3. Аналитическая геометрия

3.1. Аналитическая геометрия в пространстве

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* заданы произвольная поверхность *S* и уравнение $F(x,y,z)=0$.

Будем говорить, что данное уравнение является *уравнением поверхности S* в заданной стстеме координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x,y,z)$, лежащей на поверхности S, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Пусть задано множество *D* упорядоченных пар чисел (x,y). Соответствие *f*, которое каждой паре чисел $(x,y)\in D$ ставит в соответствие одно и только одно действительное число *z*, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве *D* и записывается в виде $z=f(x,y)$. При этом *x*, *y* называются *независимыми переменными (аргументами)*, а *z* – *зависимой* переменной (*функцией*). Множество $D(f)$ называется *областью определения функции*. Множество значений, принимаемых *z* в области определения, называется *множеством значений* этой функции и обозначается $E(f)$. Функция двух переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0,y_0)\in D$ в системе координат *Oxyz* соответствует точка $M(x_0,y_0,z_0)$, где $z_0=f(x_0,y_0)$ – аппликата точки *M*. Совокупность всех таких точек пространства представляет собой некоторую поверхность, которая геометрически изображает данную функцию $z=f(x,y)$, то есть является ее *графиком*.

Линия в пространстве может быть определена как линия пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким-либо уравнением. Пусть $F(x,y,z)=0$ и $\Phi(x,y,z)=0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии *L*. Тогда пара уравнений $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$ называется *уравнением линии в пространстве,* если им удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии *L*, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии *L*.

Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$.

Уравнение плоскости, проходящей *через точку* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}=\{A,B,C\}$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Уравнение плоскости «в отрезках»: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a,b,c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат Ox,Oy,Oz соответственно.

Нормальное уравнение плоскости (*p* – это расстояние от начала координат до плоскости, $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – единичный вектор нормали к плоскости): $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$.

Нормальный вид общего уравнения плоскости (знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного слагаемого *D*): $\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *до плоскости*, заданной общим уравнением: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Уравнение плоскости, проходящей *через три точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Угол φ *между плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$: $\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Расстояние между двумя *параллельными плоскостями* $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$: $d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Прямая в пространстве

Общие уравнения прямой: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Параметрические уравнения прямо, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и *имеющей направляющий вектор* $\vec{s} = \{l, m, n\}$ *й:* $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$

Канонические уравнения прямой, *проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и *имеющей направляющий вектор* $\vec{s} = \{l, m, n\}$: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

Канонические уравнения прямой, *проходящей через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Угол φ *между прямыми* с направляющими векторами $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$: $\cos\varphi = \dfrac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

Условие параллельности двух прямых с направляющими векторами $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых с направляющими векторами $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, заданную общими уравнениями $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ имеет вид:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Координаты *точки пересечения прямой* $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и *плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$

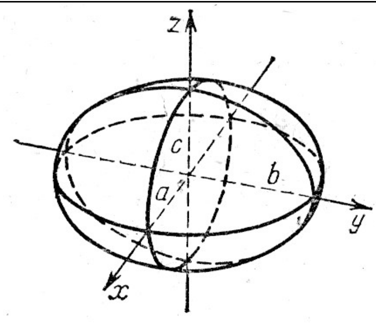
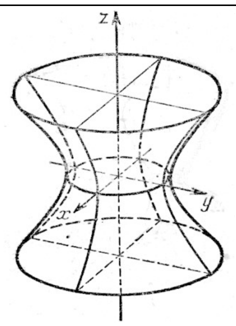
$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \text{где } t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

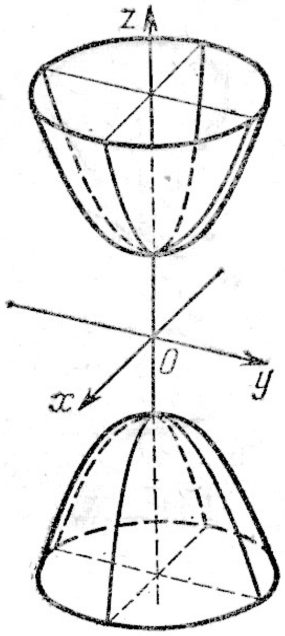
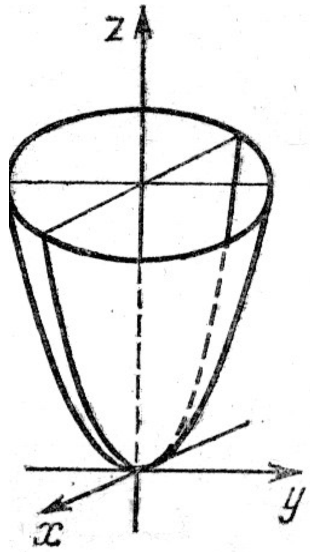
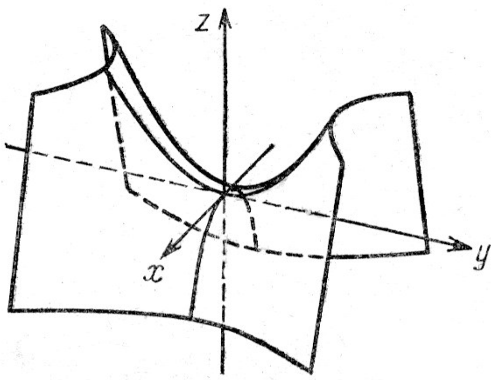
Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$: $\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

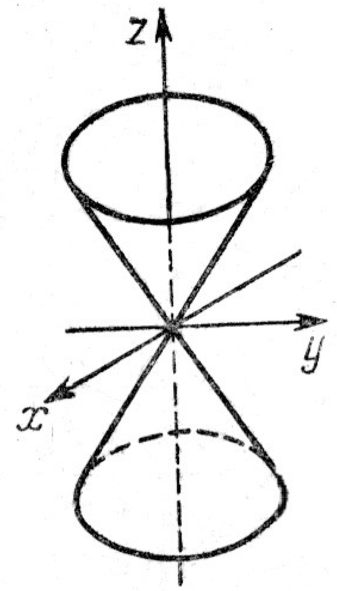
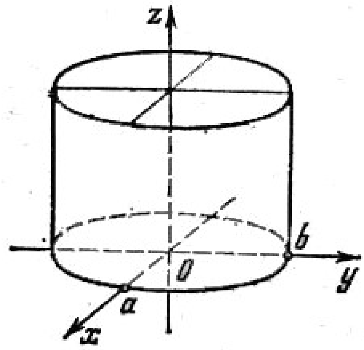
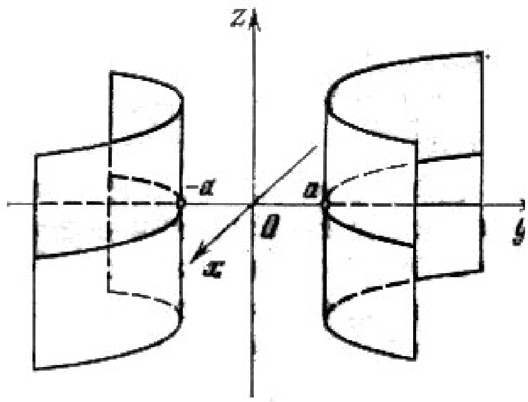
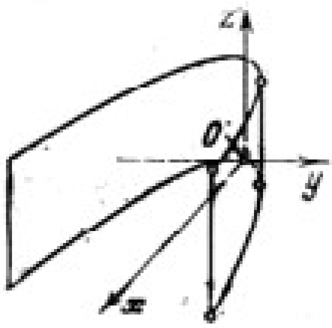
Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и *плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Условие параллельности прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и *плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$: $Al+Bm+Cn=0$.

Поверхности второго порядка

НАЗВАНИЕ	**ВИД**	**УРАВНЕНИЕ**
Эллипсоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{z^2}=1$
Однополостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Двуполостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Эллиптический параболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=pz$
Гиперболический параболоид	 б)	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=pz$

Конус		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Эллиптический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Гиперболический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Параболический цилиндр		$y^2=2px, \quad p\neq 0$

Пример. Даны четыре точки $A_1(6,6,5)$, $A_2(4,9,5)$, $A_3(4,6,11)$, $A_4(6,9,3)$ Составить уравнения: плоскости, проходящей через точки $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ и A_3; прямой, проходящей через точки A_1 и A_2; прямой $\mathrm{A}_4\mathrm{M}$, перпендикулярной к плоскости $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$; прямой A_3N, параллельной прямой $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$; плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$. Вычислить: синус угла между прямой $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ и плоскостью $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$; косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$.

Решение

1. Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты *A*, *B*, *C* одновременно не равны нулю.

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим уравнение плоскости по трем точкам $\mathrm{A}_1(6,6,5)$, $\mathrm{A}_2(4,9,5)$ и $\mathrm{A}_3(4,6,11)$.

$$\begin{vmatrix} x-6 & 4-6 & 4-6 \\ y-6 & 9-6 & 6-6 \\ z-5 & 5-5 & 11-5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-6 & -2 & -2 \\ y-6 & 3 & 0 \\ z-5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$6\big((x-6)\cdot(-3) - (-2)\cdot(y-6)\big) + (-2)\cdot\big((y-6)\cdot 0 - (-3)\cdot(z-5)\big) =$$
$$= 6\cdot(-3x + 18 + 2y - 12) + 2\cdot(3z - 15) =$$
$$= 6\cdot(-3x + 2y - 6) + 2\cdot(3z - 15) = -18x + 12y + 36 + 6z - 30$$
$$= 0$$

$-18x + 12y + 6z + 6 = 0.$

2. Если на прямой в пространстве выделить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты любой точки на прямой должны удовлетворять уравнению

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$

Для точек $\mathrm{A}_1(6,6,5), \mathrm{A}_2(4,9,5)$ получим уравнение прямой:

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-6}{9-6} = \frac{z-5}{5-5}.$$

Заметим, что один из знаменателей обращается в ноль. Эта запись не подразумевает проведения некорректного алгебраического «деления на ноль», а трактуется как постоянное равенство нулю соответствующего числителя. Оставшееся равенство принимает вид:

$$y-6=\frac{x-6}{-2}(-3)$$

$$y-6=(x-6)\frac{3}{2};$$

$2y-12=3x-18;$

$$2y-3x+6=0.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки A_1, A_2, имеет вид

$$2y-3x+6=0, z=5.$$

3. Если прямая перпендикулярна к плоскости, значит, она параллельна нормальному вектору этой плоскости $\vec{n}$. Известно, что уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3, имеет вид $-18x+12y+6z+6=0$. Нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=\{-18;12;6\}$. Составим уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{n}$, проходящей через точку $A_4(6,9,3)$:

$$\frac{x-6}{-18}=\frac{y-9}{12}=\frac{z-3}{6}.$$

4. Уравнение прямой проходящей через точки A_1, A_2, имеет вид $\frac{x-6}{-2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-5}{0}$, где $\overrightarrow{\{-2;-3;0\}}$ – направляющий вектор прямой. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку A_3, параллельно вектору $\overrightarrow{\{-2;-3;0\}}$, имеет вид: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-11}{0}$. Аналогично п. 2, числитель в третьем составляющем приравниваем нулю и преобразуем оставшееся равенство $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-6}{-3}$

$3(x-4)=2(y-6)$

$3x-12-2y+12=0$

$\begin{cases}3x-2y=0\\ z=11\end{cases}$ – уравнение прямой A_3N, параллельной прямой A_1, A_2.

5. Прямая, проходящая через точки A_1 и A_2 имеет вид:

$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-11}{0}$, где $\overrightarrow{\{-2;-3;0\}}$ – направляющий вектор этой прямой. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку $A_4(6,9,3)$, перпендикулярно к данной прямой, имеет вид:

$$-2(x-6)+(-3)\cdot(y-9)+0\cdot(z-3)=0$$

$$-2x+12-3y+27=0$$

$$-2x-3y+39=0.$$

6. Найдем синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид $-18x+12y+6z+6=0$. Прямая, проходящая через точки A_1 и A_4 имеет уравнение $\frac{x-6}{6-6}=\frac{y-6}{9-6}=\frac{z-5}{3-5}$. Отсюда ясно, что Направляющий вектор прямой A_1A_4 $\{0,3,-2\}=\vec{p}$, а нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ $\{-18,12,6\}=\vec{n}$, синус угла между прямой и плоскостью: $\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}$.

Вычислим скалярное произведение $\vec{n}\cdot\vec{p}=-18\cdot0+12\cdot3+6\cdot(-2)=36-12=24$. Модули векторов $|\vec{n}|=\sqrt{(-18)^2+12^2+6^2}=\sqrt{324+144+36}=\sqrt{504}$,
$|\vec{p}|=\sqrt{0^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$$\sin\varphi=\frac{24}{\sqrt{6552}}=\frac{24}{81}\approx0{,}3, \varphi\approx17^{\circ}.$$

7. Найдем косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $-18x+12y+6z+6=0$. Плоскость *Oxy* имеет уравнение вида: $z=0$.

Формула косинуса угла между плоскостями

$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $A_1=-18, B_1=12, C_1=6$, $A_2=0, B_2=0, C_2=1$

$$\cos\varphi=\frac{-18\cdot0+12\cdot0+6\cdot1}{\sqrt{(-18)^2+12^2+6^2}+\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{504}+1}=\frac{1}{23{,}45}\approx0{,}04\ ,\varphi\approx87{,}5^{\circ}.$$

3.2 Аналитическая геометрия на плоскости с декартовыми координатами

Прямая на плоскости с ДСК

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координаты точки $C(x,y)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, в отношении $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$: $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda}, \end{cases}$ $\lambda \neq -1$.

Координаты середины отрезка АВ, соединяющего точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Условие принадлежности трёх точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ одной прямой: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Площадь треугольника с вершинами $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (знак выбирается так, чтобы площадь была неотрицательной):

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A;B\}$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{l;m\}$: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{l;m\}$: $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \end{cases}$ $t\in(-\infty,\infty)$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, где $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ – угол наклона прямой к оси Ox: $y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение прямой "в отрезках", где $A(a;0)$ и $B(b;0)$ – координаты точек пересечения прямой с осями Ox и Oy: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$.

Нормальное уравнение прямой, где р – расстояние от начала координат до прямой, α – угол между осью Ox и перпендикуляром к прямой, проходящим через начало координат: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

Нормальный вид общего уравнения прямой (знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного слагаемого C): $\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Координаты точек пересечения прямых, заданных общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$: $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$.

Координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$: $x_0 = \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \quad y_0 = \dfrac{b_2 k_1 - b_1 k_2}{k_1 - k_2}$.

Условия параллельности прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ и уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}, \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad$ или $\quad k_1 = k_2$.

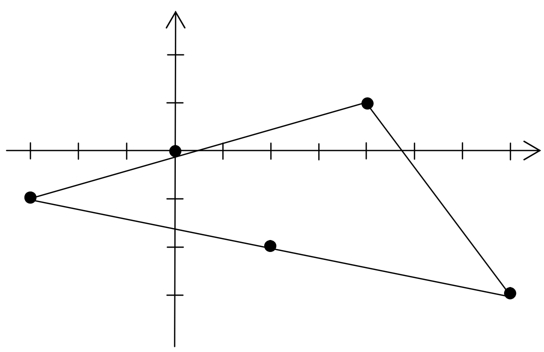
Условия перпендикулярности прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_1k_2 = -1$.

Острый угол α между прямыми, заданными своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \quad \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|, \text{ где } k_1k_2 \neq -1.$$

Если $k_1k_2 = -1$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пример. Даны вершины треугольника ABC: $\mathrm{A}(4,1), \mathrm{B}(-3,-1), \mathrm{C}(7,-3)$. Найти: уравнение стороны *AB*; уравнение высоты *CH*; уравнение медианы *AM*; точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*; уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*; расстояние от точки *C* до прямой *AB*.



Решение

1. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Наша прямая проходит через точки *A* и *B*, а значит, для двух произвольных точек на этой прямой выполняются равенства $y_1 = kx_1 + b$ и $y_2 = kx_2 + b$, их можно записать в виде системы (решив эту систему относительно k и b, мы найдем уравнение прямой): $\begin{cases} kx_1 + b = y_1 \\ kx_2 + b = y_2 \end{cases}$ В нашем случае найдем уравнение прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(4;\ 1), \mathrm{B}(-3;-1)$: $\begin{cases} k \cdot 4 + b = 1 \\ k \cdot (-3) + b = -1 \end{cases}$ отсюда $k = \frac{2}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$. Таким образом, уравнение прямой проходящей через точки *A* и *B* имеет вид $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$.

2. Найдем уравнение высоты *CH*. Так как прямая *CH* перпендикулярна прямой *AB*, воспользуемся следующим приемом. Если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то перпендикулярная ей прямая будет иметь вид

$y = \left(-{}^{1}/_{k}\right)x + d$. Таким образом, перпендикулярная к *AB* прямая будет иметь уравнение $y = -\frac{7}{2}x + d$. Постоянную найдем d из условия, что высота *CH* проходит через точку $\mathrm{C}(7; -3)$: $-3 = -\frac{7}{2} \cdot 7 + d$, откуда $d = 22\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение СН: $y = -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2}$.

3. Медиана АМ проходит через две точки – точку *A* и середину отрезка *BC*. Найдем координаты середины *BC* по формуле: $x = (x_1 + x_2)/2\,, y = (y_1 + y_2)/2$, координаты точки $M(2; -2)$.

Теперь ищем уравнение прямой, идущей через две точки $\mathrm{A}(4;\ 1)$ и $M(2; -2)$ указанным в п. 1 способом: $\begin{cases} 4k + b = 1 \\ 2k + b = -2 \end{cases}$, откуда $k = \frac{3}{2}$ и $b = -5$. Уравнение прямой *AM* $y = \frac{3}{2}x - 5$.

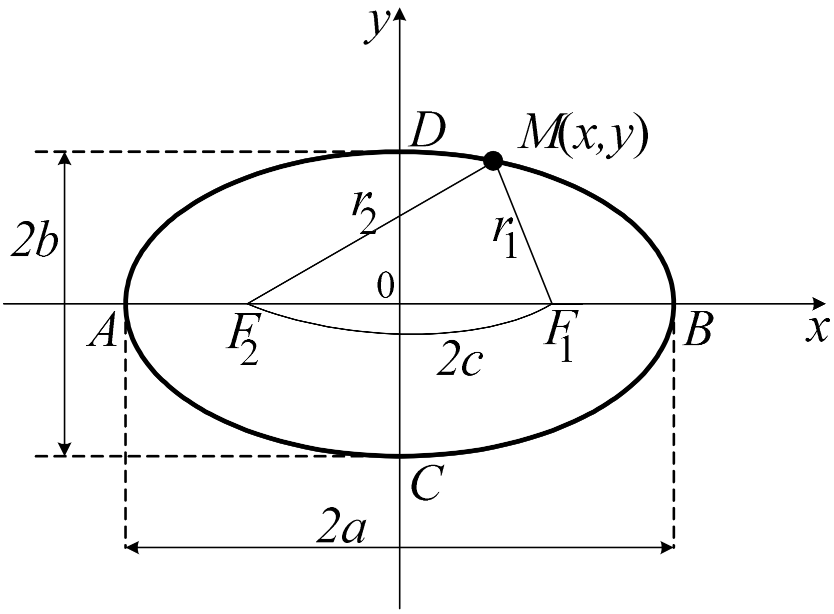
4. Найдем точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*. Прямая *AM* имеет уравнение $y = \frac{3}{2}x - 5$, а прямая *CH* – $y = -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2}$. Точку пересечения найдем, решив систему: $\begin{cases} \frac{3}{2}x - 5 - y = 0 \\ -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2} - y = 0 \end{cases}$. Точка пересечения $N\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

5. Найдем уравнение прямой, проходящей через вершину $\mathrm{C}(7, -3)$ параллельно стороне *AB*. Уравнение прямой проходящей через точки *A* и *B* имеет вид $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$, прямая проходящая через точку $\mathrm{C}(7, -3)$ и параллельная этой прямой сохраняет угловой коэффициент: $y - 7 = \frac{2}{7} \cdot (x + 3)$, т. е. $y = \frac{2}{7}x + 7\frac{6}{7}$.

6. Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, определяется так: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Найдем расстояние от точки $C(7, -3)$ до прямой *AB* $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$, преодолевая неоднозначность обозначений: коэффициенты уравнения прямой и вершины треугольника обозначены одинаково. В нашем случае коэффициенты уравнения прямой $\mathrm{A} = \frac{2}{7}\,, \mathrm{B} = -1, \mathrm{C} = -\frac{1}{7}$; координаты внешней точки $x_0 = 7, y_0 = -3$ и искомое расстояние от точки *C* до прямой *AB* $d = \frac{\left|\frac{2}{7} \cdot 7 + (-1) \cdot (-3) - \frac{1}{7}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + (-1)^2}} = = \frac{\left|2 + 3 - \frac{1}{7}\right|}{\sqrt{\frac{4}{49} + 1}} = \frac{35}{\sqrt{53}} \approx 4{,}8.$

Кривые второго порядка на плоскости с ДСК

Эллипс – геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ (называемых фокусами эллипса) постоянна и равна $2a$, ($a > c$).

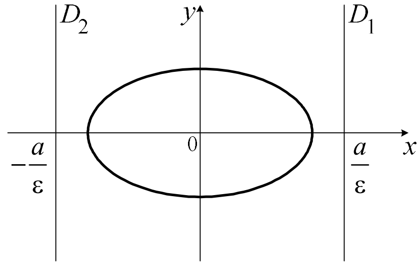


$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$ и $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = 2c,$ где $c^2 = a^2 - b^2$.

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Элементы эллипса: точка O – центр эллипса; точки A, B, C, D – вершины эллипса; точки $F_1(+c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ – фокусы; $2c$ – фокусное расстояние; $AB = 2a$ и $CD = 2b$ – большая и малая оси; a и b – большая и малая полуоси; $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, $(\varepsilon < 1)$ – эксцентриситет эллипса (чем больше ε, тем больше эллипс вытянут вдоль большой оси).

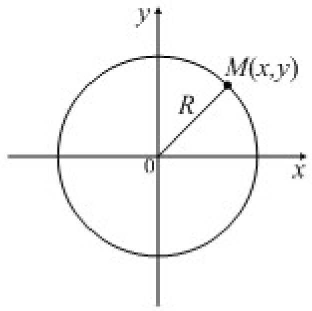
$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения правой и левой директрис



Параметрические уравнения эллипса: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$, Здесь t – параметр, $t \in [0, 2\pi)$; (t - угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox);

Каноническое уравнение эллипса со смещенным центром: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки O – центра окружности.

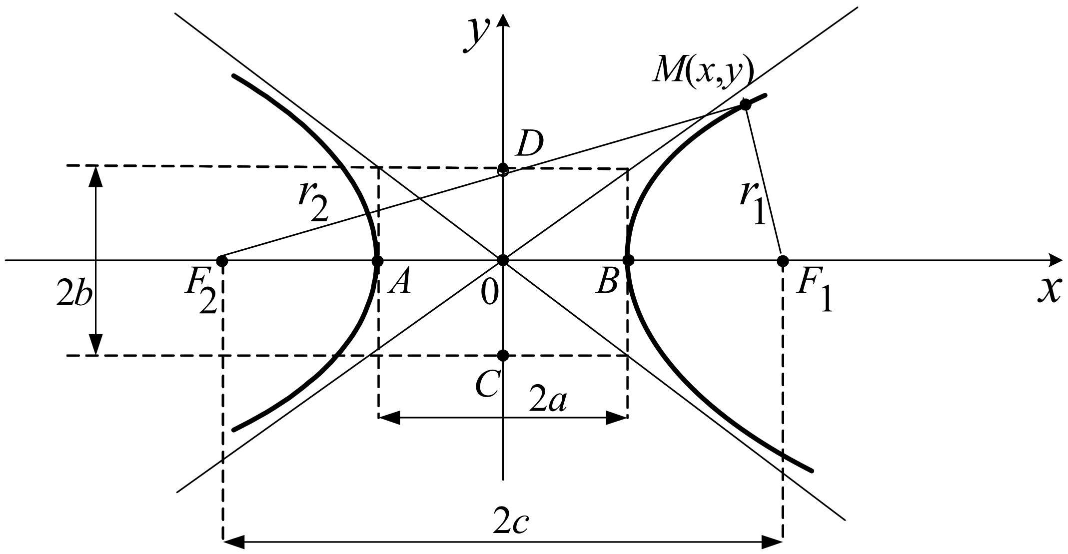


Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности радиуса R с центром в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Параметрические уравнения окружности с радиусом R и центром в точке $M_0(x_0, y_0)$: $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$

Гипербола – геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, называемых фокусами гиперболы, постоянна и равна $2a$ $(a < c)$.



$\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right| = 2a$ и $\overrightarrow{F_1F_2} = 2c$, $c^2 = a^2 + b^2$.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

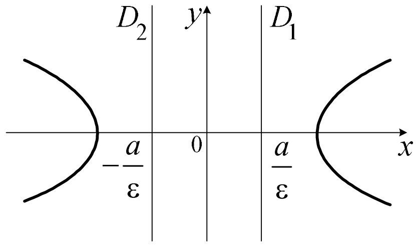
Элементы гиперболы: точка O – центр гиперболы; точки A и B – вершины; точки $F_1(+c,0)$ и $F_2(-c,0)$ – фокусы; $2c$ – фокусное расстояние; $AB=2a$ – действительная ось гиперболы; $CD=2b$ – мнимая ось гиперболы; $b=\sqrt{c^2-a^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a},\ (\varepsilon>1)$ – эксцентриситет гиперболы $\left(\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)$;

$y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$ – асимптоты гиперболы.

Каноническое уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

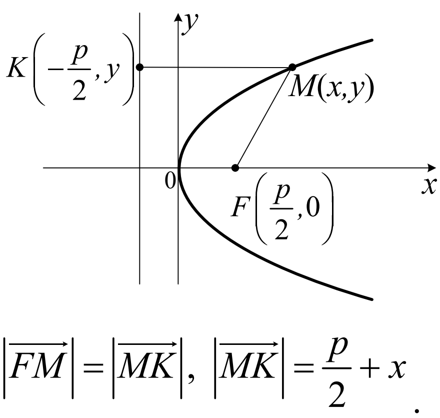
$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис гиперболы



Параметрические уравнения одной ветви гиперболы:

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t, \\ y=b\operatorname{sh}t, \end{cases} \quad t\in(-\infty,\infty).$$

Парабола – геометрическое место точек $M(x,y)$, равноудалённых от заданной точки $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, называемой фокусом параболы, и от данной прямой, называемой директрисой параболы.

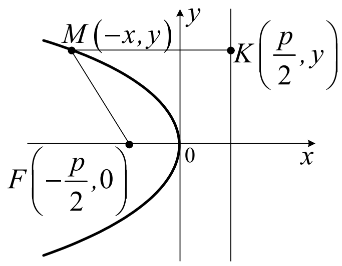


$$\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\overrightarrow{MK}\right|,\ \left|\overrightarrow{MK}\right|=\frac{p}{2}+x.$$

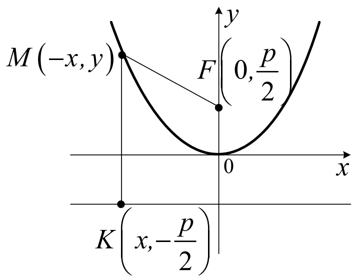
Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px,\ p > 0$.

Элементы параболы: точка O – вершина параболы; OX – ось параболы; точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус; $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; e = 1– эксцентриситет параболы; p – фокальный параметр (расстояние от фокуса до директрисы).

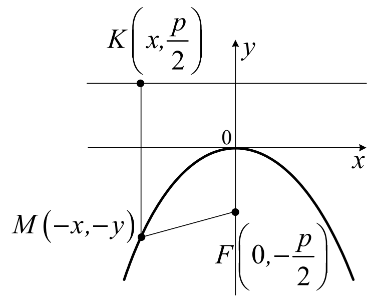
В зависимости от направления ветвей меняется уравнение параболы и ее расположение в декартовой системе координат:



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

Канонические уравнения парабол с вершиной в точке $A(x_0, y_0)$: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

Параметрические уравнения параболы $x^2 = 2py$: $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2pt} \end{cases},\quad t \geq 0$.

Пример. Выделяя полные квадраты, привести к каноническому виду уравнение линии, заданной уравнением $4x^2 + 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$, и построить ее.

Решение

Сгруппируем по отдельности слагаемые, содержащие x и y, и в каждой группе вынесем общий множитель $4(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$.

В каждой скобке дополним первые два слагаемых до полного квадрата:

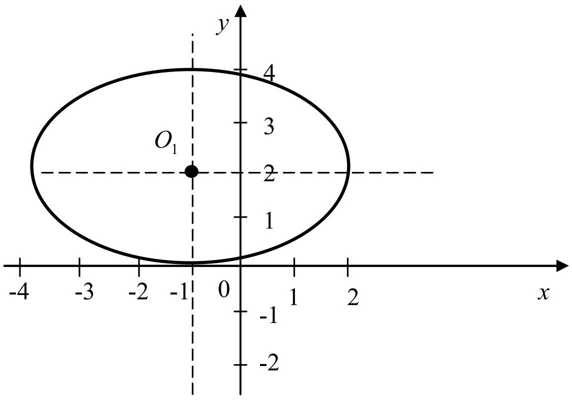
$$4((x^2 + 2x + 1) - 1) + 9((y^2 - 4y + 4) - 4) + 4 = 0$$

$$4(x + 1)^2 - 4 \cdot 1 + 9(y - 2)^2 + 9 \cdot (-4) + 4 = 0.$$

$$4(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

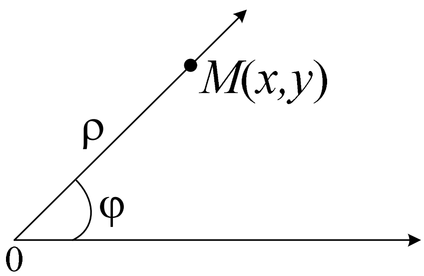
Разделим обе части уравнения на 36, получим $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$

Это уравнение определяет эллипс с центром в точке O_1(-1; 2) и полуосями $a=3$ и $b=2$. Построим эту линию:



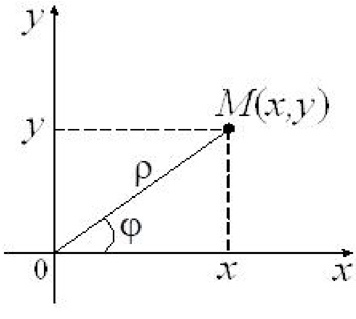
Аналитическая геометрия на плоскости с полярными координатами

Полярные координаты определяются заданием на плоскости полюса *O* и полярной оси. Координаты точки *M* в полярных координатах задаются длиной радиус-вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\rho$ этой точки и углом его поворота относительно полярной оси. При этом $0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi$.



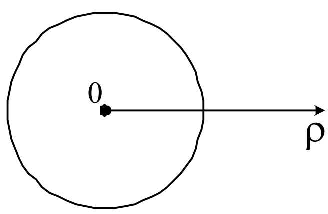
Связь полярных координат с декартовыми

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{y}{x}$$

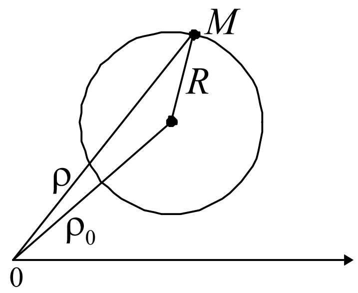


В полярных координатах кривые второго порядка имеют уравнения $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине (для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь); *p* – фокальный параметр, ε – эксцентриситет кривой.

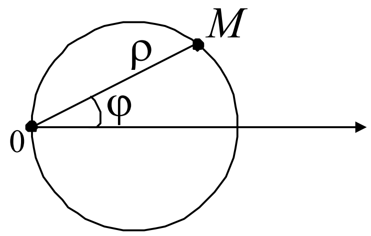
Уравнение окружности в полярных координатах с центром в начале координат (полюсе): $\rho=R$



Уравнение окружности с центром в точке $M\left(\alpha_0, \varphi_0\right)$: $\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2$.



Уравнение окружности с центром в точке $B\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ и радиусом $R = \dfrac{a}{2}$ $\rho = a\cos\varphi$.



Пример. Построить кривую $\rho = 1 + \cos\varphi$ в полярной системе координат.

Решение

Составим таблицу значений.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	2	1,97	1,87	1,7	1,5	1,26	1	0,3	0	1

По полученным координатам строим точки и соединяем их плавной кривой. Полученная кривая называется *кардиоидой*.