ЛЕКЦИЯ 23

Классификация связей. Принцип возможных скоростей. Принцип возможных перемещений.. Принцип возможных скоростей в случае движения механической системы. Общее уравнение динамики Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Классификация связей

Механическая система называется свободной, если положения ее точек и их скорости могут быть произвольными. В противном случае система называется несвободной.

На движение материальных точек несвободной механической системы (их координаты и скорости) наложены ограничения, которые называются *связями.* Математически связи можно представить в виде уравнений или неравенств. Практически связи реализуются в виде шарнирных соединений, стержневых опор, соединительных стержней, нерастяжимых нитей, жестких направляющих, опорных поверхностей и т.п.

Связи можно классифицировать следующим образом.

Связи называются *двусторонними* (*удерживающими*), если ограничения, накладываемые ими на движение точек системы, выражаются в виде уравнений, и *односторонними* (*неудерживающими*) − в виде неравенств.

Двусторонняя связь препятствует перемещению тела или точки тела в двух противоположных направлениях. (рис. 12.1*а* и *б*).

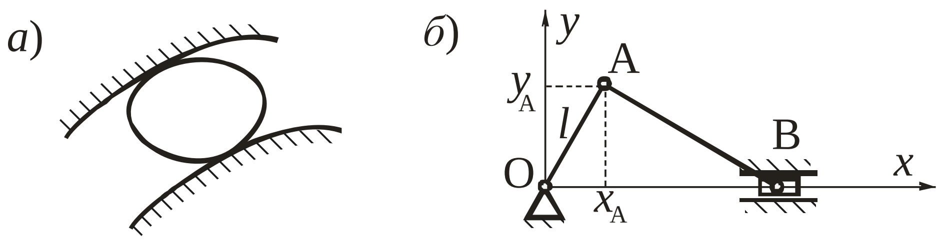

Рис. 12.1

В механизме, показанном на рис. 12.1*б* на точку *A* наложена двусторонняя связь, описываемая уравнением:

$$x_A^2 + y_A^2 - l^2 = 0,$$

а на точку *B* − связь $y_В$=0.

Односторонняя связь препятствует движению тела или точки тела в одном направлении (рис. 12.2*а* и *б*).

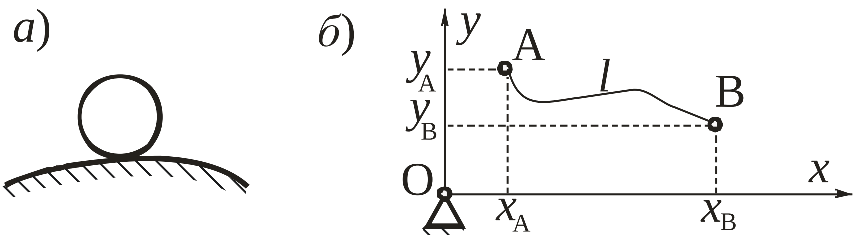

Рис. 12.2

На рис. 12.2*б* показаны два шарика *A* и *B*, связанные нерастяжимой нитью длины *l*, и движущиеся в плоскости *Oxy*. На движение шариков наложена односторонняя связь, выражаемая неравенством

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l^2 \le 0. \qquad (12.1)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние связи.

Голономными называются связи, уравнения которых не содержат никаких производных от координат по времени: $f(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0$,

то есть эти связи накладывают ограничения только на координаты точек механической системы.

Остальные связи, математически выражающиеся соотношениями вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0,$$

называются *неголономными* (они накладывают ограничения и на координаты и на скорости точек системы). Иными словами, уравнения неголономных связей включают в себя производные от координат по времени и не могут быть приведены к виду, не содержащему этих производных.

Ниже мы будем рассматривать только голономные связи, которые, в свою очередь, можно разделить на *стационарные* и *нестационарные*.

Связь называется *стационарной*, если ее уравнение не содержит явно времени t $f(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0$, и *нестационарной*, если содержит: $f(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0$.

Например, в механизме, показанном на рис. 12.1*б*, связь (12.1), наложенная на точку *A*, является стационарной. На рис. 12.3 показан пример односторонней нестационарной связи.

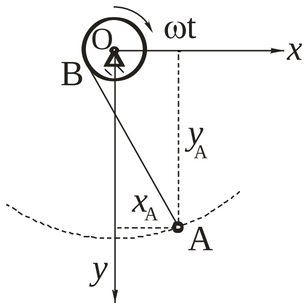

Рис. 12.3

Материальная точка подвешена к концу нерастяжимой нити, другой конец которой прикреплен к барабану, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Длина *AB* свободной части нити изменяется, являясь явной функцией времени.

Таким образом, каждую связь, наложенную на точки механической системы, можно отнести к двусторонней или односторонней, голономной или неголономной, стационарной или нестационарной.

Возможные скорости. Возможные перемещения. Идеальные связи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, взаимодействующих между собой. Пусть на точки системы наложены m двусторонних голономных связей:

$$f_l(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ (l=1, \ldots, m). \tag{12.2}$$

В этом случае скорости точек системы должны удовлетворять m условиям:

$$\dot{f}_l = \frac{\partial f_l}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_l}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial f_l}{\partial z_1}\dot{z}_1 + ... + \frac{\partial f_l}{\partial x_n}\dot{x}_n + \frac{\partial f_l}{\partial y_n}\dot{y}_n + \frac{\partial f_l}{\partial z_n}\dot{z}_n + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0.$$

Или

$$\dot{f}_l = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_l}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_l}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$\dot{f}_l = \sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{grad}_i\, f_l + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \qquad (12.3)$$

где $\vec{v}_i = \dot{x}_i\vec{i} + \dot{y}_i\vec{j} + \dot{z}_i\vec{k}$, $\overrightarrow{grad}_i\, f_l = \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial f_l}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial f_l}{\partial z_i}\vec{k}$ – вектор градиента функции $f_l(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$.

Любое множество скоростей $\vec{v}_i$, которое удовлетворяет уравнениям (12.3) в данный момент времени (в том положении системы, которое она занимает в рассматриваемый момент времени), называется совокупностью *возможных скоростей системы*.

Действительное движение несвободной механической системы обусловлено как связями, наложенными на ее точки, так и силами, приложенными к ним. Скорости материальных точек механической системы в ее действительном движении представляют собой одну из совокупностей возможных скоростей этой системы.

Возможными (виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые наложенными на нее связями.

Возможные перемещения должны удовлетворять варьированным уравнениям связей:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_l}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_l}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\delta r}_i \cdot \overrightarrow{grad}_i\, f_l = 0, \qquad (12.4)$$

где δx_i, δy_i, δz_i – величины, называемые вариациями координат точек системы.

Возможные перемещения рассматриваются как величины первого порядка малости. При этом пренебрегают величинами более высоких порядков малости. Так, если точка перемещается по криволинейной траектории, участок кривой заменяют отрезком прямой, отложенным по касательной к траектории, и обозначают $\overrightarrow{\delta s}$. Например, пусть стержень AB имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O (рис. 12.4).

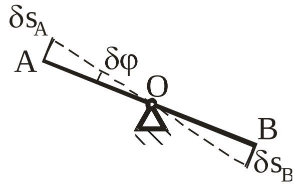

Рис. 12.4

Возможным перемещением стержня является его поворот вокруг этой оси на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Хотя в действительности точки A и B перемещаются по дугам окружностей, с точностью до величин первого порядка малости считают, что эти точки совершают возможные перемещения $\overrightarrow{\delta s_A}$ и $\overrightarrow{\delta s_B}$. Перемещения $\overrightarrow{\delta s_A}$ и $\overrightarrow{\delta s_B}$ представляют собой прямолинейные отрезки, перпендикулярные стержню AB. Величина этих перемещений равна

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi,\ \delta s_B = OB \cdot \delta\varphi.$$

В случае стационарных связей действительные перемещения несвободной механической системы являются частным случаем возможных перемещений. Если же связи нестационарны, то действительные перемещения не входят в число возможных перемещений системы.

Рассмотрим несвободную механическую систему, состоящую из n точек M_1, M_2,…, M_n. Согласно принципу освобождаемости от связей мысленно отбросим связи и заменим их действие на точки системы реакциями $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$,…, $\vec{R}_n$. Сообщим системе возможное перемещение, при котором точки системы получат перемещения $\overrightarrow{\delta s_1}$, $\overrightarrow{\delta s_2}$,…, $\overrightarrow{\delta s_n}$, и определим сумму работ реакций связей на этом перемещении.

Идеальными называются связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \vec{R}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = \sum R_i \delta s_i \cos(\vec{R}_i, \overrightarrow{\delta s_i}) = 0. \qquad (12.5)$$

Справедливо иное определение идеальности связей. Если сообщить механической системе возможные скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_n$, можно найти сумму мощностей реакций связей на выбранной совокупности возможных скоростей.

Связи называются идеальными, если сумма мощностей их реакций на любой совокупности возможных скоростей механической системы равна нулю:

$$\sum \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = \sum R_i v_i \cos(\vec{R}_i, \vec{v}_i) = 0. \tag{12.6}$$

Приведем примеры идеальных и неидеальных связей. Рассмотрим двустороннюю связь в виде двух гладких поверхностей, между которыми может скользить тело (рис. 12.5).

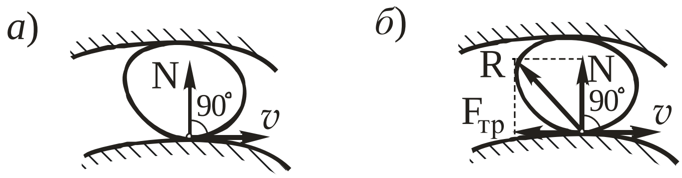

Рис. 12.5

Сообщим телу возможную скорость и определим возможную мощность реакции связи. Предположим, что тело взаимодействует с нижней поверхностью, и приложим к нему нормальную реакцию $\vec{N}$ этой поверхности (рис. 12.5*а*). Возможная мощность силы $\vec{N}$ равна

$$\vec{N} \cdot \vec{v} = Nv\cos(\vec{N}, \vec{v}) = Nv\cos 90^\circ = 0.$$

Так как условие (12.6) выполнено, рассматриваемая связь является идеальной.

Пусть теперь тело может скользить между параллельными шероховатыми поверхностями (рис. 12.5*б*). В этом случае реакция поверхности является геометрической суммой нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Определим сумму возможных мощностей этих составляющих:

$$\vec{N} \cdot \vec{v} + \vec{F}_{тр} \cdot \vec{v} = Nv\cos 90^\circ + F_{тр}v\cos 180^\circ = -F_{тр}v \neq 0.$$

Так как условие (12.6) не выполнено, эта связь не является идеальной.

При решении задач условно такую связь можно рассматривать как идеальную, если силу трения (пользуясь законом Кулона для силы трения) перевести из группы реакций связей в группу задаваемых сил. Тогда условие

(12.6) будет выполнено, ибо без силы трения скольжения сумма возможных мощностей реакций связей будет равна нулю.

Другим примером идеальной связи является нерастяжимый стержень *AB*, соединяющий две материальные точки (рис. 12.6).

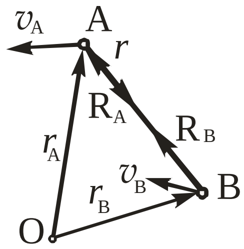

Рис. 12.6

Действительно, сумма возможных мощностей реакций $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ $\left(\vec{R}_B = -\vec{R}_A\right)$:

$$\vec{R}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{R}_B \cdot \vec{v}_B = \vec{R}_A \cdot \left(\vec{v}_A - \vec{v}_B\right) = \vec{R}_A \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) = \vec{R}_A \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{R}_A \cdot \dot{\vec{r}}\,. \qquad (12.7)$$

Очевидно, что так как стержень *AB* нерастяжим, то $\left|\vec{r}\right| = const$.

Следовательно, $\left|\vec{r}\right|^2 = \vec{r}^{\,2} = const^2$. Найдем производные от обеих частей этого равенства:

$$2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0\,. \qquad (12.8)$$

Из рис. 14.6 видно, что векторы $\vec{R}_A$ и $\vec{r}$ связаны соотношением:

$$\vec{R}_A = -k\vec{r}\,, \qquad (12.9)$$

где k − некоторая константа.

Подставляя (12.9) в (12.7) с учетом (12.8), получаем:

$$\vec{R}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{R}_B \cdot \vec{v}_B = \vec{R}_A \cdot \dot{\vec{r}} = -k\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0\,.$$

Таким образом, нерастяжимый стержень представляет собой идеальную связь. Отсюда следует, что внутренние связи в абсолютно твердом теле также являются идеальными.

Принцип возможных скоростей. Принцип возможных перемещений

Используя понятие возможной скорости, сформулируем необходимые и достаточные условия равновесия системы материальных точек, получившие название *принципа возможных скоростей*. Этот принцип позволяет получить условия равновесия сложных механических систем. Применение принципа удобно в случаях, когда использование уравнений равновесия приводит к громоздким вычислениям.

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил, приложенных к механической системе с двусторонними стационарными идеальными связями, является равенство нулю суммы возможных мощностей задаваемых сил на любой совокупности возможных скоростей в рассматриваемом положении системы, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \qquad (12.10)$$

Необходимость. Предположим, что механическая система, подчиненная двусторонним стационарным идеальным связям, находится в равновесии. Следовательно, силы, действующие на каждую точку системы, также уравновешиваются, и выполняются условия:

$$\vec{P}_i + \vec{R}_i = 0 \ (i=1,2,\ldots, n), \qquad (12.11)$$

где $\vec{P}_i$ − равнодействующая задаваемых сил, действующих на i-тую точку механической системы, $\vec{R}_i$ − равнодействующая реакций связей, наложенных на эту точку.

Мысленно сообщим системе в рассматриваемом ее положении какую-либо совокупность возможных скоростей $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots,$ $\vec{v}_n$ и умножим скалярно обе части каждого из уравнений (12.11) на вектор возможной скорости $\vec{v}_i$:

$$\vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \ (i=1,2,\ldots, n)$$

Просуммируем почленно левые и правые части всех этих уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \qquad (12.12)$$

Так как связи идеальны, то последнее слагаемое равно нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = 0.$$

В этом случае уравнение (12.12) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i = 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Для доказательства достаточности принципа проведем рассуждения от противного.

Предположим, что условие (12.10) выполнено, а силы, действующие на точки механической системы, не уравновешиваются. Если в начальный момент времени точки системы находились в покое, то под действием неуравновешивающихся сил они придут в движение и за малый промежуток времени приобретут действительные скорости $\vec{v}_i$, которые для стационарных связей совпадают с какой-то совокупностью возможных скоростей.

Так как скорости каждой из точек из положения покоя будут направлены в сторону равнодействующей сил $\vec{P}_i$ и $\vec{R}_i$, то сумма мощностей всех сил будет положительной:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i > 0.$$

Однако, в силу идеальности связей, второе слагаемое левой части равно нулю, следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i > 0,$$

что противоречит исходному предположению (12.10). Достаточность принципа доказана.

Условия равновесия механической системы устанавливает также *принцип возможных перемещений*: *необходимым и достаточным условием равновесия системы сил, приложенных к механической системе с двусторонними стационарными идеальными связями, является равенство нулю суммы элементарных работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положени*я, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0. \qquad (12.13)$$

Необходимость и достаточность выполнения условия (12.13) для равновесия механической системы доказывается аналогично.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Принцип возможных скоростей в случае движения механической системы. Общее уравнение динамики

Рассмотрим механическую систему, состоящую из *n* материальных точек, движение которых ограничено двусторонними голономными идеальными связями. Согласно принципу Германа-Эйлера-Даламбера для несвободной механической системы в произвольный момент времени геометрическая сумма равнодействующих задаваемых сил $\vec{P}_i$, реакций связей $\vec{R}_i$ и силы инерции $\vec{\Phi}_i$ для каждой точки механической системы равна нулю:

$$\vec{P}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0 \ (i=1, 2,\dots, n). \tag{12.14}$$

Если сообщить точкам системы возможные скорости $\vec{v}_i$, то сумма возможных мощностей этих сил на скорости $\vec{v}_i$ должна быть равна нулю:

$$\vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{\Phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \ (i=1, 2,\dots, n).$$

Просуммируем все эти *n* уравнений:

$$\sum \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \tag{12.15}$$

Так как связи идеальны, то сумма возможных мощностей их реакций равна нулю:

$$\sum \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = 0.$$

В этом случае уравнение (12.15) имеет вид

$$\sum \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \tag{12.16}$$

Это уравнение называется *общим уравнением динамики*. Оно показывает, что *в любой момент времени при движении механической системы с двусторонними идеальными связями сумма возможных мощностей задаваемых сил и сил инерции равна нулю*.

Можно получить иную форму записи общего уравнения динамики.

Сообщим системе возможное перемещение, при котором ее i-тая точка получит возможное перемещение $\overrightarrow{\delta s_i}$, и определим сумму элементарных работ сил $\vec{P}_i$, $\vec{R}_i$ и $\vec{\Phi}_i$ на этом перемещении:

$$\vec{P}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} + \vec{R}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} + \vec{\Phi}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя по числу точек и учитывая идеальность связей $\left(\sum \vec{R}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0\right)$, получаем:

$$\sum \vec{P}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0. \qquad (12.17)$$

Это выражение, представляющее одну из форм записи общего уравнения динамики, показывает, что *в любой момент времени алгебраическая сумма элементарных работ задаваемых сил и сил инерции точек несвободной механической системы с двусторонними идеальными связями на любом возможном перемещении равна нулю*.

Различные формы общего уравнения динамики

Если в каждую точку механической системы провести радиус-вектор $\vec{r}_i$, то приращение $\overrightarrow{\delta r_i}$ этого радиус-вектора будет возможным перемещением соответствующей точки: $\overrightarrow{\delta r_i} = \overrightarrow{\delta s_i}$ (i=1, 2,…, n).

Тогда уравнение (14.17) принимает вид:

$$\sum \vec{P}_i \cdot \overrightarrow{\delta r_i} + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \overrightarrow{\delta r_i} = \sum \left(\vec{P}_i + \vec{\Phi}_i\right) \cdot \overrightarrow{\delta r_i} = 0. \qquad (12.18)$$

Если выразить скалярное произведение векторов через их проекции на оси координат, то получим:

$$\sum \left[\left(X_i + \Phi_{xi}\right)\delta x_i + \left(Y_i + \Phi_{yi}\right)\delta y_i + \left(Z_i + \Phi_{zi}\right)\delta z_i\right] = 0, \qquad (12.19)$$

где X_i, Y_i, Z_i − проекции задаваемых сил $\vec{P}_i$ на оси неподвижной системы декартовых координат, Φ_{xi}, Φ_{yi}, Φ_{zi} − проекции сил инерции точек системы, а δx_i, δy_i, δz_i − проекции векторов возможных перемещений на эти оси.

Проекции сил инерции точек механической системы на оси координат можно выразить через проекции их ускорений:

$$\Phi_{xi} = -m_i \ddot{x}_i, \; \Phi_{yi} = -m_i \ddot{y}_i, \; \Phi_{zi} = -m_i \ddot{z}_i.$$

Это позволяет записать уравнение (14.18) в виде:

$$\sum\left[\left(X_i - m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right] = 0. \qquad (12.20)$$

Уравнения (12.18) и (12.19) можно также записать в форме уравнения возможных мощностей

$$\sum\left[\left(X_i + \Phi_{xi}\right)\dot{x}_i + \left(Y_i + \Phi_{yi}\right)\dot{y}_i + \left(Z_i + \Phi_{zi}\right)\dot{z}_i\right] = 0, \qquad (12.21)$$

$$\sum\left[\left(X_i - m_i\ddot{x}_i\right)\dot{x}_i + \left(Y_i - m_i\ddot{y}_i\right)\dot{y}_i + \left(Z_i - m_i\ddot{z}_i\right)\dot{z}_i\right] = 0. \qquad (12.22)$$

В этих уравнениях $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ − проекции возможной скорости *i*-той точки системы на оси неподвижной системы координат.

Общее уравнение динамики, записанное в форме (12.20) и (12.22), позволяет составить дифференциальные уравнения движения произвольной механической системы.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

В кинематике были установлены свойства поступательного движения твердого тела: все его точки движутся одинаково, так же, как движется центр масс тела. Поэтому в качестве дифференциальных уравнений поступательного движения твердого тела обычно применяют дифференциальные уравнения движения его центра масс:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum X_i^E \\ m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E \\ m\ddot{z}_C = \sum Z_i^E \end{cases}, \qquad (13.1)$$

где m − масса тела, $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ − проекции ускорения его центра масс на оси координат, X_i^E, Y_i^E, Z_i^E − проекции *i*-той внешней силы, приложенной к телу, на эти оси.

Используя дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела можно решать две основные задачи:

1. зная массу тела и уравнения движения его центра масс, найти равнодействующую внешних сил, приложенных к телу,

2. знаая массу тела, силы, действующие на него, и начальные условия, найти уравнения движения центра масс тела.

Таким образом, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения материальной точки, имеющей массу тела, причем к этой точке приложены все внешние силы, действующие на тело.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z под действием системы внешних сил $\vec{P}_1^E$, $\vec{P}_2^E, \ldots, \vec{P}_n^E$. Если тело имеет угловую скорость ω, то его кинетический момент относительно оси z определяется по формуле: $L_z = J_z\omega$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Применим к этому телу теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси, которая выражается уравнением:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{zi}^E, \tag{13.2}$$

где $\sum M_{zi}^E$ – алгебраическая сумма моментов внешних сил, приложенных к телу относительно оси z.

Так как

$$\frac{dL_Z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_Z\omega) = \frac{d}{dt}(J_Z\dot{\varphi}) = J_Z\ddot{\varphi}, \tag{13.3}$$

то, подставляя (13.3) в (13.2), получаем

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{zi}^E. \tag{13.4}$$

Уравнение (13.4) называется *дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*.

Это уравнение показывает, что *момент инерции J_z является мерой инертности тела при его вращательном движении*.

В правой части уравнения (13.4) записывается алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси вращения. Иногда удобно применять следующее правило знаков для моментов: момент внешней силы относительно оси вращения считается положительным, если сила способствует вращению. Согласно этому правилу, моменты движущих сил положительны, а сил сопротивления − отрицательны. Если $\sum M_{zi}^{E} > 0$, то $\ddot{\varphi} = \varepsilon > 0$, т.е. тело вращается ускоренно. Если же $\sum M_{zi}^{E} < 0$, то $\ddot{\varphi} = \varepsilon < 0$, и тело вращается замедленно. В случае, если $\sum M_{zi}^{E} = 0$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$; ω=const, тело вращается равномерно.

Дифференциальное уравнение (13.4) позволяет решать следующие две основные задачи динамики вращательного движения твердого тела:

1. зная уравнение вращения тела $\varphi=f(t)$ и его момент инерции J_z, определить главный момент внешних сил, приложенных к телу: $M_z^E = J_z \ddot{\varphi}$.
2. зная момент инерции J_z тела, внешние силы, действующие на него, и начальные условия φ_0 и ω_0 вращения, найти уравнение вращения тела $\varphi=f(t)$.
3. зная угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ тела и главный момент сил, действующих на него, найти момент инерции J_z тела.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Рассмотрим твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, проходящую через центр масс тела, причем центр масс движется в этой плоскости. Предположим, что тело совершает плоское движение под действием внешних сил $\vec{P}_1^E$, $\vec{P}_2^E$,…, $\vec{P}_n^E$.

Для описания плоского движения тела выбирают три системы координат: неподвижную глобальную систему $Ox_0y_0z_0$, сопровождающую систему $Cx_1y_1z_1$, движущуюся поступательно вместе с центром масс C, и локальную систему координат $Cxyz$, жестко связанную с телом (рис. 13.2).

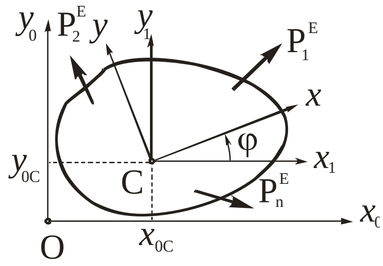

Рис. 13.2

Из кинематики известно, что плоское движение твердого тела можно представить в виде совокупности двух движений: поступательного движения вместе с сопровождающей системой координат $Cx_1y_1z_1$ и вращения вокруг подвижной оси Cz_1, проходящей через центр масс тела.

На основании теоремы о движении центра масс запишем два дифференциальных уравнения движения центра масс C тела:

$$m\ddot{x}_{0C} = \sum X_i^E \; ; \; m\ddot{y}_{0C} = \sum Y_i^E , \qquad (13.11)$$

где m − масса системы, $\ddot{x}_{0C}$, $\ddot{y}_{0C}$ − проекции ускорения центра масс на оси координат глобальной системы координат; X_i^E, Y_i^E, Z_i^E − проекции i-той внешней силы $\vec{P}_i^E$ на эти оси.

Третье дифференциальное уравнение можно получить, используя теорему об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении в проекции на ось Cz_1 (13.10):

$$\frac{dL_{z_1r}}{dt} = \sum M_{Cz_1i}^E , \qquad (13.12)$$

где $L_{z_1r} = J_{z_1}\omega = J_{z_1}\dot{\varphi}$ − кинетический момент тела относительно оси Cz_1 в относительном движении по отношению к сопровождающей системе координат $Cx_1y_1z_1$, J_{z_1} − момент инерции тела относительно этой оси, $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела, $\sum M_{Cz_1i}^E$ – алгебраическая сумма моментов внешних сил, приложенных к телу, относительно оси Cz_1.

Подставляя L_{z_1r} в (13.12), получаем: $\qquad J_{z_1}\ddot{\varphi} = \sum M_{Cz_1i}^E$.

Таким образом, дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{0C} = \sum X_i^E, \\ m\ddot{y}_{0C} = \sum Y_i^E, \\ J_{z_1}\ddot{\varphi} = \sum M_{Cz_1 i}^E. \end{cases} \tag{13.13}$$

После интегрирования этих дифференциальных уравнений и определения постоянных интегрирования получаем уравнения плоского движения твердого тела:

$$x_{0C}=x_{0C}(t),\ y_{0C}=y_{0C}(t),\ \varphi=\varphi(t).$$

Помимо уравнений (13.13) существуют другие системы дифференциальных уравнений, описывающих плоское движение твердого тела.

Эти системы могут быть получены, если за полюс принимать другие характерные точки твердого тела (мгновенный центр скоростей, мгновенный центр ускорений, центр Гамильтона и другие).