ЛЕКЦИЯ 24

Свободные малые колебания механических систем с одной степенью свободы

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку *M,* кроме восстанавливающей силы *F*, направленной к центру *O*, действует еще постоянная по модулю и направлению сила *P* (рис.1). Величина силы *F* по прежнему пропорциональна расстоянию от центра *O*, т.е. $F = c \cdot OM$. Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки *M* будет центр O_1 отстоящий от *O* на расстоянии $OO_1 = \delta_{ст}$, которое определяется равенством $\mathrm{c} \cdot \delta_{ст} = \mathrm{P}$ или $\delta_{ст} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{c}}$.

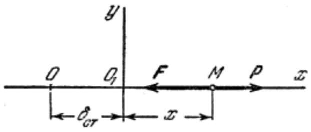

Рисунок 1

Величину $\delta_{ст}$ назовем ***статическим отклонением*** точки. Примем центр O_1 за начало отсчета и направим координатную ось O_1x в сторону действия силы $\vec{\mathrm{P}}$.Тогда $F_x = -c(x + \delta_{ст}),\ P_x = P$В результате, составляя дифференциальное уравнение движения и учитывая, что согласно равенству $\mathrm{c} \cdot \delta_{ст} = \mathrm{P}$, будем иметь: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$

Отсюда заключаем, что *постоянная сила P не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы F, а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы P на величину статического отклонения $\delta_{ст}$.*

Физический маятник. Представляет собой твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (центр тяжести) тела (рис.2).

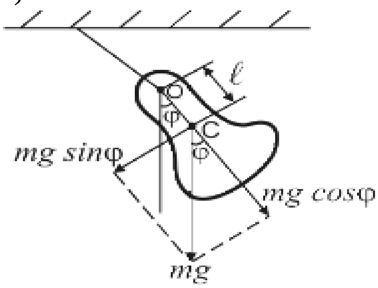

Рисунок 2

Колебания маятника, как и в случае математического маятника, совершаются под действием силы тяжести: mgsinφmgφ. Если маятник отклонить на некоторый угол φ от положения равновесия, то на него будет действовать момент силы: M=mgsinφl (или для малых углов M=mgφl), возвращающий его в исходное положение, где l – расстояние от точки подвеса *O* до центра тяжести маятника – *C*. Воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения $\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$, запишем уравнение колебаний физического маятника:

$$-mg\varphi l = J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \cdot \varphi = 0.$$

Решением этого уравнения является выражение вида $\varphi = \varphi_{max} \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0),$ где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ - частота собственных колебаний маятника.

Таким образом, маятник будет совершать гармонические колебания, период которых определяется выражением $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}},$

Приведенная длина физического маятника ($l_{пр}$) – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника: $l_{пр} = \frac{J}{ml}$.

Математический маятник. Это модель, в которой вся масса сосредоточена в материальной точке, колеблющейся на невесомой и недеформируемой нити по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 3).

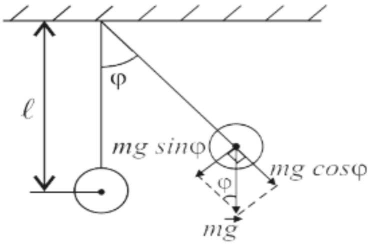

Рисунок 3

Момент силы, действующей на маятник равен, M= -mg$l$sinφ. Знак « – » указывает, что момент силы противоположен направлению поворота. Так как угол φ мал, то sinφ ≈φ и M= -mg$l$φ.

Основное уравнение динамики для вращающегося тела имеет вид $\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$,

Для математического маятника момент инерции J=ml^2, а угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Тогда как уравнение движения математического маятника запишется $-mgl\varphi = ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Перепишем это уравнение в следующем виде: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$. Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого является $\varphi = \varphi_{max}cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где частота собственных колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, т.е. период собственных колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Выражение определено только для малых углов φ.

Пружинный маятник. Это система, состоящая из груза массы *m*, прикрепленного к пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с массой груза.

Рисунок 4

При малом смещении шарика вправо относительно положения равновесия (рис.4) на него действует возвращающая сила *F*– сила упругости, пропорциональная смещению *x* и направленная к положению равновесия: F=-kx, где *k* – коэффициент упругости [Н/м].

Уравнение движения пружинного маятника определяется вторым законом Ньютона: F=ma.

Так как $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, то уравнение движения шарика примет вид $-kx = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot m$. Преобразуем это уравнение: $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$; или $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, где $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $_0$ - круговая частота собственных колебаний. Следовательно, период собственных колебаний пружинного маятника будет определяться выражением $T = \frac{2\pi}{\omega}$, или $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Запишем общий вид дифференциального уравнения гармонических колебаний: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$ Решением этого уравнения является функция $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, что можно проверить подстановкой. График $x(t)$ приведен на рисунке 4.1.

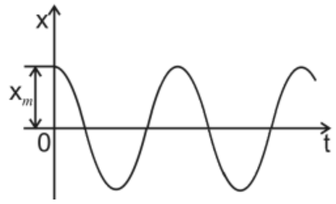

Рисунок 4.1

Свойствами маятников широко пользуются в различных приборах (в часах, в приборах для определения ускорения свободного падения, ускорений движущихся тел, колебаний земной коры, в гироскопических устройствах, в приборах для экспериментального определения момента инерции тел).

Сложение колебаний

Векторная диаграмма колебаний. Решение многих вопросов, в том числе сложение нескольких колебаний одного и того же направления, значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости (рис.5).

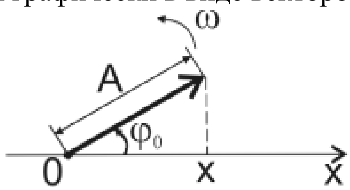

Рисунок 5

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси *x* в пределах от *+A* до *–A*, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону: $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью *x* угол φ, равный начальной фазе колебания. Вращение вектора *x* может быть задано уравнением $\varphi(t)=\varphi_0+\omega t$.

Сложение колебаний одного направления. Биения. Возможны случаи, когда тело участвует одновременно в нескольких колебательных процессах, происходящих вдоль одного и того же направления. Например, шарик, подвешенный на пружине к потолку вагона, качающегося на рессорах, участвует в собственных колебаниях относительно вагона и в колебаниях вагона относительно Земли. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$,

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$. (1)

Представим оба колебания на векторной диаграмме и построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\bar{A}$ (рис. 5.1).

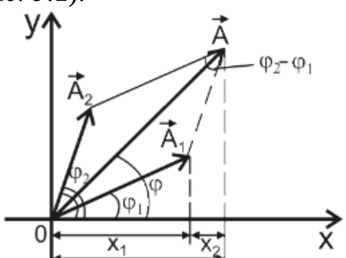

Рисунок 5.1

Так как проекция $\bar{A}$ на ось *x* равна сумме проекций слагаемых векторов, следовательно, вектор $\bar{A}$ представляет собой результирующее гармоническое колебание той же частоты ω, с амплитудой *A* и начальной фазой φ. Из построения видно, что по теореме косинусов можно записать:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cdot cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)],$$ или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (2)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}. \qquad (3)$$

Итак, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты, направленных по одной и той же прямой, результирующее движение – также гармоническое колебание с той же частотой ω и с амплитудой *A*, лежащей в пределах $(A_1-A_2) \le A \le (A_1+A_2)$. (4)

Если фазы обоих колебаний одинаковы $\varphi_2=\varphi_1$, то амплитуды колебаний просто складываются $A=A_1+A_2$. Если $\varphi_2-\varphi_1=\pi$, то колебания находятся в противофазе, и $A=|A_1-A_2|$, в частности, если $A_1=A_2$, то $A=0$, т.е. оба колебания взаимно уничтожаются.

Биениями называют периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами (рис.5.2) (*T* – период биения).

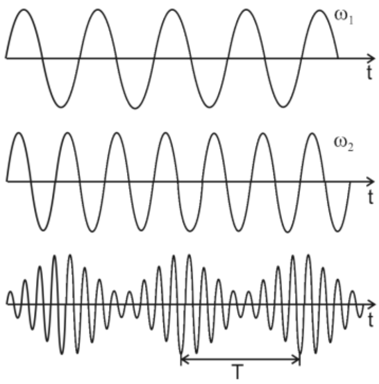

Рисунок 5.2

Биение возникает вследствие того, что разность фаз между двумя колебаниями с различными частотами все время изменяется так, что оба колебания оказываются в какой-то момент времени в фазе, через некоторое время – в противофазе, затем снова в фазе и т.д. Если A_1 иA_2 – амплитуды двух накладывающихся колебаний, то при одинаковых фазах колебаний амплитуда достигает наибольшего значения $A=A_1+A_2$, а когда фазы колебаний противоположны, амплитуда падает до наименьшего значения A_1-A_2. В простейшем случае, когда амплитуды обоих колебаний равны, их сумма достигает значения 2*A* при одинаковых фазах колебаний и падает до нуля, когда они противоположны по фазе.

Результат наложения колебаний можно записать в виде

$$Acos\omega_1 t + Acos\omega_2 t = 2Acos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \qquad (5)$$

Где ω_1 и ω_2- циклические частоты двух накладывающихся гармонических колебаний.

Если ω_1 и ω_2мало различаются, то величину $\left|2Acos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$ в уравнении (5) можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду (огибающую) колебания, происходящего по закону $cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$. Частота $\Omega=\omega_1-\omega_2$ называется циклической частотой биений. $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ период биений. По мере сближения частот ω_1 и ω_2 частота биения Ω уменьшается, исчезая при $\omega_1 \to \omega_2$ («нулевые» биения). Определение частоты биения между измеряемым и эталонным колебаниями – один из наиболее точных методов измерения частоты, широко применяемый на практике. Метод биений применяют для измерения емкости, индуктивности, для настройки музыкальных инструментов, при анализе слухового восприятия и т.д.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, т.е. такую систему, для задания положения которой нужны две координаты.

Свободные затухающие колебания. Реально свободные колебания под действием сил сопротивления всегда *затухают*. Объясняется это действием сил, тормозящих движение, например, сил трения в месте подвеса при колебаниях маятника, или силой сопротивления среды. В этом случае энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против этих сил. Поэтому свободные колебания под действием сил сопротивления всегда затухают. Затухание нарушает периодичность колебаний, потому они уже не являются периодическим процессом (рис.6).

Пусть точка совершает линейное гармоническое колебание в вязкой среде. Из опыта известно, что сила сопротивления среды зависит от скорости и направлена в сторону, противоположную скорости. При малых скоростях: $F_{сопр} = -rv = -r\frac{dx}{dt}$, где r – постоянная величина, называемая ***коэффициентом сопротивления среды.*** Уравнение колебаний: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$.

Введем обозначения: $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда дифференциальное уравнение затухающего колебания: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, (1) где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебания. При отсутствии трения β=0, уравнение примет вид уравнения для свободных незатухающих колебаний. В результате решения уравнения (1) получим зависимость смещения x от времени, то есть уравнение затухающего колебательного движения:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Выражение $A_0 e^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающего колебания. Амплитуда уменьшается по экспоненциальному характеру с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Огибающая на графике зависит от β. Чем она больше, тем круче огибающая, то есть колебания быстрее затухают (рис.6).

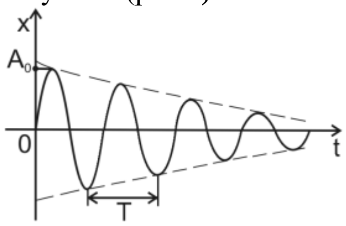

Рисунок 6

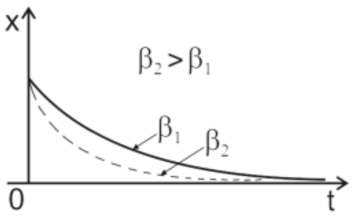

Рисунок 6.1

Путем подстановки функции (2) и ее производных по времени в уравнение (1), можно найти значение угловой частоты: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, а при $\beta=\omega_0$ период $T\Rightarrow\infty$. При дальнейшем увеличении β период становится мнимым, а движение точки ***апериодическим*** – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (рис. 10.2).

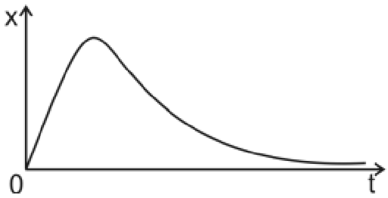

Рисунок 6.2

Критическое затухание («успокоение») имеет большое значение в измерительных приборах, таких как баллистические гальванометры, которые испытывают резкие импульсивные воздействия в положении нулевого смещения.

Наглядной характеристикой затухания является отношение значений двух амплитуд, соответствующих промежутку времени в один период. Это отношение называют ***декрементом затухания***θ: $\theta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$. Его натуральный логарифм есть безразмерная величина, называемая ***логарифмическим декрементом затухания***: $\delta = ln\frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T.$

Логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающего колебания убывает в *e* раз, называют ***временем релаксации.***

Тогда выражение для логарифмического декремента затухания примет вид: $\delta = \frac{T}{\tau}$ или $\delta = \frac{1}{N}$.

Добротность колебательной системы: $Q = \frac{\pi}{\delta}$.

Понятие о фазовой плоскости

Обычное описание движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости координаты от времени x=x(t) не является единственно возможным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных механических колебаний, определенными достоинствами обладает представление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени определяется парой соответствующих значений x и $v = \dot{x}$ и может быть представлено изображающей (фазовой) точкой в плоской декартовой системе координат x, *v*, если откладывать по оси абсцисс координату x, а по оси ординат – скорость*v*. Такая плоскость называется ***фазовой.***

В процессе движения рассматриваемой системы величины *x* и*v* изменяются и, соответственно, меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. ***Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией.***

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения x=x(t) нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости *v*=x(t), а затем исключить время из двух уравнений: x=x(t), $v = \dot{x}(t)$.

Функция *v*=*v*(x и описывает фазовую траекторию данного движения.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Совокупность фазовых траекторий, которая описывает все возможные движения данной системы ,называется фазовой диаграммой (фазовым портретом) данной системы.