## 4. Введение в математический анализ

### 4.1. Функция одной переменной (основные понятия)

Переменная величина $y$ называется ***функцией*** переменной величины $x$, если каждому значению $x$, взятому из некоторого множества, по определенному правилу (закону) ставится в соответствие единственное значение $y$. ри этом $x$ называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, $y$ – ***зависимой переменной*** или ***функцией***. Функциональную зависимость $x$ и $y$ в общем виде записывают так: $y=f(x)$. Множество допустимых для $x$ значений называется ***областью определения*** функции и обозначается $D(f)$ . Множество значений, принимаемых переменной $y$, называется ***областью значений*** функции $y=f(x)$: и обозначается $E(f)$.

Существует несколько способов задания функции: 1) ***аналитический*** (представлено выражение $y=f(x)$ ); 2) ***табличный*** (составлена таблица, содержащая значения $x$, $y$ ); 3) ***графический*** (***графиком функции*** называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции). Если функция задана аналитически, то ее область определения находится из анализа аналитического выражения.

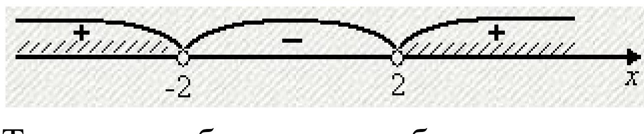
Пример. Найти область определения функции $y=\lg(x^2-4)+\sqrt{x+3}$.

Решение.

Так как логарифмическая функция определена при $x^2-4>0$, а подкоренное выражение определено при $x+3\geq 0$, то областью определения исходной функции будет множество решений системы двух неравенств:

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ x^2-4>0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ (x-2)\cdot(x+2)>0 \end{cases}.$$

Второе неравенство можно решить методом интервалов:




$$\begin{cases} x\geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow\ -3\leq x<-2,\ x>2$$

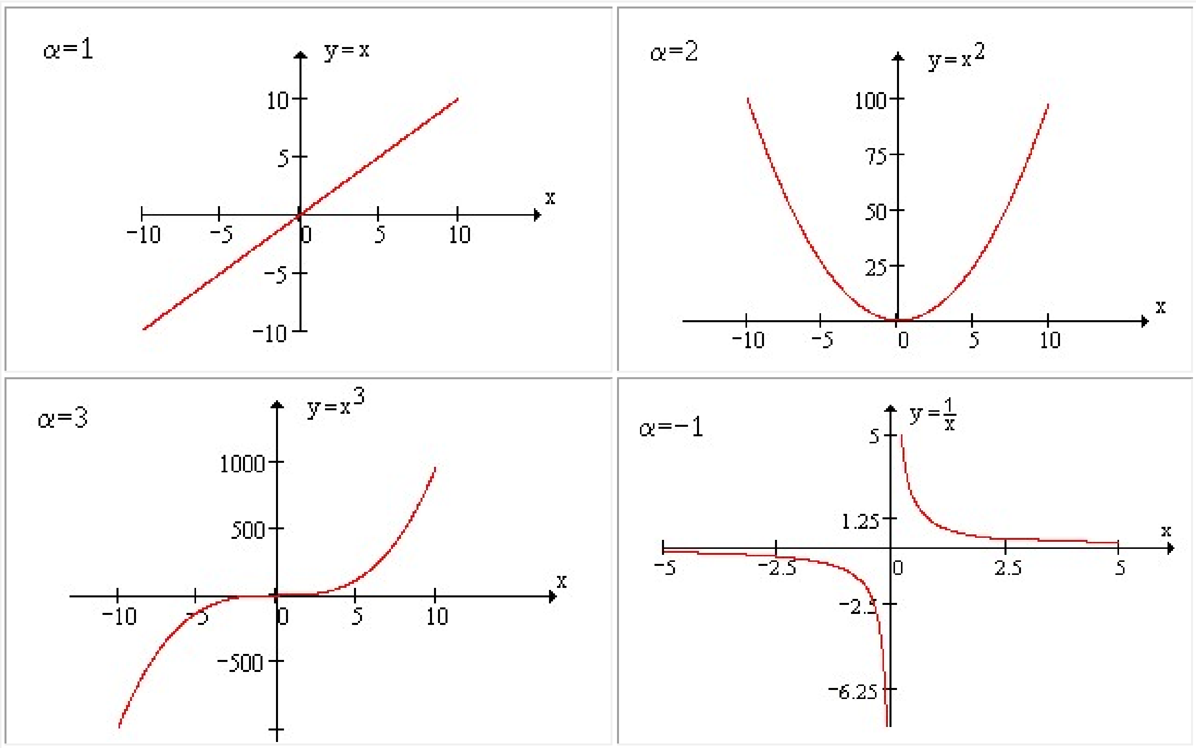
Таким образом, область определения данной функции $D(f)=[-3;-2)\cup(2;+\infty)$.

## Элементарные функции

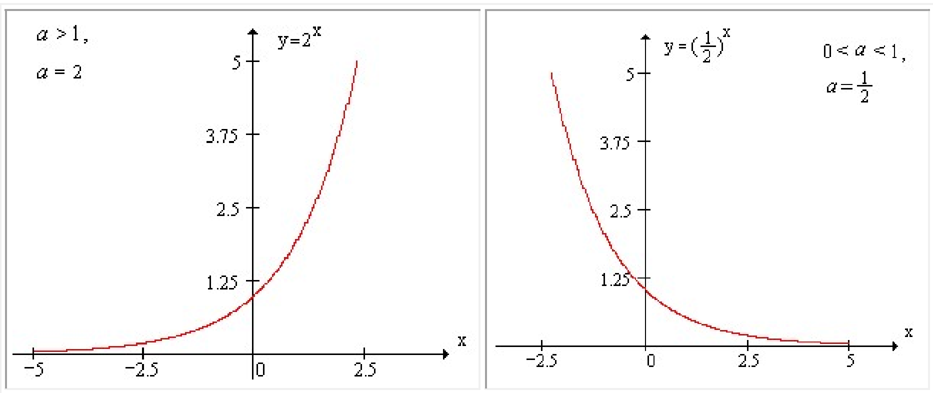
*Элементарной* называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.
Если $y = f(u)$ – некоторая функция аргумента $u$, а $u = g(x)$ – другая функция аргумента $x$, то говорят, что $y = f(g(x))$ *сложная функция* от $x$ .

Основными элементарными называются следующие функции:

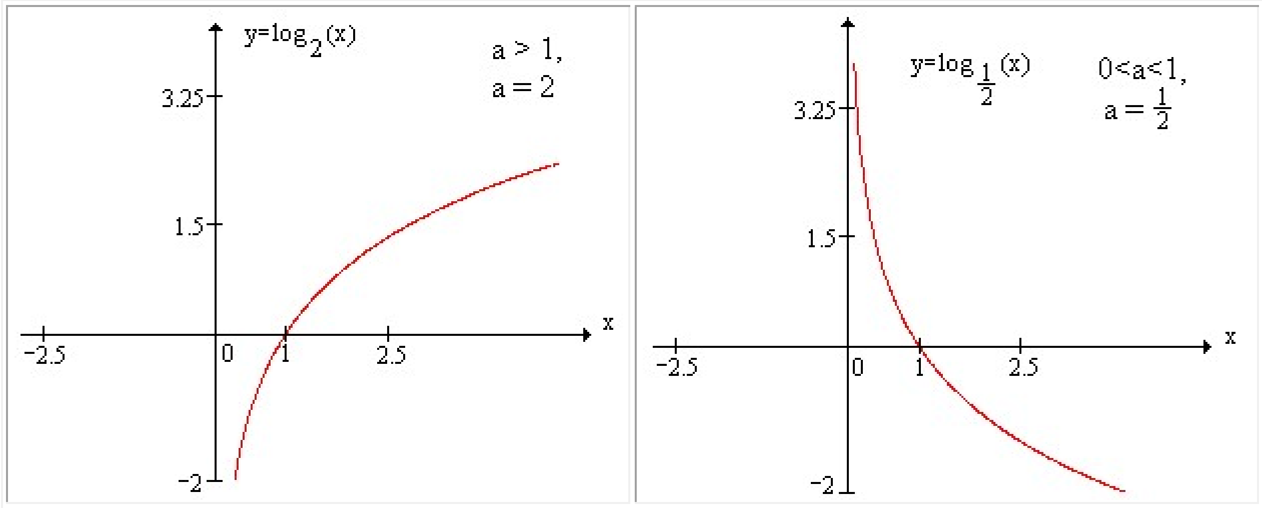
1) ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$ ,где $\alpha$ –действительное число. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным значениям $\alpha$ , представлены на рисунках.



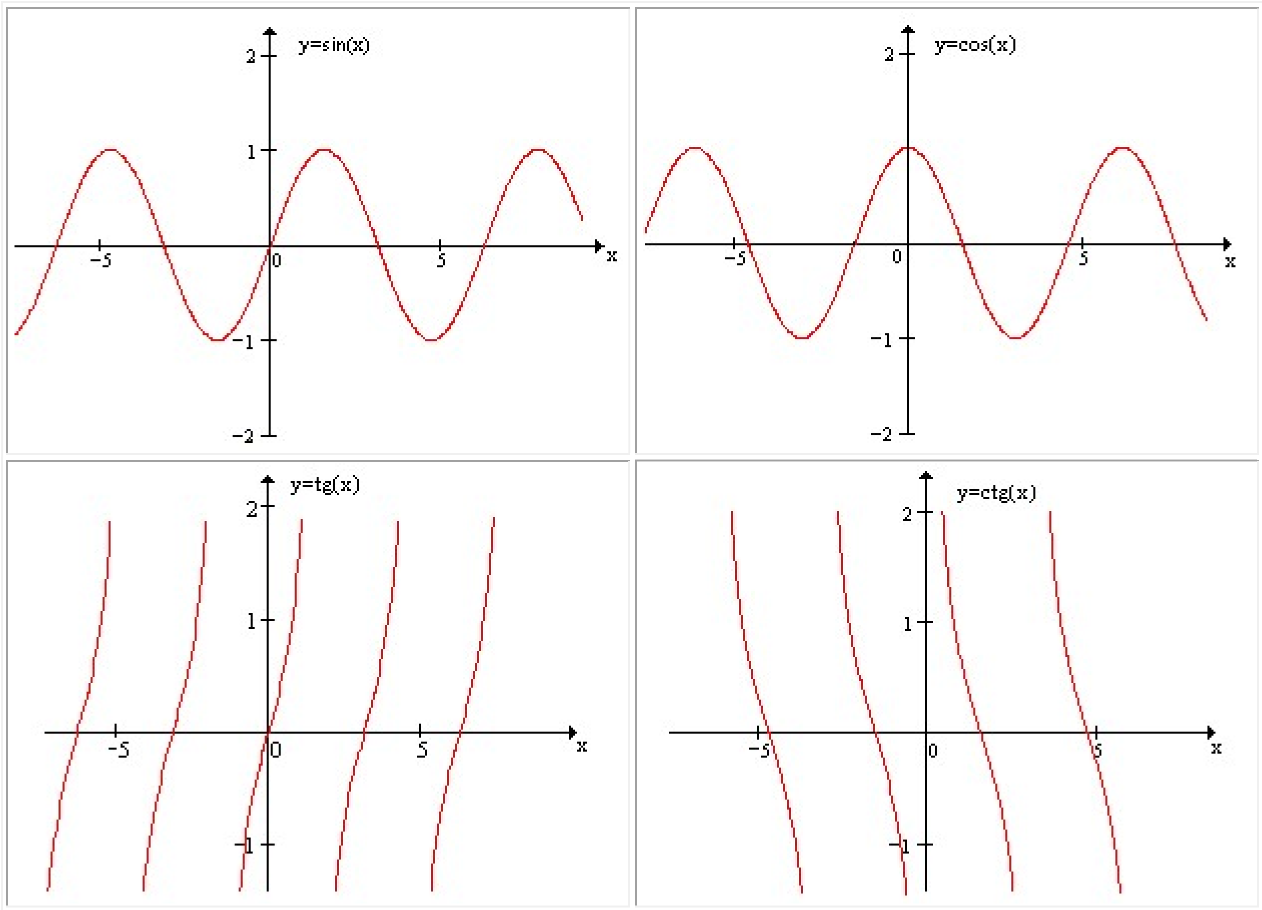

2) ***показательная*** функция $y = a^x$ ,где $a > 0$, $a \neq 1$ ; графики этой функции имеют вид:



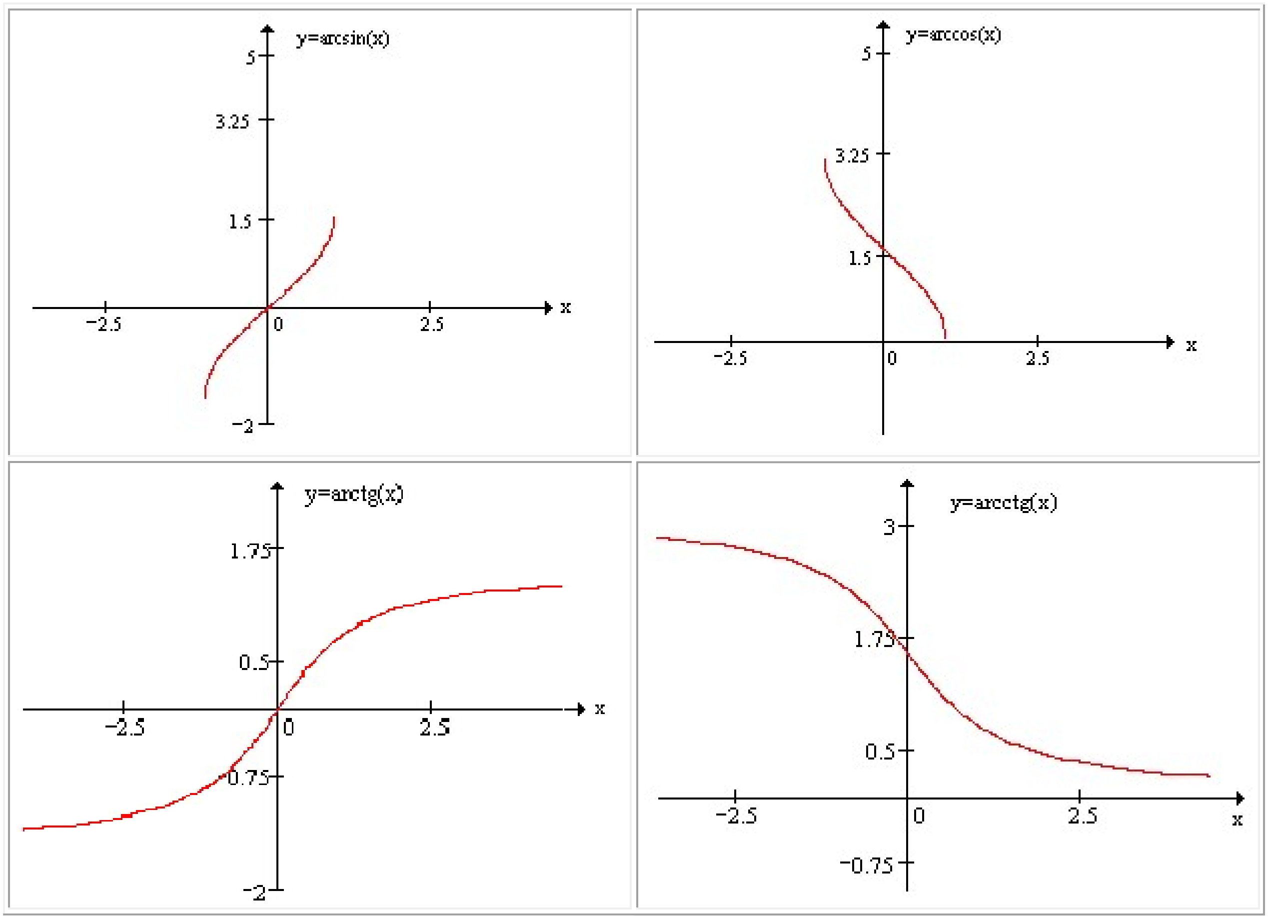
3) ***логарифмическая*** функция $y = \log_a(x)$ ,где $a > 0, a \neq 1$ графики этой функции имеют вид:




4) ***тригонометрические*** функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Графики функций выглядят так:



5) ***обратные тригонометрические*** функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Графики функций выглядят так:




При построении графиков функций с помощью графиков основных элементарных функций можно пользоваться следующими ***правилами преобразования*** графиков:

1. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём его сдвига вдоль оси О$y$ на $|\, a \,|$ единиц вверх при $a > 0$, или на $|\, a \,|$ единиц вниз при $a < 0$.

2. График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём его сдвига вдоль оси О$x$ на $|\, a \,|$ единиц влево при $a > 0$,или на $|\, a \,|$ единиц вправо при $a < 0$.

3. График функции $y = k{\cdot}f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём его растяжения вдоль оси О$y$ в $k$ раз при $k > 1$,или сжатия в$1/k$ раз при $0 < k < 1$.

4. График функции $y = f(k{\cdot}x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём его сжатия вдоль оси О$x$ в $k$ раз при $k > 1$,или растяжения в$1/k$ раз при$0 < k < 1$.

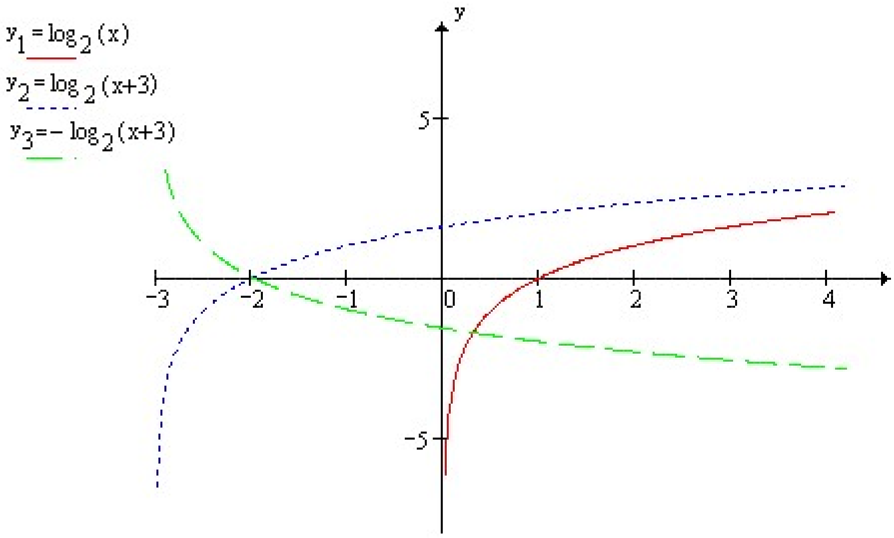
5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём симметричного отражения относительно оси О$x$.

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём симметричного отражения относительно оси О$y$.

Пример. С помощью преобразования графиков элементарных функций построить график функции $y = -\log_2(x+3)$.

Решение.

Строим график <u>логарифмической</u> функции $y_1 = \log_2(x)$. График функции $y_2 = \log_2(x+3)$ получаем путём сдвига графика функции $y_1$ по оси О$x$ на 3 единицы влево. График функции $y_3 = -\log_2(x+3)$ получаем из графика функции $y_2$ путём симметричного отражения относительно оси О$x$.




Построение графика функции с помощью представленных преобразований.

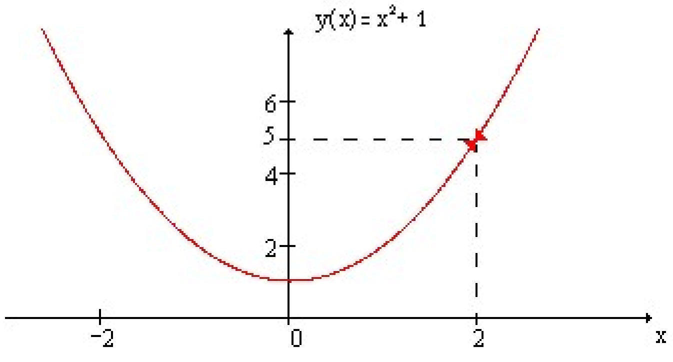
## 4.2. Предел функции (основные понятия)

Пусть дана функция $y = f(x)$. Если значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу $B$, когда значения аргумента $x$ неограниченно приближаются к $x_0$, при этом $x \neq x_0$, то число $B$ называется *пределом функции* при стремлении $x$ к $x_0$. Кратко это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$.

Формально это определение вводится следующим образом. Число $B$ называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x$ , удовлетворяющих неравенству $0 < | x - x_0 | < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - B | < \varepsilon$.

Если значения функции $f(x)$ приближаются к некоторому числу $B$ при $x \to x_0$ таким образом, что $x$ принимает значения строго меньшие, чем $x_0$, то число $B$ называют *пределом функции слева* и обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = B$ . Аналогично вводится понятие *предела функции справа*, который обозначим так: $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = B$ . Введенные здесь величины, называются *односторонними пределами*. Если существуют оба односторонних предела функции и они равны, то оказывается, что существует и «общий» предел функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ , соответствующий первоначальному определению.

Например, если $f(x) = x^2 + 1$, то при приближении переменной $x$ к значению 2 значения функции приближаются к $2^2 + 1 = 5$, т.е. предел данной функции при $x$, стремящемся к двум, равен 5. Формально, чтобы вычислить предел функции, нужно подставить $x = 2$ в функцию $f(x)$ . Наглядно определение предела функции можно показать графически. Построим график данной функции:

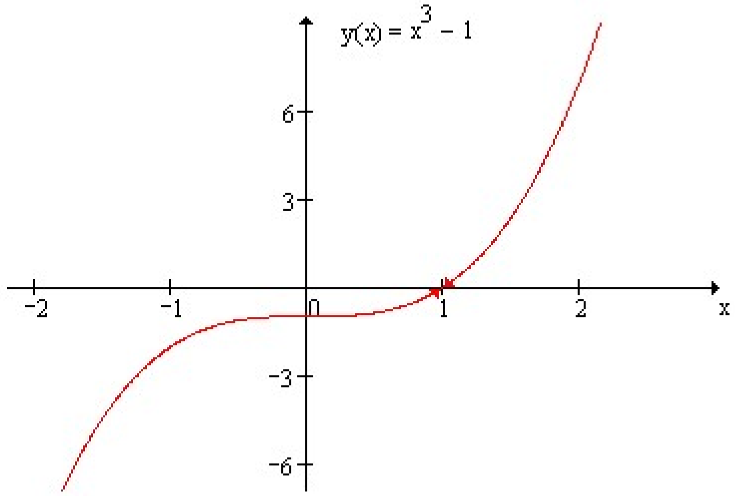



Предел функции в точке $x = 2$.

Проверим: левый и правый пределы в точке $x = 2$ равны соответственно $\lim\limits_{x \to 2-} (x^2 + 1) = 5$ , $\lim\limits_{x \to 2+} (x^2 + 1) = 5$ .

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$.

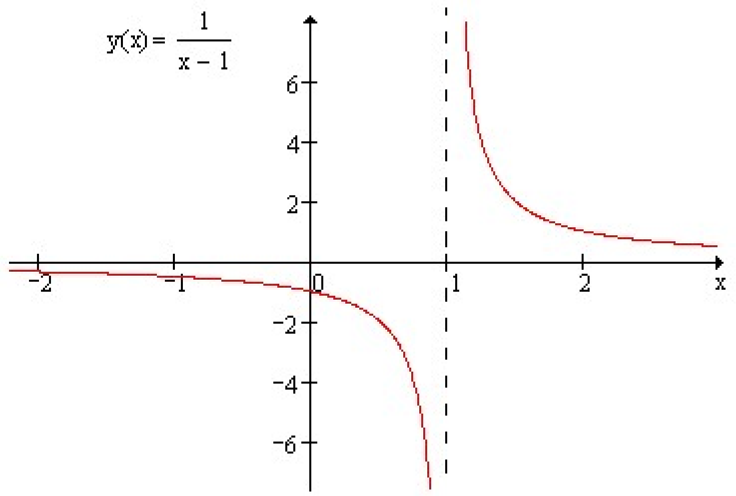
Аналогично определяются *бесконечно малые* функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 -$ и $x \to x_0 +$. Например, функция $\alpha(x) = x^3 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.




Бесконечно малая функция при $x \to 1$.

Возможен другой случай, когда значения функции неограниченно возрастают по абсолютной величине, при $x \to x_0$. В этой ситуации функцию называют *бесконечно большой* и записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ будет бесконечно большой при $x \to 1$.

Теоремы о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций гласят, что если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, и наоборот.




Бесконечно большая функция при $x \to 1$.

При нахождении пределов используются следующие *теоремы о пределах*, (справедливые и при условии $x \to \infty$):

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, тогда: $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$; $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ – при дополнительном условии $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, иначе надо сразу пользоваться теоремами о связи бесконечно больших и бесконечно малых величин, либо подвергать выражение предварительным алгебраическим преобразованиям для разрешения неопределенностей, либо использовать следующие *теоремы о замечательных пределах* или следствия из них.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Эквивалентные бесконечно малые можно заменять друг на друга при вычислении предела произведения или частного, при этом нужно заменять полностью либо один из сомножителей, либо числитель и(или) знаменатель дроби. Заменять одно из слагаемых в сумме (или разности) нельзя.

Следующая таблица эквивалентных бесконечно малых является следствием теорем о замечательных пределах.

| № | Бесконечно малая | Эквивалентная |
|---|---|---|
| 1. | $\sin \alpha(x)$ | $\alpha(x)$ |
| 2. | $\arcsin \alpha(x)$ | $\alpha(x)$ |
| 3. | $\operatorname{tg} \alpha(x)$ | $\alpha(x)$ |
| 4. | $\operatorname{arctg} \alpha(x)$ | $\alpha(x)$ |
| 5. | $1-\cos a(x)$ | $\frac{1}{2}a^2(x)$ |
| 6. | $\ln(1+\alpha(x))$ | $\alpha(x)$ |
| 7. | $e^{\alpha(x)}-1$ | $\alpha(x)$ |
| 8. | $b^{\alpha(x)}-1$ | $\alpha(x)\ln b$ |
| 9. | $(1+\alpha(x))^k-1$ | $k\cdot\alpha(x)$ |

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 7}\frac{3x+5}{x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 7}(x-5)}=\frac{3\cdot\lim\limits_{x\to 7}x+5}{\lim\limits_{x\to 7}x-5}=13.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}$.

Решение.

Так как, при $x\to 1$предел числителя и знаменателя равен 0, то непосредственное применение теоремы о пределе частного невозможно. Вычисление этого предела сводится к раскрытию неопределенности вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}=\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+3)}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $(x-1)$.Это сокращение допустимо, так как $x\to 1$, но можно считать, когда это удобно, что $x\neq 1$. Поэтому, для всех $x\neq 1$ имеем: $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}=\dfrac{2x+1}{x+3}$, и пределы этих функций равны между собой. Значит, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{3}{4}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15x^2+7x-4}{3x^2-2x+3}$.

Решение.

Здесь применить непосредственно теорему о пределе дроби тоже нельзя, так как числитель и знаменатель дроби не имеют предела при $x\to+\infty$, одновременно «стремясь к $+\infty$». В этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы найти предел дроби, преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на $x^2$. После такого преобразования, уже легко найти предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15x^2+7x-4}{3x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(15+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\dfrac{15}{3}=5$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 2x}$.

Решение.

Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Имеет место неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Преобразуем дробь, используя формулы тригонометрии:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{tg^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{tg^2 2x}=\lim_{x\to 0}\left[2\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9\cdot\frac{\cos^2 2x}{4\cdot\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2}=\frac{9}{2}=4.5$$

Этот же пример можно решить, используя эквивалентные бесконечно малые: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(6x)^2}{(2x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2}{4x^2}=4.5$.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$.

Решение.

При $x \to \infty$ основание степени $\dfrac{x-3}{x+1}$ стремится к 1, а показатель степени – «к бесконечности». Поэтому имеем неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\frac{x-3}{x+1}=1+\frac{x-3}{x+1}-1=1+\frac{-4}{x+1}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4(x-1)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x-1)}{x+1}}=e^{-4}$.

В заключении приведем основные виды неопределенностей, наиболее часто встречающихся при вычислении пределов: $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\{1^\infty\}$.

## 4.3. Непрерывность функции

*Окрестностью* точки $x_0$ будем называть интервал ($x_0-\delta$; $x_0+\delta$), где $\delta$– положительное число.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если функция определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности и предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равен значению функции в точке. То есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Это определение непрерывности функции в точке эквивалентно следующему определению: функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности и выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$, то есть предел функции слева и предел функции справа равны между собой и равны значению функции в этой точке.

### Классификация точек разрыва

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва функции классифицируют следующим образом:

1) точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* (точкой конечного разрыва), если функция $y = f(x)$ определена в окрестности этой точки, односторонние пределы функции в точке существуют, но не равны между собой.

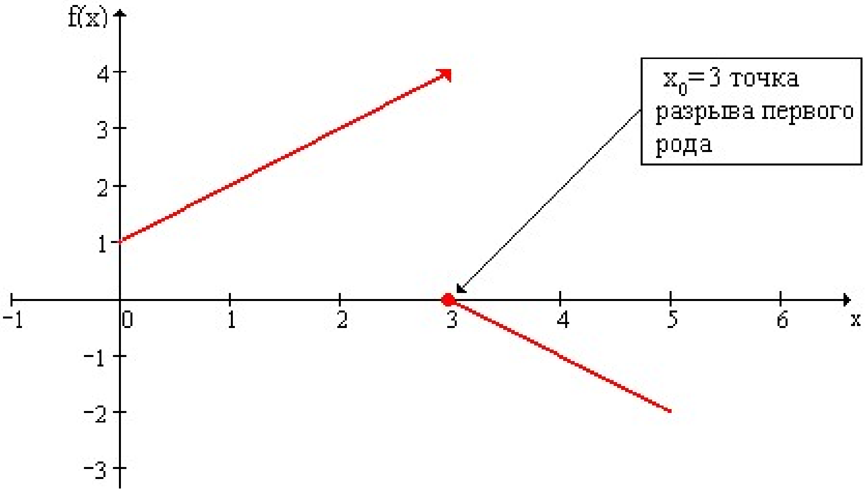
2) точка $x = x_0$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если существует предел функции при $x \to x_0$, но либо сама функция не определена в этой точке, либо ее значение в точке $x_0$ не равно значению предела функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

3) точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в том числе, «равен бесконечности»).

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x<3, \\ 3-x, & 3\le x<5 \end{cases}.$

Решение.

Построим график функции.

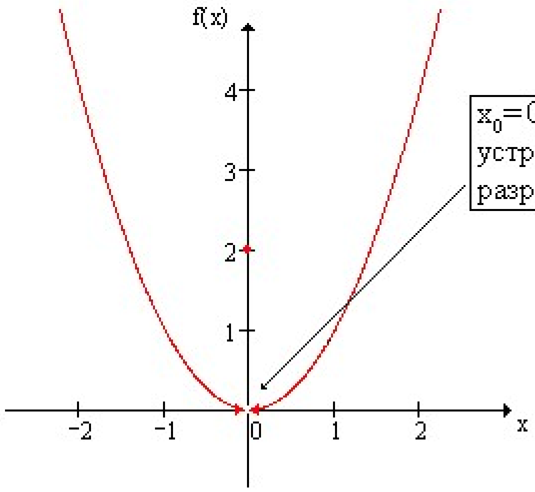



Видно, что в точке $x_0 = 3$ функция разрывна. Покажем это с помощью определения непрерывности функции в точке. Вычислим $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-}(x+1)=4$, $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+}(3-x)=0$.Имеем $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ при $f(x_0)=f(3)=3-3=0$. Итак, точка $x_0 = 3$ – точка разрыва первого рода. При переходе через нее функция делает скачок, величина которого равна $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) - \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = 4-0=4$.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ne 0, \\ 2, & x=0 \end{cases}.$

Решение.

Построим график функции.

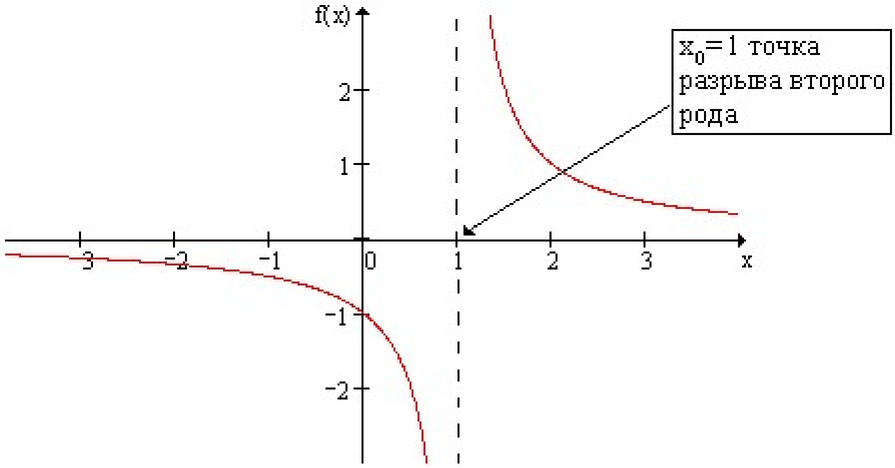


Здесь точка $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва так как $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, но $f(x_0) = f(0) = 2$ – не совпадает с равными между собой значениями односторонних пределов.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Решение.

Построим график функции.




Найдём односторонние пределы при $x \to 1$: $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Согласно классификации точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(a, b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале $(a, b)$ и в точке $a$ непрерывна справа (то есть $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ ), а в точке $b$ непрерывна слева (то есть $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$ ).

Все основные элементарные функции непрерывны в своей области определения. Для всех элементарных функций справедливы следующие теоремы.

1) Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключения тех значений аргумента, в которых знаменатель равен нулю).

2) Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

В заключение приведем основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке функция принимает все промежуточные значения между $A$ и $B$. Из этой теоремы следует, что если непрерывная функция $f(x)$ имеет на концах отрезка $[a, b]$ разные знаки, то на этом отрезке существует внутренняя точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c)=0$.