

2. Векторная алгебра

Вектором \vec{a} называется направленный отрезок прямой. Если точка A – начало вектора, точка B – его конец, то вектор \vec{a} обозначают $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Длиной, или модулем вектора $|\overrightarrow{AB}|$ называется число, равное длине отрезка AB . Если у вектора совпадают начало и конец, то его называют нуль-вектором и обозначают $\vec{0}$. Нуль-вектор не имеет определенного направления, его модуль равен нулю.

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются равными, если они имеют равные модули и сонаправлены, т. е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются противоположными, если они имеют равные модули и противоположные направления, то есть $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной плоскости.

Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, длина которого равна $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, и его направление совпадает с направлением вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ получается нуль-вектор.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Поставим в соответствие каждой из координатных осей Ox, Oy, Oz единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, чтобы их направления совпадали с положительным направлением соответствующей оси. Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *базисными векторами* или *базисом*. Любой вектор в пространстве может быть задан своими координатами $\vec{a} = \{x, y, z\}$, где x, y, z – проекции вектора \vec{a} на оси Ox, Oy, Oz соответственно. Также вектор \vec{a} может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Необходимое и достаточное условие *коллинеарности* двух векторов: векторы $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны тогда, и только тогда, когда пропорциональны их соответствующие координаты, т. е. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$.

Пример. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -7\vec{a} + 5\vec{b}$, если $\vec{a} = \{0, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{-3, -2, 6\}$?

Решение

Векторы коллинеарны, если отношения их координат равны между собой.

Найдем векторы \vec{c} и \vec{d} :

$$\vec{c} = 4 \cdot \{0, -3, 1\} + 2 \cdot \{-3, -2, 6\} = \{0, -12, 4\} + \{-6, -4, 12\}$$

$$\vec{c} = \{-6, -16, 16\}$$

$$\vec{d} = -7 \cdot \{0, -3, 1\} + 5 \cdot \{-3, -2, 6\} = \{0, 21, -7\} + \{-15, -10, 30\}$$

$$\vec{d} = \{-15, 11, 23\}$$

Так как $\frac{-6}{-15} \neq \frac{-16}{11} \neq \frac{16}{23}$, то векторы не коллинеарны.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, не лежащие в общей плоскости (*некомпланарные*) взятые в указанном порядке, образуют правую (левую) тройку, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Над векторами можно производить следующие линейные операции:

Сумма двух векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ определяет вектор $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

Разность двух векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ определяет вектор $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$.

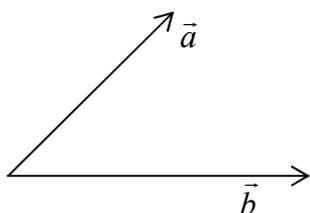
Произведение вектора \vec{a} на число λ определяет вектор $\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1\}$.

Длину (модуль) вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ по его координатам можно вычислить по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Если точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – начало и конец вектора \overline{AB} соответственно, то координаты вектора и его модуль находят по формулам

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Для векторов определены три разных операции, называемых умножением (произведением).



Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме имеет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

С помощью скалярного произведения можно:

1) найти угол φ между векторами \vec{a} и \vec{b} :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

2) найти проекцию вектора \vec{a} на заданное направление вектора \vec{b} :

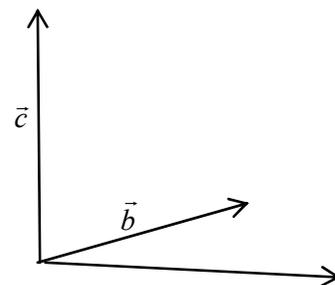
$$i \delta_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

3) доказать перпендикулярность векторов \vec{a} и \vec{b} (необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов): $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий условиям:

1) вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} ;

2) вектор \vec{c} направлен так, что три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;



3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , то есть модуль вектора \vec{c} численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} обозначают символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение можно выразить через координаты векторов \vec{a} и

$$\vec{b} \text{ по формуле } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные базисные векторы.

С помощью векторного произведения можно:

1) найти площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$

2) найти площадь треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

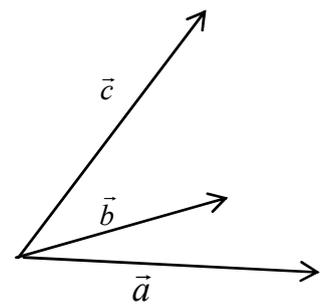
3) доказать коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{b} (необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов):

векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда, и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} .

Смешанное произведение обозначают $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в



координатной форме можно вычислить по формуле $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

С помощью векторного произведения можно:

1) найти объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$$

2) найти объем пирамиды, построенной на трех векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$$

3) доказать компланарность трех векторов (необходимое и достаточное условие компланарности): векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда, и только тогда, когда $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Пример. Найти косинус угла между векторами \vec{AB} и \vec{AC} , если $A(0, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 2, 0)$.

Решение

Найдем векторы \vec{AB}, \vec{AC}

$$\vec{AB} = \{0 - 0, 2 - 1, 1 - 0\} = \{0, 1, 1\}$$

$$\vec{AC} = \{1 - 0, 2 - 1, 0 - 0\} = \{1, 1, 0\}$$

Косинус угла вычисляется по формуле $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$, где

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB_x \cdot AC_x + AB_y \cdot AC_y + AB_z \cdot AC_z = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{AC_x^2 + AC_y^2 + AC_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Ответ: угол между векторами \vec{AB} и \vec{AC} равен 60° , косинус угла равен $\frac{1}{2}$.

Пример. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение

Площадь параллелограмма находится через векторное произведение векторов $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Используем в произведении векторы $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и свойства векторного произведения:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) &= (2\vec{p} + 3\vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{q}) = 2 \cdot (\vec{p} \times \vec{p}) - 4 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) + 3 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) - \\ &6 \cdot (\vec{q} \times \vec{q}) = -4 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) - 3 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = -7 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \end{aligned}$$

$$S = |-7 \cdot (\vec{p} \times \vec{q})| = 7|(\vec{p} \times \vec{q})| = 7 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\widehat{\vec{p} \times \vec{q}}) = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

Ответ: Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , равна $7\sqrt{3}$.

Пример. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{-3, 3, 3\}$, $\vec{b} = \{-4, 7, 6\}$ и $\vec{c} = \{3, 0, -1\}$?

Три вектора компланарны, если их смешанное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \cdot 0 - 3 \cdot 7 \cdot 3 - (-(-3) \cdot 6 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) \cdot (-1)) = 21 + 54 - 0 - 63 + 0 - 12 = 0.$$

Ответ: Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, так как их смешанное произведение равно нулю.