1. Линейная алгебра

1.1. Матрица (основные понятия)

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$. Числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}$ называются элементами матрицы А. Размерность матрицы обозначают $(n \times m)$.

Две матрицы одинаковой размерности $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ признаются равными, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ в любой (каждой) сравниваемой паре соответствующих позиций.

Частные виды матриц:

Матрица, содержащая один столбец, называется *матрицей-столбцом*, а матрица, содержащая одну строку – *матрицей-строкой*, например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7,3 \end{pmatrix}$ – матрица-строка, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

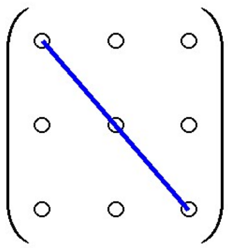
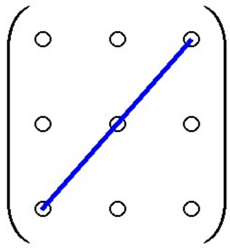
Матрица с равным количеством строк и столбцов называется *квадратной*.

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная нулевая,

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки равен номеру столбца (т. е. $i = j$), называются диагональными и образуют главную диагональ матрицы. Квадратная матрица называется диагональной, если все её недиагональные элементы равны нулю. Например, $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$ – квадратная диагональная матрица.

Диагональная матрица называется единичной, если все её диагональные элементы равны единице, т.е. матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная. Обозначение матрицы E зафиксировано за единичными матрицами разного размера (порядка).

Кроме главной диагонали, во всякой квадратной матрице выделяют и побочную диагональ:

 – главная диагональ;  – побочная диагональ

Треугольные матрицы заполнены ненулевыми значениями либо сверху, либо снизу от диагонали, например, $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – верхняя треугольная матрица, $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ – нижняя треугольная матрица.

Матрица имеет *ступенчатый вид*, если количество нулей в каждой следующей строке только возрастает.

Над матрицами возможны следующие *операции*:

Сложение. Суммой двух матриц одинаковой размерности называется третья матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, то есть $C = A + B \quad \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При этом, справедливо свойство коммутативности операции сложения матриц, то есть $A + B = B + A$.

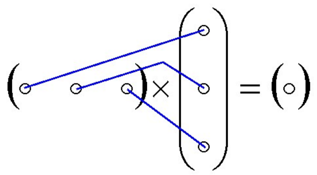
Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число α называется матрица B=αA, каждый элемент которой равен произведению данного числа α на соответствующий элемент матрицы A, то есть $B = \alpha \cdot A \quad \Rightarrow b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Данная операция обладает следующими свойствами:

$(\alpha \cdot \beta) A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$; $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$; $0 \cdot A = O$

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ размерности $\left(m\times n\right)$ на матрицу $B=(b_{lj})_{n,k}$ размерности $\left(n\times k\right)$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m,k}=A\cdot B$ размерности $\left(m\times k\right)$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij}=\sum\limits_{p=1}^{k}a_{ip}\cdot b_{pj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{ik}\cdot b_{kj},\quad i=1,...,m;\ j=1,...,k.$

Другими словами, элемент, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца матрицы произведения c_{ij}, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.



Операция произведения двух матриц одинаковой размерности возможна тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

В общем случае, произведение матриц некоммутативно, то есть $A\cdot B\neq B\cdot A$. Если же $A\cdot B=B\cdot A$, то матрицы называются перестановочными (коммутативными).

Транспонирование. Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ оказывается транспонированной, если у нее строки и столбцы поменять местами, то есть $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Известны полезные *свойства* операций над матрицами (если все действия хотя бы с одной стороны равенства допустимы по размерности):

1. $\left(A\cdot B\right)\cdot C=A\cdot\left(B\cdot C\right)$.
2. $\left(A+B\right)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.
3. $A\cdot\left(B+C\right)=A\cdot B+A\cdot C$.
4. $A\cdot E=E\cdot A=A$ (только для квадратной матрицы *A*).
5. $A\cdot O=O\cdot A=O$ (только для квадратной матрицы *A*).
6. $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$.

К *элементарным преобразованиям* матрицы, применяемым в некоторых специально оговоренных случаях, относятся следующие действия:

- Взаимная перестановка строк (столбцов);
- Умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
- Прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число, отличное от нуля.
- Отбрасывание нулевых строк (столбцов)

Кроме того, для матриц применяется вычисление *определителей* и *миноров*, определение *обратных матриц* и *ранга* – при выполнении некоторых условий (подробнее см. далее).

Пример.

Найти *A* + *B*; *2A* – *B*; $A \cdot B$; $B \cdot A$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7 & 3+3 \\ 7+2 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 & 6-3 \\ 14-2 & 10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 7 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 7 \cdot 7 + 5 \cdot 2 & 7 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 15 \\ 59 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 4 + 3 \cdot 7 & 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 36 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определитель (основные понятия)

Каждой квадратной матрице *A* порядка *n* можно поставить в соответствие число, называемое ее определителем и обозначаемое $|A|$. Определитель первого порядка матрицы (a_{11}) – это само число a_{11}. Определитель второго порядка, соответствующий матрице $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число, вычисленное следующим образом: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Элементы a_{11}, a_{12} образуют первую строку определителя, a_{21}, a_{22} – вторую строку, a_{11}, a_{21} – первый столбец, a_{12}, a_{22} – второй столбец, a_{11}, a_{22} – главную диагональ, a_{21}, a_{12} – побочную диагональ.

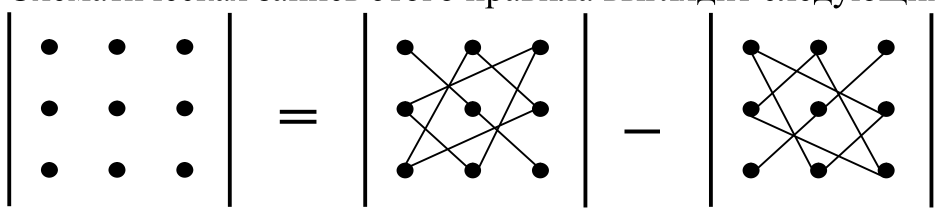
Определитель третьего порядка, соответствующий матрице A –это число, вычисленное *по правилу треугольника* следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя третьего порядка, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – его побочную диагональ. Первые три слагаемые – это произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Следующие три слагаемые – произведения элементов матрицы, стоящих на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, взятые со знаком минус.

Схематическая запись этого правила выглядит следующим образом:



произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, а также образующих равнобедренные треугольники, основания которых параллельны главной диагонали

произведения элементов матрицы, стоящих на побочной диагонали, а также образующих равнобедренные треугольники, основания которых параллельны побочной диагонали

Определитель можно вычислить, разложив его по элементам какой-либо строки (столбца). Рассмотрим понятия минора и алгебраического дополнения. Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij}, называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием из него i-той строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число, определяемое равенством $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Разложение определителя третьего порядка по элементам *первой* строки (аналогично можно выполнить разложение по элементам любой другой строки или столбца) можно представить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Известны полезные *свойства* определителей:

1. Определитель квадратной матрицы A не меняется при транспонировании: $|A^T| = |A|$.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель $|A|$ меняет знак: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

4. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ на число k равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad k = \mathrm{const}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ равны нулю, то и сам определитель равен нулю (вытекает из предыдущего свойства при $k = 0$): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

6. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя $|A|$ пропорциональны, то определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

7. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}' + a_{11}'' & a_{12}' + a_{12}'' & a_{13}' + a_{13}'' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' & a_{13}'' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Если к элементам какой-нибудь строки (столбца) определителя $|A|$ прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель k, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{21} & a_{12}+k\cdot a_{22} & a_{13}+k\cdot a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

9. Определитель $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения (определены ниже):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

10. Определитель произведения матриц A и B равен произведению их определителей: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Пример.

Найти определители матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - 7\cdot 3 = 20 - 21 = -1,$

2. Вычислим определитель матрицы B двумя способами.

По правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-1) = 7.$$

Разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 1 = 7.$$

Особенности определителей больших порядков

Число всех слагаемых в определителе n-го порядка равно $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} (дополнительным минором элемента a_{ij}) определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{ij}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} называется его минор со знаком $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Для определителей любого порядка имеют место все перечисленные выше свойства определителей.

Методы вычисления определителей n–го порядка:

1. *Метод понижения порядка* или *разложение определителя по элементам строки или столбца*: определитель n-го порядка $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

2. *Метод сведения к треугольному виду*. Используя свойства 1–9, определитель преобразуют к виду, когда элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, становятся равными нулю. Тогда определитель, преобразованный таким образом, равен произведению элементов, лежащих на главной диагонали.

1.3. Обратная матрица

Квадратная матрица A n-го порядка называется *вырожденной*, если определитель этой матрицы равен нулю, $|A| = 0$, и *невырожденной*, если $|A| \neq 0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для квадратной матрицы A $\left(|A| \neq 0\right)$, если выполняется соотношение: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка.

Если матрица A невырожденная, то существует и, притом, единственная обратная матрица A^{-1}, равная $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T$, где $A^* = \left(A_{ij}\right)$ – так называемая «присоединенная матрица» (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы, стоящих на тех же местах).

Операция обращения матрицы обладает следующими свойствами: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; $\left(\alpha \cdot A\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$; $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$; $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Процедуры нахождения обратной матрицы

«Длинный» алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью *присоединенной матрицы*:

1. Находим определитель матрицы A $\left(|A|\right)$ и проверяем условие невырожденности, то есть $|A| \neq 0$.
2. Находим M_{ij} – все миноры матрицы A.
3. Определяем алгебраические дополнения к элементам матрицы A, то есть вычисляем $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
4. Составляем матрицу алгебраических дополнений $A^* = \left(A_{ij}\right)$ и транспонируем ее: $\left(A^*\right)^T = \left(A_{ji}\right)$.
5. Делим каждый элемент матрицы на ее определитель $|A|$: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T$.

«Короткий» алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью *присоединенной матрицы* (подходит для исходных матриц размерности 3×3):

1. Находим определитель матрицы A $\left(|A|\right)$ и проверяем условие невырожденности, то есть $|A| \neq 0$.
2. Составляем матрицу из миноров (записанных в виде определителей) ко всем элементам исходной матрицы (M_{ij}), потом вычисляем миноры.

3. Составляем ответ: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T$, при переносе значений из (M_{ij}) внимательно относимся к положению элементов, производя одновременно и транспонирование, и смену знаков, где необходимо.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью *элементарных преобразований* (см. выше) строк матрицы:

Для данной матрицы A n-го порядка строим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = \left(A\middle|E\right)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Далее, используя систематические элементарные преобразования строк, приводим матрицу Γ_A к виду $\left(E\middle|B\right)$, что всегда возможно, если матрица невырождена. Тогда $B = A^{-1}$.

Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

Если A, B – известные матрицы, а X – неизвестная, то равенство вида $A \cdot X = B$ называется матричным уравнением.

Выделяют следующие *простейшие типы* матричных уравнений:

1. $A \cdot X = B$. Матрица A – квадратная и невырожденная, то есть $|A| \neq 0$. Для решения этого уравнения обе его части умножаются на A^{-1} слева. Получается равенство $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как произведение $A^{-1} \cdot A = E$, то матрица неизвестных $X = A^{-1} \cdot B$.

2. $X \cdot A = B$. Матрица A – квадратная и невырожденная, то есть $|A| \neq 0$. Для решения этого уравнения обе его части умножаются на A^{-1} справа. Получается равенство $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Так как произведение $A \cdot A^{-1} = E$, то матрица неизвестных $X = B \cdot A^{-1}$.

3. $A \cdot X \cdot B = C$. Матрицы A и B – квадратные и невырожденные, то есть $|A| \neq 0, |B| \neq 0$. Для решения этого уравнения обе его части умножаются на A^{-1} слева. Получается равенство $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$. Затем обе части получившегося уравнения умножаются на B^{-1} справа. Получается уравнение $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Отсюда $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

1.4. Ранг матрицы

Пусть в матрице *A* размерности $(m \times n)$ выбраны *k* строк и *k* столбцов, причем $k \le \min(m,n)$. Тогда элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка. Любой определитель M_k этой матрицы называется *минором k* -го *порядка* матрицы *A*.

Рангом матрицы A называется число, равное максимальному порядку r отличных от нуля миноров M_k этой матрицы. Обозначение: $r = r(A) = \operatorname{rang} A$.

Для нахождения ранга матрицы имеется несколько методов.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице *A* элемент $a_{ij} \ne 0$, тогда $M_1 \ne 0$ и $r(A) \ge 1$. Окаймляем этот элемент элементами соседних столбцов и строк (например, $(j+1)$-го столбца и $(i+1)$-й строки), стремясь получить ненулевой минор 2-го порядка:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}.$$

Если $M_2 = 0$, то присоединяем другие строки и столбцы, перебирая все возможные миноры 2-го порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то $r(A) = 1$; если же существует хотя бы один минор 2-го порядка, отличный от нуля, то $r(A) \ge 2$.

Выбираем отличный от нуля минор 2-го порядка M_2 и окаймляем его элементами соседних строк и столбцов до минора 3-го порядка и так до тех пор, пока не будет выполнено условие: $M_r \ne 0$, но все $M_{r+1} = 0$.

Метод элементарных преобразований. Некоторые преобразования матрицы не меняют ее ранга, что следует из свойств определителей:

- транспонирование;
- отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.
- взаимная перестановка строк (столбцов);
- умножение строки (столбца) на число $\alpha \ne 0$;
- прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;
- отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

Для определения ранга матрицы A *методом элементарных преобразований* (в некоторых случаях полезно применять его только к строкам матрицы) следует:

1. Переставить строки (столбцы) так, чтобы в верхнем левом углу матрицы был ненулевой элемент.
2. Все элементы первого столбца, кроме a_{11}, обратить в ноль с помощью элементарных преобразований строк.
3. Переставить строки со 2-й по m и столбцы со 2-го по n так, чтобы $a_{22} \neq 0$. Повторить предыдущую операцию со вторым столбцом: во втором столбце все элементы, кроме a_{12} и a_{22}, обратить в ноль.

Окончательно после многократного применения указанной процедуры и отбрасывания нулевых строк преобразованная матрица будет иметь ступенчатый вид с ненулевыми элементами в верхних r строках:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1,r-1} & \tilde{a}_{1r} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2,r-1} & \tilde{a}_{2r} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{a}_{r-1,r-1} & \tilde{a}_{r-1,r} & \ldots & \tilde{a}_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{a}_{rr} & \ldots & \tilde{a}_{rn} \end{pmatrix}$$

Тогда ранги исходной и итоговой матриц совпадают между собой ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$) и определяются количеством ненулевых строк r.

1.5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений называется такое упорядоченное множество чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, при подстановке которых в каждое из уравнений системы получаются верные равенства – это и определение, и достаточно удобный способ проверки результата работы со СЛАУ по поиску её решения.

Система может быть записана в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных слагаемых.

Ещё компактней СЛАУ может быть представлена расширенной матрицей системы $\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Система линейных уравнений (1) называется *неоднородной,* если матрица B не является нуль-матрицей O, и называется *однородной,* если $B = O$.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет решения (хотя бы одно), и называется *несовместной* – в противном случае. Совместная СЛАУ, в свою очередь, называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и называется *неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы дает *теорема Кронекера-Капелли*: ***Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.***

Универсальный метод решения линейных систем, основанный на применении элементарных преобразований к уравнениям системы – *метод Гаусса.*

Элементарными преобразованиями системы, не меняющими множество её решений, являются следующие:

- перемена местами двух любых уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на произвольное число $k \neq 0$;
- прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число $k \neq 0$.

Элементарным преобразованиям уравнений соответствуют элементарные преобразования *строк* расширенной матрицы системы $\left(A|B\right)$. Заметим, что такие элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

Методом Гаусса заключается в преобразованиях расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ (процедура описана в разделе, посвященном рангу матрицы) к ступенчатому виду, когда количество нулевых значений в каждой новой строке только возрастает. Надо обратить внимание на три значения: количество ненулевых строк в основной части матрицы (укажет ранг матрицы A); количество ненулевых строк в расширенной матрице (укажет ранг расширенной матрицы $\left(A|B\right)$, он может оказаться на единицу больше – тогда СЛАУ следует признать *несовместной*); количество неизвестных в СЛАУ (может оказаться меньше совпадающих между собой рангов матриц A и $\left(A\,|\,B\right)$ – признак того, что СЛАУ имеет много решений). Ступенчатый вид расширенной матрицы также позволяет легко записать решение СЛАУ, если оно существует.

Совместные определенные системы n линейных уравнений с n неизвестными

В этом случае матрица A – квадратная. Ненулевой определитель матрицы A называется *главным определителем системы* линейных уравнений и обозначается символом Δ. Выделяют следующие методы решения совместных определенных систем n линейных уравнений с n неизвестными:

1. *Правило Крамера*. Если главный определитель системы линейных уравнений не равен нулю, то система совместна и определенна, причем единственное решение вычисляется по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Здесь Δ_i - определители, получаемые из главного определителя системы Δ заменой i-го столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных слагаемых.

2. *Метод Гаусса – Ньютона*, в котором матрицу A приводят к диагональному виду. При этом сразу получается решение системы уравнений.

3. *Матричный метод*, описанный в разделе, посвященном обратным матрицам.

Пример. Показать, что система уравнений имеет единственное решение и найти его по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Решение

Составим главный определитель системы и вычислим его: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Чтобы найти решение по формулам Крамера, составим и вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Применим формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: $(4, 2, 1)$.

Пример. Решить предыдущую систему матричным методом.

Решение

Запишем матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $\Delta = |A| = 5 \neq 0$, значит матрица А невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов a_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 3;$$

$$A_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot2-1\cdot1=1;$$

$$A_{23}=\left(-1\right)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-\left(1\cdot1-\left(-1\right)\cdot1\right)=-2;$$

$$A_{31}=\left(-1\right)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\left(-1\right)\cdot1-1\cdot1=-2;$$

$$A_{32}=\left(-1\right)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\left(1\cdot1-1\cdot2\right)=1;$$

$$A_{33}=\left(-1\right)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1-\left(-1\right)\cdot2=3.$$

Составим обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

Вычислим матрицу неизвестных:

$$X=\grave{A}^{-1}\cdot\hat{A}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot11-2\cdot8\\ -3\cdot3+1\cdot11+1\cdot8\\ 1\cdot3-2\cdot11+3\cdot8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=1$, то есть результат решения совпадает с ответом, полученным по формулам Крамера.

Ответ: $\left(4,2,1\right)$.