ЛЕКЦИЯ 2

Твердое тело. Тензор инерции. Виды моментов инерции тела. Определение моментов инерции некоторых однородных тел

Твердое тело. Тензор инерции. Виды моментов инерции тела.

Твердым телом называется совокупность материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

Как известно, инерционные свойства тела при поступательном движении полностью определяются его массой m. При исследовании других видов движения тела необходимо учитывать, так называемую, геометрию масс, то есть закон распределения масс точек тела в пространстве. Мерой инертности тела, кроме его массы, является *тензор инерции* − симметричная матрица размерности 3×3, компонентами которой являются осевые J_x, J_y, J_z и центробежные $J_{xy}= J_{yx}$, $J_{xz}= J_{zx}$, $J_{yz}= J_{zy}$ моменты инерции:

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, численно равная сумме произведений масс точек тела на квадраты их расстояний до этой оси.

Моменты инерции тела относительно координатных осей (рис. 2.3) вычисляются по формулам:

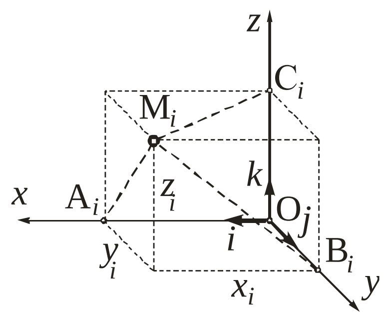

Рис. 2.3

$$J_x = \sum m_i \cdot (M_i A_i)^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2);$$

$$J_y = \sum m_i \cdot (M_i B_i)^2 = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad (2.6)$$

$$J_z = \sum m_i \cdot (M_i C_i)^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

где m_i, x_i, y_i, z_i – масса и декартовы координаты i-той точки.

Из формул (2.6) следует, что момент инерции твердого тела относительно оси всегда положителен и не равен нулю.

Иногда удобно представить момент инерции твердого тела относительно оси ν как произведение массы m тела на квадрат некоторой величины i_ν, называемой *радиусом инерции* тела относительно этой оси:

$$J_\nu = m i_\nu^2.$$

Радиус инерции тела можно рассматривать как расстояние от оси ν, на котором нужно поместить материальную точку массы m, чтобы момент инерции этой точки относительно оси ν был равен моменту инерции тела относительно этой оси.

Элементы тензора инерции, расположенные вне главной диагонали, называются *центробежными моментами инерции*:

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i; \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i; \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i.$$

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными, либо равными нулю.

Осевые и центробежные моменты инерции тела зависят от выбора системы координат, относительно которой они определяются, и изменяются при изменении распределения масс точек, составляющих данное тело.

Определение моментов инерции некоторых однородных тел

Момент инерции однородной тонкой прямоугольной пластины. Найдем моменты инерции однородной тонкой прямоугольной пластины массы m относительно ее осей симметрии. Длины сторон пластины равны a и b, соответственно (рис. 3.1).

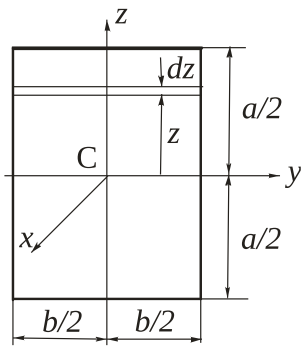

Рис. 3.1

В первую очередь определим момент инерции пластины относительно оси *Cy*. Для этого выделим элементарную массу в виде полосы шириной *dz*, расположенной на расстоянии *z* от оси *y*. Тогда

$$dm=\delta dS=\delta b dz,$$

где δ – масса единицы площади пластины.

Элементарный момент инерции выделенной полосы относительно оси *Cy*

$$dJ_{Cy}=(x^2+z^2)dm=\delta b(x^2+z^2)dz.$$

Учитывая малую толщину пластины, пренебрежем координатой *x*, и проинтегрируем по *z*:

$$J_{Cy}=\delta b\int_{-0,5a}^{0,5a} z^2 dz=\frac{\delta ba^3}{12}.$$

Так как $\delta=m/ab$, окончательно имеем

$$J_{Cy}=\frac{ma^2}{12}. \qquad (3.1)$$

Очевидно, что после аналогичных рассуждений не трудно получить момент инерции относительно оси *Cz*:

$$J_{Cz}=\frac{mb^2}{12}. \qquad (3.2)$$

Теперь найдем момент инерции пластины относительно оси *Cx*. Для этого выделим элемент пластины площадью $dS=dydz$ и массой $dm=\delta dydz$ (рис. 3.2).

Элементарный момент инерции относительно оси *Cx*:

$$dJ_{Cx}=(y^2+z^2)dm=\delta(y^2+z^2)dz.$$

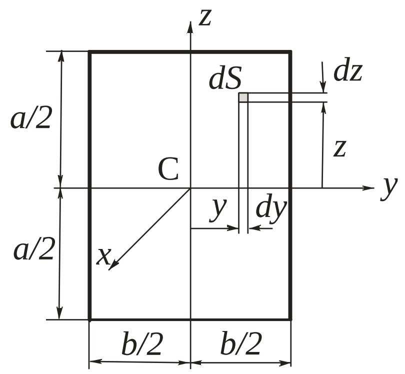

Рис. 3.2

Интегрируем по площади пластины

$$J_{Cx}=\delta\int_{-0,5a}^{0,5a}\int_{-0,5b}^{0,5b}\left(y^2+z^2\right)dydz=\frac{\delta ab}{12}\left(a^2+b^2\right).$$

Подставляя $\delta=m/ab$, получаем

$$J_{Cx}=\frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right). \quad (3.3)$$

Момент инерции однородной круглой пластины. Определим моменты инерции однородной тонкой круглой пластины массы m и радиуса R относительно оси Cz, проходящей через центр пластины перпендикулярно ее плоскости (рис. 3.3).

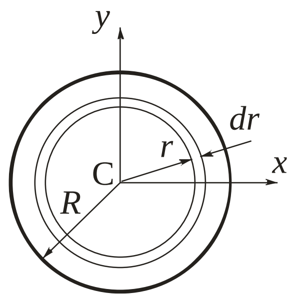

Рис. 3.3

Мысленно выделим в пластине элементарное кольцо радиуса r и толщины dr. Масса этого кольца:

$$dm=2\pi\delta rdr.$$

Элементарный момент инерции кольца относительно оси z:

$$dJ_{Cz}=r^2dm=2\pi\delta r^3dr.$$

Момент инерции всей пластины относительно оси z:

$$J_{Cz} = 2\pi\delta\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\delta R^4}{2}.$$

Принимая во внимание, что $\delta = m/\pi R^2$, окончательно находим

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.4}$$

Определим теперь момент инерции пластины относительно оси x (рис. 3.4).

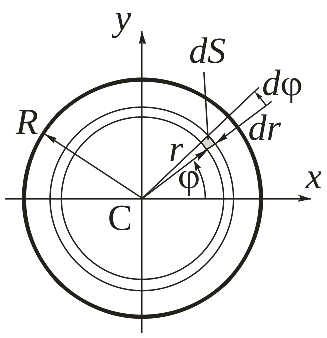

Рис. 3.4

Воспользуемся полярной системой координат r, φ. Выделим элемент площади $dS=rd\varphi dr$ массы $dm=\delta dS=\delta rd\varphi dr$. Элементарный момент инерции площадки $dJ_{Cx}=dm(y^2+z^2)$ включает в себя координату z, которой в силу малой толщины пластины можно пренебречь. Так как

$y=r\sin\varphi$, то

$$dJ_{Cx}=r^2\sin^2\varphi dm=\delta r^3\sin^2\varphi\, d\varphi dr.$$

Тогда

$$J_{Cx} = \delta\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi\delta R^4}{4}.$$

Подставляя значение δ, окончательно получаем:

$$J_{Cx} = \frac{mR^2}{4}. \tag{3.5}$$

Момент инерции однородного прямого кругового цилиндра. Определим моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра массы m, радиуса R и высоты H относительно его осей симметрии (рис. 3.5).

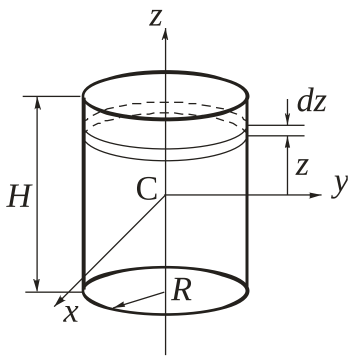

Рис. 3.5

Сначала найдем момент инерции цилиндра относительно оси Cz, проходящей через его центр масс C. При выводе формулы (3.4) мы в рассуждениях не использовали толщину пластины. Поэтому, рассматривая прямой круговой цилиндр как однородную круглую пластину, сразу получаем:

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.6}$$

Для определения момента инерции цилиндра относительно оси Cx мысленно рассечем цилиндр двумя сечениями, перпендикулярными оси Cz и расположенными на расстояниях z и $z+dz$ от плоскости Cxy, соответственно. Применяя теорему Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции элементарной пластинки относительно оси Cx:

$$dJ_{Cx} = dmR^2/4 + dmz^2,$$

где $dm=\rho dV=\rho\pi R^2 dz$ – масса элементарной пластинки; ρ – плотность цилиндра.

Интегрируя по высоте цилиндра, получим

$$J_{Cx} = \pi\rho\int_{-0,5H}^{0,5H}\left(\frac{R^4}{4} + R^2z^2\right)dz = \pi\rho\left(\frac{R^4}{4}H + \frac{R^2H^3}{12}\right).$$

После подстановки в это выражение соотношения $m=\rho\pi R^2 H$ имеем

$$J_{Cx} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right). \tag{3.7}$$

Очевидно, что $J_{Cx}=J_{Cy}$.

Момент инерции однородного тонкого стержня. Определим момент инерции однородного тонкого стержня массы *m* и длины *l* относительно осей *Cx* и *Cy*, перпендикулярных стержню (рис. 3.6).

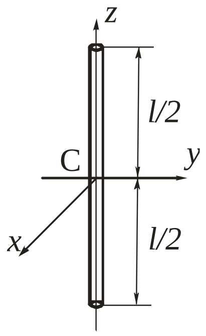

Рис. 3.6

Эти моменты инерции найдем, положив в формуле (5.7) $R=0$, а $H=l$:

$$J_{Cx}=J_{Cy}=ml^2/12. \tag{3.8}$$

ЛЕКЦИЯ 4

Момент количества движения материальной точки. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра. Теорема Резаля.

Момент количества движения материальной точки. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки

В статике были введены, а затем широко применялись понятия момента силы относительно центра и оси. Совершенно аналогично можно ввести понятия моментов относительно центра и оси другого вектора − количества движения материальной точки $m\vec{v}$.

Моментом количества движения материальной точки М относительно некоторого центра О называется вектор $\vec{l}_o$, *равный векторному произведению радиус-вектора* $\vec{r}$, *проведенного из центра О в точку М, на вектор количества движения* $m\vec{v}$ (рис. 6.1):

$$\vec{l}_o = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (6.1)$$

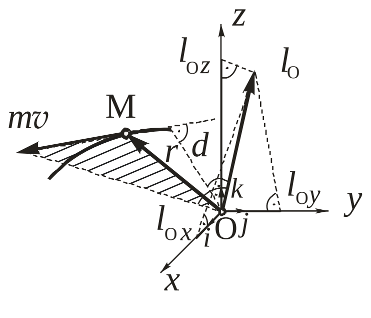

Рис. 6.1

Модуль вектора $\bar{l}_o$ равен произведению модуля вектора количества движения точки на его плечо *d* относительно центра *O*: $l_o = mvd$.

В матричной форме

$$\mathbf{l}_o = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{mv},$$

где $\mathbf{l}_O = \begin{bmatrix} l_{Ox} \\ l_{Oy} \\ l_{Oz} \end{bmatrix}$; $\hat{\mathbf{r}}$ − матрица места точки М; $\mathbf{mv} = \begin{bmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{l}_O = \begin{bmatrix} l_{Ox} \\ l_{Oy} \\ l_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(v_z y - v_y z) \\ m(v_x z - v_z x) \\ m(v_y x - v_x y) \end{bmatrix}, \qquad (6.2)$$

где x, y, z − координаты точки М; v_x, v_y, v_z, − проекции скорости этой точки на оси координат.

Момент количества движения материальной точки относительно некоторой оси равен проекции на эту ось момента количества движения точки относительно центра О, лежащего на этой оси:

$$l_{Ox} = \vec{l}_O \cdot \vec{i} = L_O \cos(\vec{l}_O, \vec{i}\,); \quad l_{Oy} = \vec{l}_O \cdot \vec{j} = l_O \cos(\vec{l}_O, \vec{j}\,); \; l_{Oz} = \vec{l}_O \cdot \vec{k} = l_O \cos(\vec{l}_O, \vec{k}\,).$$

Для того чтобы найти момент количества движения материальной точки l_{Oz} относительно некоторой оси z, нужно спроецировать вектор количества движения точки на плоскость Q, перпендикулярную этой оси, и умножить эту проекцию mv' на ее плечо d' относительно точки O пересечения оси z с плоскостью Q (рис. 6.2).

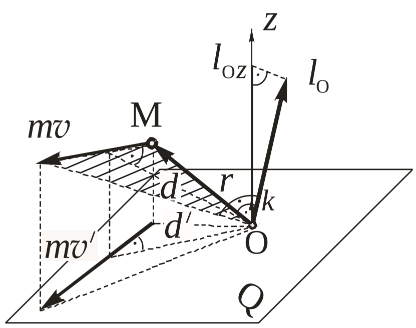

Рис. 6.2

Равенство (6.2) содержит формулы для определения моментов количества движения материальной точки относительно осей координат:

$$l_{Ox} = m(v_z y - v_y z); \;\; l_{Oy} = m(v_x z - v_z x); \;\; l_{Oz} = m(v_y x - v_x y).$$

Пусть точка M движется под действием приложенной в ней силы $\vec{P}$. Установим зависимость между моментом количества движения $\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

этой точки относительно выбранного центра O и моментом $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P}$ силы $\vec{P}$ относительно этого центра. Для этого найдем производную по времени от вектора $\vec{l}_O$:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt}.$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, то $\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$.

Учтем, что так как угол $(\vec{v}, m\vec{v}) = 0$, то $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, поэтому $\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{P}$.

Отсюда $\qquad \frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O$.

В случае, если на точку действует несколько сил, можно силу $\vec{P}$ рассматривать как равнодействующую этих сил, а момент $\vec{M}_O$ – как момент равнодействующей: $\qquad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_{Oi}$.

Окончательно получаем

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{Oi}. \tag{6.3}$$

Выражение (6.3) отражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра O равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра O.*

Проецируя обе части векторного равенства (6.3) на оси неподвижной системы координат, получаем

$$\frac{dl_{Ox}}{dt} = \sum M_{Oxi}; \quad \frac{dl_{Oy}}{dt} = \sum M_{Oyi}; \quad \frac{dl_{Oz}}{dt} = \sum M_{Ozi}, \tag{6.4}$$

где l_{Ox}, l_{Oy}, l_{Oz} – моменты количества движения точки М относительно координатных осей x, y, и z; M_{Oxi}, M_{Oyi}, M_{Ozi} – моменты i-той силы, действующей на точку, относительно тех же осей.

Уравнения (6.4) выражают смысл теоремы об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой неподвижной оси равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно той же оси.*

Следствия из теоремы.

1. *Если геометрическая сумма моментов сил, действующих на точку, относительно произвольного неподвижного центра O в течение некоторого промежутка времени равна нулю, то момент количества движения точки относительно выбранного центра в течение этого промежутка остается постоянным.*

Из равенства (6.3) следует, что если $\sum \vec{M}_{Oi} = 0$, то $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, и, следовательно, $\vec{L}_O = const$.

2. *Если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на точку, относительно произвольной неподвижной оси в течение некоторого промежутка времени остается равной нулю, то момент количества движения точки относительно выбранной оси в течение этого промежутка не изменяется.*

Если, например, $\sum M_{Oxi} = 0$, то из первого уравнения (6.4) имеем $\frac{dL_{Ox}}{dt} = 0$, а, следовательно, $L_{Ox} = const$.

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

Кинетическим моментом механической системы относительно заданного центра O называется вектор $\vec{L}_O$, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра O:

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{Oi} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \,, \tag{6.5}$$

где $\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ – момент количества движения i-той точки системы относительно центра О.

Кинетическим моментом механической системы относительно некоторой оси z называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этой оси:

$$L_z = \sum L_{zi} \ .$$

Выражение (6.5) можно преобразовать, воспользовавшись известным соотношением $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$:

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}). \quad (6.6)$$

Это равенство показывает, что векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ в общем случае не коллинеарны.

Кинетические моменты механической системы относительно центра O и оси z, проходящей через этот центр, связаны между собой зависимостью:

$$L_{Oz} = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = L_O \cos(\vec{L}_O, \vec{k}) \, .$$

Проекция кинетического момента механической системы относительно некоторого центра О на ось z, проходящую через этот центр, равна кинетическому моменту системы относительно оси z.

Запишем кинетический момент твердого тела относительно центра O в матричной форме:

$$\mathbf{L}_O = \sum \hat{\mathbf{r}}_i \cdot m_i \mathbf{v}_i = \sum \hat{\mathbf{r}}_i \cdot m_i \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}_i = -\sum m_i \hat{\mathbf{r}}_i \cdot (\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) =$$
$$= \sum m_i \hat{\mathbf{r}}_i^T \cdot (\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = \left(\sum m_i \hat{\mathbf{r}}_i^T \cdot \hat{\mathbf{r}}_i\right) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

или

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \, , \quad (6.7)$$

где $\mathbf{L}_O$ – матрица кинетического момента твердого тела; $\mathbf{L}_O = \begin{bmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{bmatrix}$

$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$ – кососимметричная матрица угловой скорости тела;

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix};\quad \mathbf{J}_O=\sum m_i\hat{\mathbf{r}}_i^T\cdot\hat{\mathbf{r}}_i -$$ тензор инерции тела относительно центра О;

$$\mathbf{J}_O=\begin{bmatrix}J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz}\\ -J_{Oyx} & J_{Oy} & -J_{Oyz}\\ -J_{Ozx} & -J_{Ozy} & J_{Oz}\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{L}_O=\begin{bmatrix}J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz}\\ -J_{Oyx} & J_{Oy} & -J_{Oyz}\\ -J_{Ozx} & -J_{Ozy} & J_{Oz}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Это равенство подтверждает мысль о том, что в общем случае векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не коллинеарны.

Установим, при каких условиях векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ будут направлены по одной прямой. В этом случае должно выполняться соотношение:

$$\mathbf{L}_O = J\cdot\boldsymbol{\omega}$$

или

$$\mathbf{J}_O\cdot\boldsymbol{\omega}=J\cdot\boldsymbol{\omega},$$

где J – некоторый скалярный множитель.

Это уравнение запишем в виде

$$(\mathbf{J}_O - J\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\omega}=0, \tag{6.9}$$

где $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ – единичная матрица.

Равенство (8.9) представляет собой краткую запись системы однородных уравнений

$$\begin{cases}(J_{Ox}-J)\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z=0\\ -J_{yx}\omega_x+(J_{Oy}-J)\omega_y - J_{yz}\omega_z=0\\ -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y+(J_{Oz}-J)\omega_z=0\end{cases}. \tag{6.10}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального (ненулевого) решения этой системы уравнений является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} J_{Ox}-J & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oyx} & J_{Oy}-J & -J_{Oyz} \\ -J_{Ozx} & -J_{Ozy} & J_{Oz}-J \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем характеристическое уравнение третьего порядка, имеющее три действительных корня J_1, J_2 и J_3. Корни J_1, J_2 и J_3 называются собственными числами тензора инерции).

Подставляя поочередно найденные корни J_1, J_2 и J_3 в систему (8.10), находим значения (ω_{x1}, ω_{y1}, ω_{z1}), (ω_{x2}, ω_{y2}, ω_{z2}), (ω_{x3}, ω_{y3}, ω_{z3}), соответствующие этим корням. Этими значениями задаются три собственных вектора тензора инерции, определяемых с точностью до произвольного постоянного множителя. Можно показать, что если собственные числа тензора инерции являются различными, то его собственные векторы взаимно ортогональны.

Если оси системы координат совместить с собственными векторами тензора инерции, то эти оси окажутся главными осями инерции, а корни J_1, J_2 и J_3 – главными моментами инерции тела.

Таким образом, если составляющие вектора угловой скорости тела являются собственными векторами его тензора инерции, то вектор кинетического момента $\vec{L}_O$ и вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости тела окажутся коллинеарными.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра

Пусть система материальных точек M_1, M_2,…, M_n движется под действием некоторой системы сил. Все силы, приложенные к системе точек, разделим на внешние и внутренние. Рассмотрим i-тую точку M_i системы, на которую действуют равнодействующая внешних $\vec{P}_i^E$ и внутренних $\vec{P}_i^J$ сил. Выберем некоторый неподвижный центр О и запишем для этой точки теорему об изменении момента количества движения материальной точки (6.3):

$$\frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \vec{M}_{Oi}^E + \vec{M}_{Oi}^J \quad (i=1,2,\ldots, n),$$

где $\vec{M}_{Oi}^{E}$, $\vec{M}_{Oi}^{J}$ − моменты равнодействующих внешних и внутренних сил относительно центра O, соответственно.

Просуммируем эти n уравнений:

$$\sum \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \sum \vec{M}_{Oi}^{E} + \sum \vec{M}_{Oi}^{J}. \tag{7.1}$$

Согласно свойству (4.3) внутренних сил их геометрическая сумма относительно произвольного центра О всегда равна нулю: $\sum \vec{M}_{Oi}^{J} = 0$. Кроме того, левую часть равенства (6.5) можно преобразовать с учетом (6.5):

$$\sum \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \frac{d\left(\sum \vec{L}_{Oi}\right)}{dt} = \frac{d\vec{L}_{O}}{dt}.$$

В результате соотношение (9.1) приобретает вид:

$$\frac{d\vec{L}_{O}}{dt} = \sum \vec{M}_{Oi}^{E}. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) отражает смысл теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра O: *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра О равна геометрической сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы, относительно того же центра О.*

Проецируя (7.2) на оси координат, получаем три уравнения:

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = \sum M_{Oxi}^{E}; \quad \frac{dL_{Oy}}{dt} = \sum M_{Oyi}^{E}; \quad \frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Ozi}^{E}, \tag{7.3}$$

где L_{Ox}, L_{Oy}, L_{Oz} − кинетические моменты механической системы относительно осей x, y и z; $\sum M_{Oxi}^{E}$, $\sum M_{Oyi}^{E}$, $\sum M_{Ozi}^{E}$ − алгебраические суммы моментов внешних сил, действующих на точки механической системы, относительно координатных осей.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на точки механической системы, относительно этой оси.

В правых частях уравнений (7.3) записываются алгебраические суммы моментов внешних сил относительно координатных осей. При решении задач иногда удобно применять следующее *правило знаков*: момент силы считается положительным, если сила способствует вращению тела.

Следствия из теоремы.

1. *Если геометрическая сумма моментов внешних сил, действующих на механическую систему, относительно заданного неподвижного центра О в течение некоторого промежутка времени равна нулю, то кинетический момент механической системы относительно центра О в течение этого промежутка остается постоянным.*

Из равенства (7.2) получаем, что если $\sum \vec{M}_{Oi}^{E} = 0$, то $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, и, следовательно,

$$\vec{L}_O = const. \qquad (7.4)$$

2. *Если алгебраическая сумма моментов внешних сил, действующих на механическую систему, относительно произвольной неподвижной оси в течение некоторого промежутка времени остается равной нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси в течение указанного промежутка времени не изменяется.*

Если, например, $\sum M_{Oxi}^{E} = 0$, то из первого уравнения (9.3) имеем $\dfrac{dL_{Ox}}{dt} = 0$, а, следовательно,

$$L_{Ox} = const. \qquad (7.5)$$

Приведенные следствия из теоремы об изменении кинетического момента механической системы отражают *закон сохранения кинетического момента механической системы*. Они показывают, что внутренние силы непосредственно не могут изменить кинетический момент механической системы.

Теорема Резаля

Рассмотрим кинематическую интерпретацию теоремы об изменении кинетического момента механической системы.

В общем случае при движении механической системы ее кинетический момент относительно заданного центра *O* может изменяться как по величине, так и по направлению (рис. 7.1).

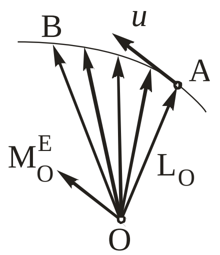

Рис. 7.1

Пусть $\vec{L}_O$– кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра *O*. При движении системы точка *A*, являющаяся концом вектора $\vec{L}_O$, будет перемещаться по некоторой кривой *AB*, которая называется *годографом кинетического момента* механической системы относительно центра *O*. При этом точка *A* будет двигаться вдоль годографа со скоростью $\vec{u}$, равной первой производной от вектора $\vec{L}_O$ по времени: $\vec{u} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$.

Сравнивая это выражение с равенством (9.2), приходим к выводу, что

$$\vec{u} = \sum \vec{M}_{Oi}^{E} = \vec{M}_{O}^{E}, \tag{7.6}$$

где $\vec{M}_O^E$– главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно центра *O*.

Уравнение (7.6) выражает смысл *теоремы Резаля*: *скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра*.

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения

Рассмотрим твердое тело, вращающееся с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси Ω, проходящей через центр O (рис.7.2).

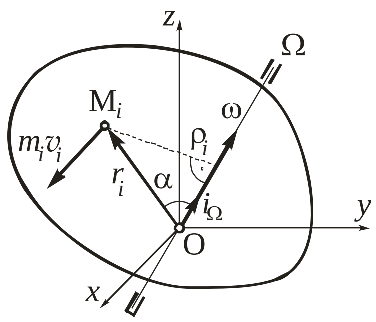

Рис. 7.2

В соответствии с формулой (7.6) $\vec{L}_O = \vec{\omega}\sum m_i r_i^2 - \sum m_i \vec{r}_i\left(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}\right)$.

Спроецируем вектор $\vec{L}_O$ на ось Ω:

$$L_{O\Omega} = \vec{L}_O \cdot \vec{i}_\Omega = \omega\sum m_i r_i^2 - \sum m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{i}_\Omega)\left(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}\right),$$

где $\vec{i}_\Omega$ – орт оси вращения Ω.

Так как

$$(\vec{r}_i \cdot \vec{i}_\Omega)\left(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}\right) = \omega r_i^2 \cos^2\alpha\,,$$

получаем

$$L_{O\Omega} = \omega\sum m_i r_i^2 (1-\cos^2\alpha) = \omega\sum m_i r_i^2 \sin^2\alpha = \omega\sum m_i \rho_i^2\,.$$

Учтем, что $\sum m_i \rho_i^2 = J_\Omega -$ момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси Ω. Таким образом,

$$L_{O\Omega} = J_\Omega \omega\,. \qquad (7.7)$$

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.