ЛЕКЦИЯ 5

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига. Кинетическая энергия твердого тела. Работа и мощность силы. Мощность и работа сил, приложенных к твердому телу. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Случай абсолютно твердого тела.

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

Со времен Декарта и Лейбница в механике рассматриваются две меры механического движения материальной точки или системы материальных точек: количество движения и кинетическая энергия. Этим мерам соответствуют две меры действия силы: импульс силы и работа силы.

Из школьного курса физики известно, что кинетическая энергия материальной точки массы m, движущейся по отношению к рассматриваемой системе отсчета со скоростью $\vec{v}$, определяется по формуле:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы ищется как сумма значений кинетических энергий всех материальных точек, входящих в нее:

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{8.1}$$

Теорема Кенига

Предположим, что некоторая система материальных точек движется как угодно в пространстве по отношению к неподвижной системе координат $Ox_0y_0z_0$ (рис.8.1).

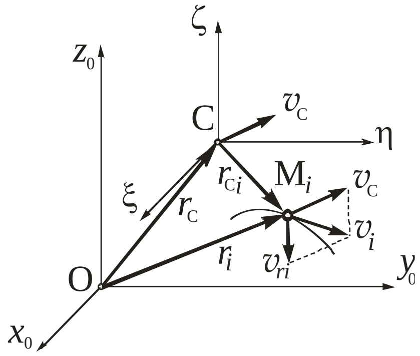

Рис. 8.1

Свяжем с центром масс C начало отсчета сопровождающей подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$, оси ξ, η и ζ которой параллельны неподвижным осям x_0, y_0 и z_0 и движутся поступательно вместе с центром масс механической системы. Движение любой точки M_i системы можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного движения вместе с центром масс и относительного движения по отношению к центру масс. Тогда скорость $\vec{v}_i$ точки M_i по отношению к неподвижной системе отсчета может быть найдена как геометрическая сумма скорости $\vec{v}_C$ центра масс и относительной скорости $\vec{v}_{ri}$ точки в ее движении по отношению к центру масс:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}. \tag{8.2}$$

Подставим (8.2) в (8.1):

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\vec{v}_C + \vec{v}_{ri}\right) \cdot \left(\vec{v}_C + \vec{v}_{ri}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{ri} \cdot \vec{v}_{ri} =$$

$$= \frac{v_C^2}{2} \sum m_i + \vec{v}_C \sum m_i \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{ri} \cdot \vec{v}_{ri}$$

Преобразуем правую часть этого выражения. Так как $\sum m_i = m$ представляет собой массу системы, а

$$\sum m_i \vec{v}_{ri} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_{Ci}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_{Ci} = m\vec{v}_{C_C} = 0, \tag{8.3}$$

где $\vec{v}_{C_C}$ – скорость центра масс по отношению к сопровождающей подвижной системе координат $C\xi\eta\zeta$, то

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{ri}^2}{2}. \tag{8.4}$$

Равенство (8.4) отражает смысл *теоремы Кенига*: *кинетическая энергия механической системы в общем случае движения равна сумме кинетической энергии системы в ее поступательном движении вместе с центром масс, и кинетической энергии системы в ее движении по отношению к сопровождающей системе координат $C\xi\eta\zeta$, связанной с центром масс.*

Кинетическая энергия твердого тела

Весьма распространенным является случай, когда механическая система представляет собой твердое тело или совокупность твердых тел. Поэтому при решении практических задач возникает необходимость определять кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

1. *Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движение.* При поступательном движении твердого тела скорости его точек геометрически равны между собой: $\vec{v}_i = \vec{v}$. Поэтому кинетическая энергия тела в соответствии с (8.1) принимает вид:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i .$$

Так как $\sum m_i = m$, то окончательно получаем:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{8.5}$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, определяется так же, как кинетическая энергия материальной точки, движущейся со скоростью, равной скорости тела, и имеющей его массу.

2. *Кинетическая энергия твердого тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси.* Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется по формуле: $v_i = \omega r_i$ (рис. 8.2). Тогда кинетическая энергия вращающегося тела, определяемая выражением (8.1), принимает вид: $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2$ или

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{8.6}$$

где $J_z = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

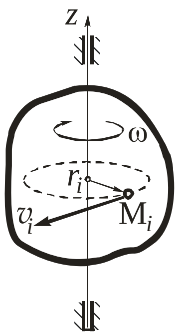

Рис. 8.2

Таким образом, *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.*

3. *Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение.* Предположим, что центр масс *C* тела перемещается в плоскости *Oyz* вместе с движущейся поступательно сопровождающей системой координат $C\xi\eta\zeta$ (рис.8.3).

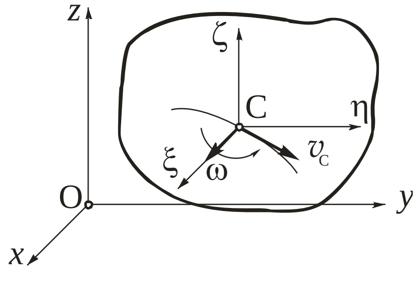

Рис. 8.3

При этом вектор угловой скорости тела всегда остается параллельным оси *x*. Разложим плоское движение тела на поступательное движение вместе с центром масс *C* и вращательное движение вокруг оси $C\xi$, перпендикулярной плоскости *Oyz*. Кинетическую энергию тела определим на основании теоремы Кенига (8.4):

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi}\omega^2}{2}, \qquad (8.7)$$

где $J_{C\xi}$ − момент инерции тела относительно оси $C\xi$.

Первое слагаемое в (8.7) определяет кинетическую энергию тела в поступательном движении вместе с центром масс *C*, а второе − кинетическую энергию тела во вращении вокруг подвижной оси $C\xi$, проходящей через его центр масс.

4. *Кинетическая энергия твердого тела, совершающего сферическое движение*. При сферическом движении твердого тела модули скоростей всех его точек можно определять как вращательные вокруг мгновенной оси вращения (рис. 8.4) по формуле

$$v_i = \omega h_i,$$

где ω − мгновенная угловая скорость тела, h_i − расстояние от точки до мгновенной оси вращения.

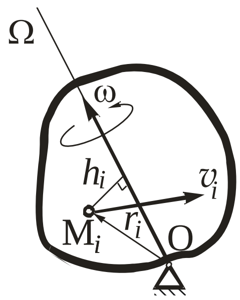

Рис. 8.4

Тогда кинетическая энергия твердого тела при его сферическом движении, определяемая выражением (8.1), принимает вид:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2 .$$

Если учесть, что $\sum m_i h_i^2 = J_\Omega$ представляет собой момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, то

$$T = \frac{J_\Omega \omega^2}{2} . \tag{8.8}$$

Это выражение показывает, что *кинетическая энергия тела при сферическом движении равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенной оси вращения на квадрат его мгновенной угловой скорости.*

Нужно отметить, что при внешнем сходстве между формулами (8.6) и (8.8) между ними имеется существенное различие. В выражении (8.6) момент инерции J_z тела остается постоянным, так как положение оси вращения z по отношению к телу не изменяется. Положение же мгновенной оси вращения Ω по отношению к телу в общем случае меняется, поэтому момент инерции J_Ω является переменной величиной.

При решении практических задач обычно поступают следующим образом. Выбирают две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и подвижную $O\xi\eta\zeta$, жестко связанную с твердым телом. Кинетическая энергия тела при его сферическом движении в этом случае определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} , \tag{8.9}$$

где $\mathbf{J}_O$ − тензор инерции тела по отношению к системе координат $O\xi\eta\zeta$, $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ − вектор-столбец угловой скорости тела.

5. *Кинетическая энергия твердого тела в общем случае его движения.* Рассмотрим твердое тело, движущееся произвольно относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 8.5).

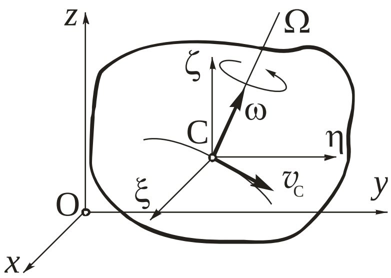

Рис. 8.5

Совместим с центром масс C тела начало сопровождающей системы координат $C\xi\eta\zeta$, которая движется поступательно. Движение свободного твердого тела можно представить состоящим из двух движений: поступательного вместе с центром масс тела и сферического относительно этого центра. Тогда согласно теореме Кенига (8.4):

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{C\Omega}\omega^2}{2}. \tag{8.11}$$

Кинетическая энергия свободного твердого тела равна сумме кинетической энергии тела в переносном поступательном движении вместе с центром масс и его кинетической энергии в сферическом движении относительно центра масс.

Если механическая система представляет собой совокупность твердых тел, соединенных связями, то при составлении выражения ее кинетической энергии необходимо учитывать уравнения кинематических связей, наложенных на тела системы.

Работа и мощность силы

Важными понятиями в механике являются понятия работы и мощности силы.

Работа постоянной силы. Пусть точка M движется под действием постоянной силы $\vec{P}$ по некоторой траектории из положения M_1 в положение M_2 (рис. 9.1).

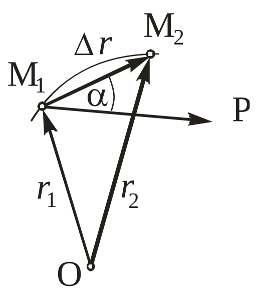

Рис. 9.1

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ является перемещением точки M из положения M_1 в положение M_2.

Работой постоянной силы $\vec{P}$ *на некотором перемещении* $\Delta\vec{r}$ *называется скалярная величина A, равная скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения ее точки приложения*:

$$A = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P\Delta r \cos\alpha\,. \tag{9.1}$$

Работа измеряется в джоулях (1 Дж=1 Н·м).

Знак работы силы зависит от значения угла α: если угол α острый (сила способствует перемещению), то A>0, а если тупой (сила препятствует перемещению) − A<0. Если же сила перпендикулярна перемещению (α=0), то ее работа равна нулю.

Мощность силы. *Мощность N силы равна скалярному произведению вектора силы* $\vec{P}$ *на вектор* $\vec{v}$ *скорости ее точки приложения* (рис.9.2):

$$N = \vec{P} \cdot \vec{v} = Pv\cos\alpha = P\dot{s}\cos\alpha\,. \tag{9.2}$$

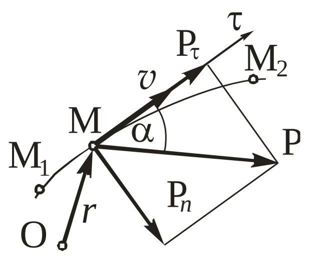

Рис. 9.2

Или

$$N = \vec{P} \cdot \vec{v} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{r}}\,. \tag{9.3}$$

Единицей измерения мощности является ватт (1 Вт=1 Дж/с).

Мощность силы можно представить в виде:

$$N = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}\,, \tag{9.4}$$

где X, Y, Z − проекции силы на оси координат; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ − проекции скорости точки приложения силы на эти оси.

Если силу $\vec{P}$ разложить на касательную $\vec{P}_\tau$ и нормальную $\vec{P}_n$ составляющие, то выражению (9.2) можно придать вид:

$$N = \vec{P} \cdot \vec{v} = \vec{P}_\tau \cdot \vec{v} = P_\tau v = P_\tau \dot{s}\,. \tag{9.5}$$

Работа переменной силы. Работа A силы в промежутке времени от t_1 до t_2 связана с ее мощностью N следующим образом:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N dt\,. \tag{9.6}$$

Пользуясь выражениями для мощности (9.2)-(9.5), получаем следующие выражения для работы переменной силы:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P} \cdot \vec{v} dt\,; \tag{9.7}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P} \cdot \dot{\vec{r}} dt\,; \tag{9.8}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P\dot{s} \cos\alpha dt\,; \tag{9.9}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} \right) dt\,; \tag{9.10}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P_\tau \dot{s} dt\,; \tag{9.11}$$

Если сила $\vec{P}$ зависит только от координат ее точки приложения (сила тяжести, сила упругости), то интеграл (9.10) сводится к криволинейному интегралу по кривой M_1M_2:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \left(Xdx + Ydy + Zdz \right). \tag{9.12}$$

Если зависимость силы от координаты $P = P(x)$ задана графически (рис. 9.3), то работу силы можно найти, определив площадь криволинейной трапеции *abcd*, заключенной между осью абсцисс, графиком $P = P(x)$ и отрезками *ab* и *cd*.

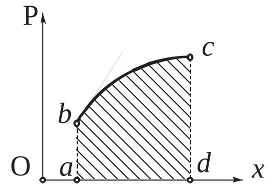

Рис. 9.3

Отметим одно следствие, вытекающее из определения работы силы. Пусть на точку действуют несколько сил $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ldots,\ \vec{P}_n$. Определим работу равнодействующей $\vec{R}$ этих сил в промежутке времени от t_1 до t_2:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\cdot\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}_1\cdot\vec{v}dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}_2\cdot\vec{v}dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}_n\cdot\vec{v}dt\,,$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{P}_i\cdot\vec{v}dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}_i\cdot\vec{v}dt = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum A_i\ .$$

Работа равнодействующей некоторой системы сил равна алгебраической сумме работ каждой из этих сил.

Работа силы тяжести. Пусть материальная точка *M*, на которую действует сила тяжести $m\vec{g}$, переместилась из положения M_1 в положение M_2 (рис. 9.4), причем модуль перемещения $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}$ мал по сравнению с радиусом Земли. Найдем работу силы тяжести на этом перемещении.

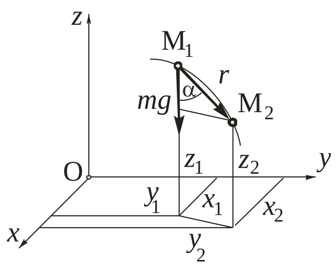

Рис. 9.4

Выберем систему координат *Oxyz*, ось *z* которой направлена вертикально вверх. При принятом допущении силу тяжести можно считать постоянной по величине и направлению, поэтому воспользуемся формулой (9.1): $A = mgr\cos\alpha$.

Так как $r\cos\alpha = z_1 - z_2$, то

$$A = mg(z_1 - z_2). \tag{9.13}$$

Работа силы тяжести равна произведению силы тяжести на разность аппликат начального и конечного положений ее точки приложения.

Работа силы тяжести не зависит от траектории, по которой движется точка ее приложения, а определяется расстоянием между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положения этой точки.

Работа силы тяжести равна нулю, если $z_1 = z_2$ (рис. 9.5).

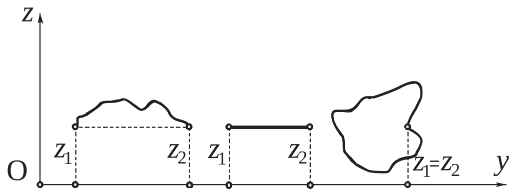

Рис. 9.5

Работа силы упругости. Рассмотрим линейную пружину, сила упругости $\vec{P}$ которой подчиняется закону Гука: $P = cx$, где c − коэффициент жесткости пружины, x − ее деформация (рис. 9.6).

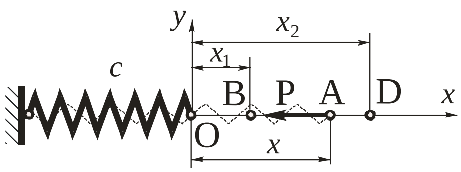

Рис. 9.6

При растяжении пружины в ней возникает сила упругости, направленная в сторону, противоположную деформации пружины. Совместим начало отсчета системы координат с положением конца недеформированной пружины и направим ось x вдоль оси пружины. Проекции силы упругости на оси координат:

$$P_x = X = -cx; \quad P_y = Y = 0; \quad P_z = Z = 0.$$

Для определения работы силы упругости воспользуемся формулой (9.10):

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\left(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(X\,\frac{dx}{dt}+Y\,\frac{dy}{dt}+Z\,\frac{dz}{dt}\right)dt=\int_{x_1}^{x_2}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}Xdx=-\int_{x_1}^{x_2}cxdx=-\left(\frac{cx_2^2}{2}-\frac{cx_1^2}{2}\right).$$

Окончательно $$A=\frac{cx_1^2}{2}-\frac{cx_2^2}{2}\,. \qquad (9.14)$$

Здесь: x_1, x_2 − координаты, характеризующие начальную и конечную деформации пружины, соответственно.

Если начальная деформация пружины отсутствовала (x_1=0), то

$$A=-\frac{cx_2^2}{2}=-\frac{c\Delta l^2}{2}\,,$$

где обозначено $\Delta l=x_2$. В этом случае максимальное значение силы упругости пружины равно $P_{\max}=c\Delta l$.

Тогда работа силы упругости может быть найдена по формуле:

$$A=-\frac{P_{\max}\Delta l}{2}\,. \qquad (9.15)$$

Мощность и работа сил, приложенных к твердому телу

Мощность и работа внутренних сил. Рассмотрим две произвольные точки M_i и M_{i+1} свободного твердого тела (рис. 9.7) и покажем внутренние силы $\vec{P}_i^J$ и $\vec{P}_{i+1}^J$, приложенные к этим точкам.

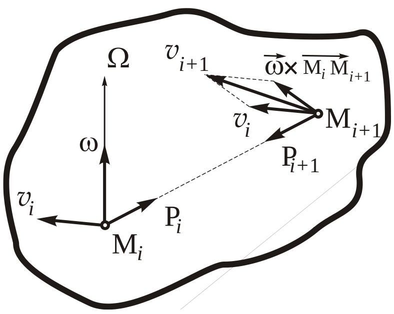

Рис. 9.7

В соответствии с законом равенства действия и противодействия эти силы равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{P}_{i+1}^J=-\vec{P}_i^J\,. \qquad (9.16)$$

Предположим, что в данный момент времени скорость точки M_i равна $\vec{v}_i$, а твердое тело вращается вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда согласно теореме о скоростях точек свободного твердого тела скорость точки M_{i+1} равна

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \overrightarrow{M_i M_{i+1}}. \tag{9.17}$$

Определим сумму мощностей внутренних сил $\vec{P}_i^J$ и $\vec{P}_{i+1}^J$:

$$N_i^J + N_{i+1}^J = \vec{P}_i^J \cdot \vec{v}_i + \vec{P}_{i+1}^J \cdot \vec{v}_{i+1}.$$

Преобразуем это выражение с учетом (14.60) и (14.61):

$$N_i^J + N_{i+1}^J = \vec{P}_i^J \cdot \vec{v}_i - \vec{P}_i^J \cdot \left(\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \overrightarrow{M_i M_{i+1}}\right) = -\vec{P}_i^J \cdot \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{M_i M_{i+1}}\right) = -\vec{\omega} \cdot \left(\overrightarrow{M_i M_{i+1}} \times \vec{P}_i^J\right).$$

Так как векторы $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ и $\vec{P}_i^J$ коллинеарны, то $\overrightarrow{M_i M_{i+1}} \times \vec{P}_i^J = 0$, поэтому

$$N_i^J + N_{i+1}^J = 0.$$

В силу того, что каждой внутренней силе соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению, то сумма мощностей всех внутренних сил также равна нулю:

$$N^J = \sum N_i^J = 0. \tag{9.18}$$

Сумма мощностей всех внутренних сил твердого тела при любом его движении всегда равна нулю.

Если сумма мощностей всех внутренних сил равна нулю, то в соответствии с (11.7) выполняется условие:

$$A^J = \sum A_i^J = 0. \tag{9.19}$$

Сумма работ всех внутренних сил твердого тела при любом его перемещении всегда равна нулю.

Аналогично можно доказать, что сумма мощностей и сумма работ всех внутренних сил, действующих на точки абсолютно гибкой нерастяжимой нити при любом ее перемещении равна нулю.

Мощность и работа сил, приложенных к твердому телу, совершающему поступательное движение. Выше было установлено, что мощность и работа всех внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, всегда равна нулю.

Поэтому определим мощность и работу только внешних сил, приложенных к телу.

При поступательном движении скорости всех точек тела геометрически равны между собой: $\vec{v}_i = \vec{v}$.

Мощность всех сил, приложенных к телу:

$$N = \sum \vec{P}_i^E \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \sum \vec{P}_i^E = \vec{R}^E \cdot \vec{v}, \tag{9.20}$$

где $\vec{R}^E = \sum \vec{P}_i^E$ − главный вектор всех внешних сил, приложенных к телу.

Выражение (9.20) показывает, что *мощность всех сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно, равна мощности главного вектора внешних сил, приложенного к любой точке твердого тела*.

Воспользовавшись формулой (9.7), найдем работу сил, действующих на тело при его поступательном движении:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}^E \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}^E \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}^E \cdot d\vec{r}. \tag{9.21}$$

Из выражения (9.21) следует, что *работа всех сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно, равна работе главного вектора внешних сил, приложенного к любой точке твердого тела*.

Мощность и работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 9.8).

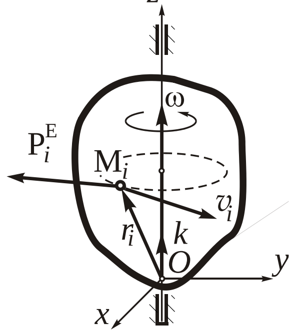

Рис. 9.8

Определим мощность внешних сил, приложенных к его точкам (мощность внутренних сил, как известно, равна нулю):

$$N = \sum \vec{P}_i^E \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{P}_i^E \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \vec{\omega} \cdot \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{P}_i^E\right) = \vec{\omega} \cdot \sum \vec{M}_{Oi}^E, \qquad (9.22)$$

где $\vec{\omega}$ − вектор угловой скорости тела, $\vec{r}_i$ − радиус-вектор *i*-той точки тела, к которой приложена внешняя сила $\vec{P}_i^E$, $\vec{M}_{Oi}^E$ − момент *i*-той внешней силы относительно точки О.

Подставляя в (9.22) соотношение $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, где $\vec{k}$ − орт оси вращения *z*, получаем:

$$N = \vec{\omega} \cdot \sum \vec{M}_{Oi}^E = \omega \sum \vec{k} \cdot \vec{M}_{Oi}^E = \omega \sum M_{Ozi}^E = M_{Oz}^E \omega, \qquad (9.23)$$

где M_{Ozi}^E − момент *i*-той внешней силы относительно оси *z*, M_{Oz}^E − главный момент внешних сил относительно оси *z*.

Выражение (9.23) показывает, что *мощность всех сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента всех внешних сил, действующих на тело, относительно этой оси на его угловую скорость.*

Используя формулу (9.6), найдем работу всех сил, действующих на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{Oz}^E \omega dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{Oz}^E \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{Oz}^E d\varphi, \qquad (9.24)$$

где φ − угол поворота тела.

Если главный момент внешних сил относительно оси вращения не зависит от угла поворота тела (M_{Oz}^E=const), то

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{Oz}^E d\varphi = M_{Oz}^E \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_{Oz}^E \left(\varphi_2 - \varphi_1\right). \qquad (9.25)$$

В этом случае *сумма работ сил приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента всех внешних сил, действующих на тело, относительно этой оси на приращение его угла поворота.*

Мощность и работа сил, приложенных к свободному твердому телу. Пусть свободное твердое тело движется под действием некоторой системы внешних сил (рис. 9.9).

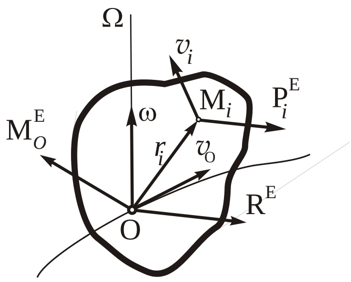

Рис. 9.9

Скорость $\vec{v}_i$ любой точки свободного твердого тела можно представить как геометрическую сумму скорости $\vec{v}_O$ полюса O и скорости этой точки в сферическом движении вокруг этого полюса: $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, где $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор его i-той точки M_i.

Определим сумму мощностей всех сил, действующих на тело, учитывая, что сумма мощностей всех внутренних сил равна нулю:

$$N = \sum \vec{P}_i^E \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{P}_i^E \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \sum \vec{P}_i^E \cdot \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{P}_i^E\right) =$$

$$= \vec{v}_O \cdot \sum \vec{P}_i^E + \vec{\omega} \cdot \sum \vec{M}_{Oi}^E .$$

Так как геометрическая сумма внешних сил представляет собой главный вектор: $\sum \vec{P}_i^E = \vec{R}^E$, а геометрическая сумма моментов внешних сил относительно центра O – главный момент системы относительно этого центра: $\sum \vec{M}_{Oi}^E = \vec{M}_O^E$, то

$$N = \vec{R}^E \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^E \cdot \vec{\omega} . \qquad (9.26)$$

Выражение (11.26) показывает, что *мощность всех сил, приложенных к свободному твердому телу, равна сумме скалярных произведений главного вектора внешних сил на вектор скорости полюса О и главного момента этих сил относительно полюса О на вектор угловой скорости тела*.

Работа всех сил, приложенных к свободному твердому телу может быть найдена по формуле (9.6): $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Найдем связь между изменением кинетической энергии материальной точки и работой сил, действующих на нее. Запишем основное уравнение динамики и умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор скорости точки:

$$m\vec{a}\cdot\vec{v}=\left(\sum\vec{P}_i\right)\cdot\vec{v}\,.$$

Так как $\left(\sum\vec{P}_i\right)\cdot\vec{v}=\sum\vec{P}_i\cdot\vec{v}=\sum N_i$, где $\sum N_i$ − сумма мощностей сил, приложенных к точке, а $m\vec{a}\cdot\vec{v}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m(\vec{v}\cdot\vec{v})}{2}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$, то это выражение приобретает вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\sum N_i\,. \tag{10.1}$$

Производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности сил, действующих на нее.

Умножим обе части равенства (10.1) на dt

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\left(\sum N_i\right)dt=\sum N_i dt$$

и проинтегрируем в пределах, соответствующих начальному и конечному положениям точки М

$$\int\limits_{\frac{mv_1^2}{2}}^{\frac{mv_2^2}{2}} d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int\limits_{t_{1t}}^{t_{2t}}\sum N_i dt=\sum\int\limits_{t_{1t}}^{t_{2t}} N_i dt\,.$$

Отсюда

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\sum A_i\,. \tag{10.2}$$

Выражение (10.2) отражает смысл теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки: *изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ сил, действующих на нее, на том же перемещении*.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Случай абсолютно твердого тела

Выявим зависимость между изменением кинетической энергии механической системы и работой сил, действующих на нее. Для этого рассмотрим i-тую точку M_i механической системы массы m_i, к которой приложены равнодействующая внешних $\vec{P}_i^E$ и внутренних $\vec{P}_i^J$ сил (рис. 10.1).

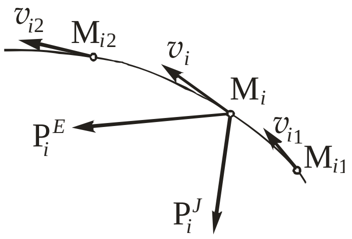

Рис. 10.1

Рассмотрим два момента времени: начальный t_1 и конечный t_2.

Пусть в эти моменты точка имела скорости $\vec{v}_{i1}$ и $\vec{v}_{i2}$, соответственно. Для каждой точки механической системы запишем теорему об изменении кинетической энергии (10.2): $\frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = A_i^E + A_i^J$, ($i$=1,2,…,n), где n − количество точек системы, A_i^E, A_i^J − работы внешней $\vec{P}_i^E$ и внутренней $\vec{P}_i^J$ сил.

Складывая почленно все эти равенства, имеем:

$$\sum \frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \sum \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = \sum A_i^E + \sum A_i^J .$$

Учитывая выражение для кинетической энергии механической системы, получаем:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J . \tag{10.3}$$

Это выражение представляет собой математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии механической системы: *изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении ее точек равно алгебраической сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к материальным точкам системы, на том же перемещении.*

Как было установлено выше, сумма работ всех внутренних сил, действующих на точки твердого тела, равна нулю: $\sum A_i^J$ =0. Поэтому для твердого тела выражение (10.3) упрощается: $$T_2 - T_1 = \sum A_i^E \,. \tag{10.4}$$

Изменение кинетической энергии твердого тела на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ внешних сил, приложенных к точкам тела, на том же перемещении.