на оси координат:

$$S_x = \vec{S} \cdot \vec{i} = \int_0^\tau \vec{P}(t) \cdot \vec{i}\, dt = \int_0^\tau X(t)dt; \quad S_y = \vec{S} \cdot \vec{j} = \int_0^\tau \vec{P}(t) \cdot \vec{j} dt = \int_0^\tau Y(t)dt;$$

$$S_z = \vec{S} \cdot \vec{k} = \int_0^\tau \vec{P}(t) \cdot \vec{k} dt = \int_0^\tau Z(t)dt,$$

где *X(t), Y(t), Z(t)* − проекции переменной силы $\vec{P}(t)$ на оси координат.

Модуль импульса переменной силы равен

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

а его направление определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{S},\vec{i}) = S_x / S; \quad \cos(\vec{S},\vec{j}) = S_y / S; \quad \cos(\vec{S},\vec{k}) = S_z / S.$$

Пользуясь известным свойством аддитивности интеграла, можно легко доказать справедливость утверждений:

1. *Импульс равнодействующей нескольких сил за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов составляющих сил за тот же промежуток времени*:

$$\vec{S} = \int_0^\tau \vec{R} dt = \int_0^\tau \sum \vec{P}_i dt = \sum \int_0^\tau \vec{P}_i dt = \sum \vec{S}_i = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \ldots + \vec{S}_n.$$

2. *Проекция импульса равнодействующей нескольких сил на некоторую ось равна алгебраической сумме проекций импульсов составляющих сил на ту же ось*:

$$S_x = \int_0^\tau R_x dt = \int_0^\tau \sum X_i dt = \sum \int_0^\tau X_i dt = S_{x1} + S_{x2} + \ldots + S_{xn} = \sum S_{xi},$$

где S_{xi}, S_x – проекции импульсов *i*-той силы и равнодействующей на ось *x*, соответственно. Аналогично $S_y = \sum S_{y_i}$; $S_z = \sum S_{zi}$.

Докажем теорему об изменении количества движения материальной точки.

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \vec{P}$,

где $\vec{P}$ − равнодействующая сил, приложенных к материальной точке.

Считая массу m точки постоянной, преобразуем это уравнение следующим образом: $$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{P} = \sum \vec{P}_i .$$

Или

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{P}_i . \qquad (5.2)$$

Это уравнение отражает смысл теоремы об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, действующих на нее.*

Из уравнения (5.2) имеем: $$d(m\vec{v}) = \sum \vec{P}_i dt .$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получаем $\int\limits_{m\vec{v}_1}^{m\vec{v}_2} d(m\vec{v}) = \int\limits_0^{\tau} \sum \vec{P}_i dt = \sum \int\limits_0^{\tau} \vec{P}_i dt .$

В соответствии с (5.1) правая часть этого выражения представляет собой геометрическую сумму импульсов сил, приложенных к точке.

Тогда:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_i . \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме (теорему импульсов): *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, действующих на нее, за тот же промежуток времени*.

Спроецировав (5.3) на оси координат, получаем три уравнения, которые применяются при решении задач:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix} ; \quad mv_{2y} - mv_{1y} = \sum S_{iy} ; \quad mv_{2z} - mv_{1z} = \sum S_{iz} .$$

Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы

Количеством движения механической системы называется вектор $\vec{K}$, *равный геометрической сумме количеств движения всех точек, входящих в систему*:

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i .$$

Это выражение можно преобразовать:

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} m\vec{r}_C = m\vec{v}_C ;$$

$$\vec{K} = m\vec{v}_C . \qquad (5.4)$$

Здесь использовано соотношение $m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$, вытекающее из выражения (4.3).

Вектор количества механической системы имеет направление скорости ее центра масс и модуль, равный произведению массы системы на модуль скорости этого центра.

Проекции количества движения механической системы на оси координат определяются по формулам: $K_x = mv_{Cx}$; $K_y = mv_{Cy}$; $K_z = mv_{Cz}$.

Продифференцировав (7.4) по времени, получаем: $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = m\vec{a}_C$.

Согласно теореме о движении центра масс системы (6.8) $m\vec{a}_C = \sum \vec{P}_i^E$.

В результате $$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{P}_i^E .$$

(5.5)

Это уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме внешних сил, приложенных к точкам этой системы*, *то есть главному вектору внешних сил*.

Если спроецировать (5.5) на оси координат, получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^E ; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^E ; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum Z_i^E . \qquad (5.6)$$

Формулы (5.6) показывают, что *производная по времени от проекции количества движения механической системы на некоторую ось равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных к точкам этой системы, на эту же ось.*

Следствия из теоремы.

1. *Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, в течение некоторого промежутка времени равна нулю, то количество движения системы в течение этого промежутка остается постоянным.*

Из уравнения (5.5) следует, что если $\sum \vec{P}_i^E = 0$, то $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = 0$, и, следовательно, $\vec{K} = m\vec{v}_C = const$.

2. *Если алгебраическая сумма проекций внешних сил, действующих на систему, на некоторую ось за некоторый промежуток времени остается равной нулю, то проекция количества движения системы на эту ось не изменяется.*

Если $\sum X_i^E = 0$, то из первого уравнения (5.6) имеем $\dfrac{dK_x}{dt} = 0$, а, следовательно, $K_x = mv_{Cx} = const$.

Приведенные следствия выражают собой *закон сохранения количества движения механической системы*.

Умножим обе части уравнения (5.5) на dt и проинтегрируем (левую часть в пределах от $\vec{K}_1$ до $\vec{K}_2$, а правую − от 0 до τ):

$$\int_{\vec{K}_1}^{\vec{K}_2} d\vec{K} = \int_0^{\tau} \sum \vec{P}_i^E dt = \sum \int_0^{\tau} \vec{P}_i^E dt = \sum \vec{S}_i^E ,$$

где $\sum \vec{S}_i^E$ − геометрическая сумма импульсов внешних сил, действующих на систему.

Отсюда
$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^E . \qquad (5.7)$$

Это уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в интегральной (конечной) форме: *изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, действующих на нее, за тот же промежуток времени*. Эта теорема называется *теоремой импульсов*.

Векторному уравнению (5.7) соответствуют три скалярных уравнения в проекциях на оси координат:

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^{E}\,; \;\; K_{2y} - K_{1y} = \sum S_{iy}^{E}\,; \;\; K_{2z} - K_{1z} = \sum S_{iz}^{E}\,; \qquad (5.8)$$

Уравнения (5.8) показывают, что *изменение проекции количества движения механической системы на любую ось за некоторый промежуток времени равно алгебраической сумме проекций импульсов внешних сил, действующих на нее, на ту же ось за тот же промежуток времени*.

Отметим, что уравнения (5.5)-(5.8) не содержат внутренних сил. Это означает, что внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения механической системы. Приведенное обстоятельство оказывается важным при решении практических задач.