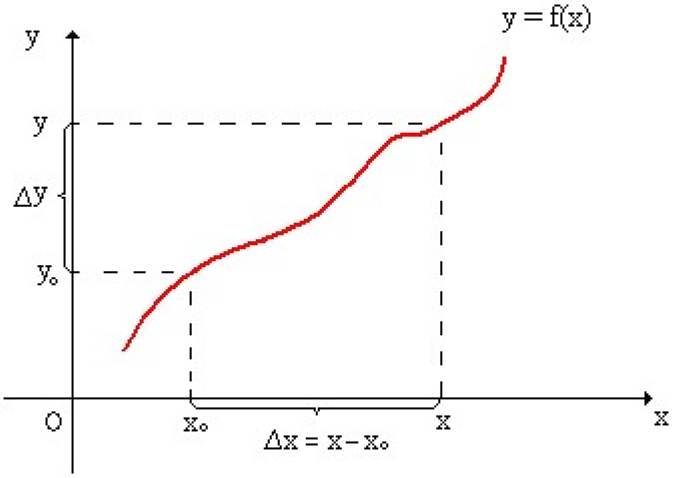
5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной



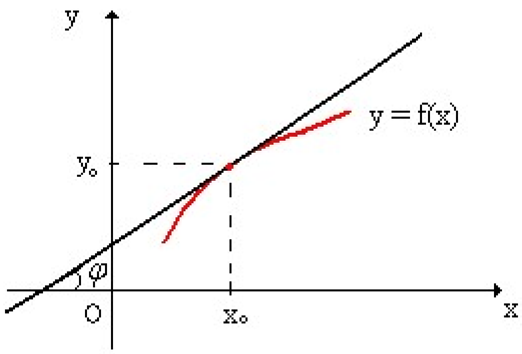
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой области, содержащей точку x_0, и принимает в этой точке значение, равное $y_0 = f(x_0)$. Величина изменения аргумента при переходе из точки x_0 в какую-либо другую точку x называется *приращением аргумента* и обозначается Δx. То есть $\Delta x = x - x_0$ и отсюда $x = x_0 + \Delta x$. Если аргумент x получит приращение, то и значение функции тоже получит соответствующее *приращение* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и примет значение $y = y_0 + \Delta y$.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ называется *производной* функции $y = f(x)$: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Если названный предел существует и конечен, то функция называется *дифференцируемой в точке* x_0, а операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Производная функции является характеристикой скорости ее изменения. Если $S(t)$ – это путь, который проходит материальная точка за время t, то $S'(t) = V(t)$ – это скорость этой точки в конкретный момент времени t.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 также описывает предельное положение секущей к графику этой функции в точке с координатами M(x_0, y_0), то есть касательную:



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, где $f'(x_0) = \mathrm{tg}(\varphi)$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции в этой точке: $dy=A\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной равен её приращению: $dx=\Delta x$.

Из определений производной и дифференциала функции следует равенство, которое очень часто используется в математическом анализе: $dy = f'(x_0)dx$.

Приведем формулу приближенного вычисления значения функции, которая также следует из определения производной: $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Таблица основных формул дифференцирования

$c' = 0$	$x' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln(a)$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

Правила дифференцирования

1. $(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$	2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5. $(f(g(x)))' = f'_u(g(x))\cdot g'(x)$	

Правило 5 называется *правилом дифференцирования сложной функции*. Если $y = f(u)$ – некоторая функция аргумента u, а $u = g(x)$ – другая функция аргумента x, то говорят, что $y = f(\,g(x)\,)$ – сложная функция от x.

Пример 1. Найти производную функции $y = \cos(x^5)$.

Решение. Здесь $f(u) = \cos(u)$, $u = g(x) = x^5$, тогда, используя правило №5 дифференцирования и основные формулы дифференцирования, получим

$$y' = (\cos u)'_u \cdot u'_x = -\sin(u)\cdot(x^5)' = -\sin(x^5)\cdot 5x^4 = -5x^4\cdot\sin(x^5)\ .$$

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2\ln(x^5)$.

Решение. Используем правило дифференцирования №3.

$$y' = (x^2\cdot\ln(x^5+1))' = (x^2)'\cdot\ln(x^5+1) + x^2\cdot(\ln(x^5+1))' =$$
$$= 2\cdot x\cdot\ln(x^5+1) + x^2\cdot\frac{1}{x^5+1}\cdot(x^5+1)' = 2\cdot x\cdot\ln(x^5+1) + x^2\cdot\frac{5\cdot x^4}{x^5+1}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{\arcsin(x-1)}$.

Решение. Используем правило дифференцирования №4.

$$y' = \frac{(\cos x)'\cdot\arcsin(x-1) - \cos x\cdot(\arcsin(x-1))'}{\arcsin^2(x-1)} =$$
$$= \frac{-\sin x\cdot\arcsin(x-1) - \cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}{\arcsin^2(x-1)} =$$
$$= \frac{-\sin x\cdot\arcsin(x-1)\cdot\sqrt{1-(x-1)^2} - \cos x}{\arcsin^2(x-1)\cdot\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

Приведем основные теоремы, связанные со свойствами дифференцируемых функций, имеющие теоретическую значимость.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), и $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что выполняется равенство: $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), тогда найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что выполняется равенство: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Правила Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке, то есть $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда, если предел отношения производных существует, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналогичные правила справедливы и в случае условия предела $x \to \infty$, и в случае неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Пример 1. С помощью правила Лопиталя вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{\log_2(1-x^2)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{\log_2(1-x^2)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos 4x)'}{(\log_2(1-x^2))'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x \cdot 4}{\frac{-2x}{(1-x^2)\ln 2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x \cdot 4 \cdot \ln 2 \cdot (1-x^2)}{-2x} = -2 \cdot \ln 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} (1-x^2) =$$

$$= -2 \cdot \ln 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 4x)'}{x'} \cdot 1 = -2 \cdot \ln 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(\cos 4x) \cdot 4}{1} = -8 \cdot \ln 2.$$

Пример 2. С помощью правила Лопиталя вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^2+4x}$.

Решение.

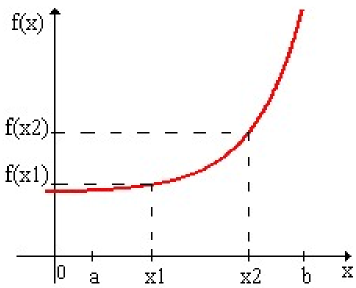
$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^2+4x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^2+4x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} \cdot 2}{2x+4} =$$

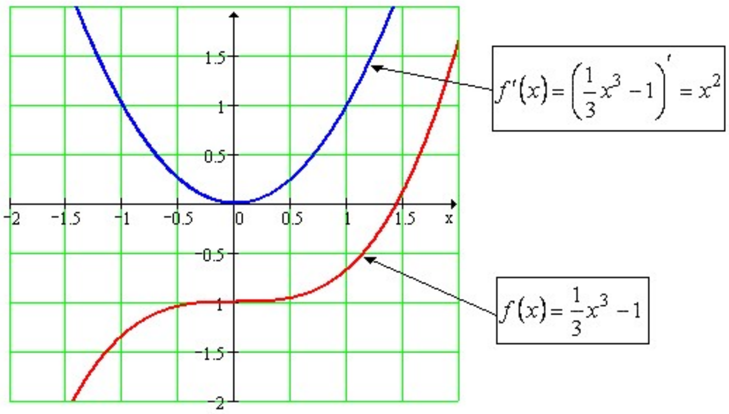
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x+2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x+2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{1} = \infty$$

Монотонность и экстремумы функций

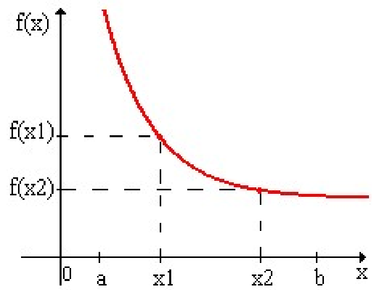
Находить *интервалы монотонности* (убывания, возрастания) в области определения функции, а также выявлять локальные экстремумы (максимумы, минимумы) дифференцируемых функций можно с помощью производной.

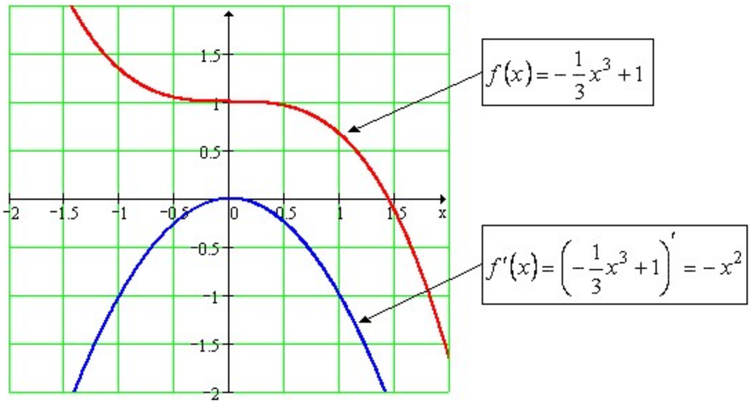
Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (a, b), если при $a < x_1 < x_2 < b$ выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$. Если первая производная функции $f(x)$ на интервале (a, b) положительна $f'(x) > 0$, то функция на этом интервале возрастает:



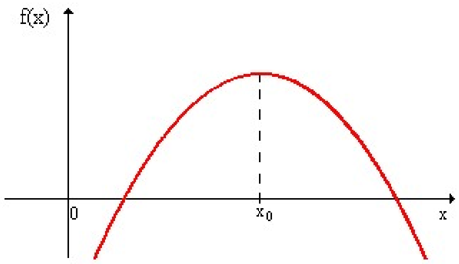


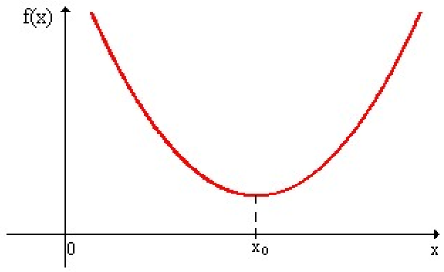
Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале (a, b), если при $a < x_1 < x_2 < b$ выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$. Если первая производная функции $f(x)$ на интервале (a, b) отрицательна $f'(x) < 0$, то функция на этом интервале убывает.





Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $y = f(x)$, если для всех точек x, близких к x_0, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (левый рисунок). Точка x_0 называется *точкой локального минимума* функции $y = f(x)$, если для всех точек x, близких к x_0, выполняетя неравенство $f(x_0) < f(x)$ (правый рисунок).





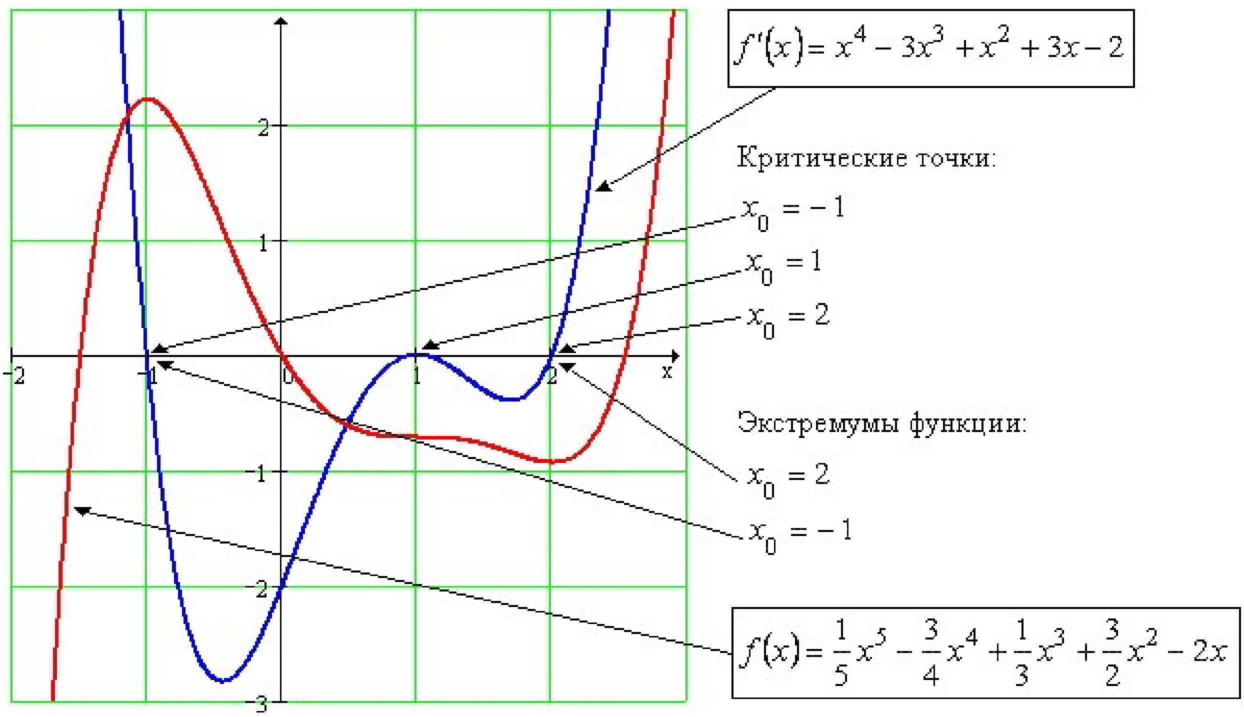
Точки *локального максимума* и *минимума* называются *точками экстремума функции*. Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, то производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует (Необходимое условие экстремума).

Точка x_0 называется *критической*, если в ней производная функции не существует или равна нулю. Критические точки разбивают область определения на интервалы. В каждом интервале следует определить знак производной. При этом возможны следующие ситуации:

– если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса «+» на минус «–», то x_0 – точка локального максимума функции;

– если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак с минуса «–» на плюс «+», то x_0 – точка локального минимума функции;

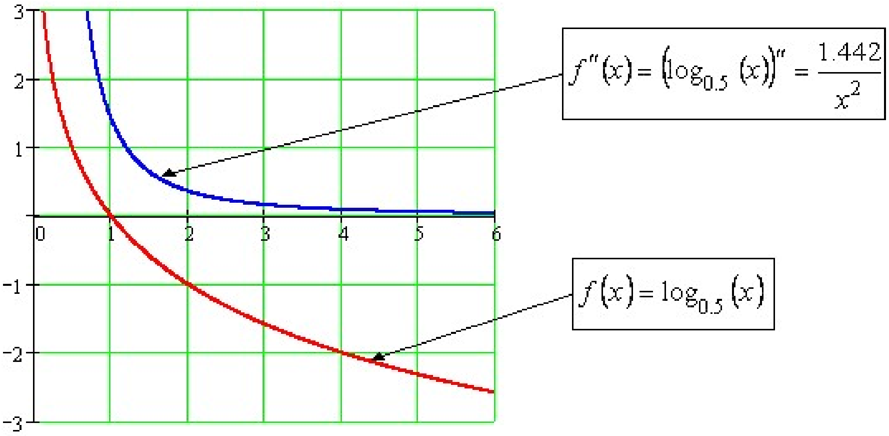
– если при переходе через критическую точку x_0 производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.



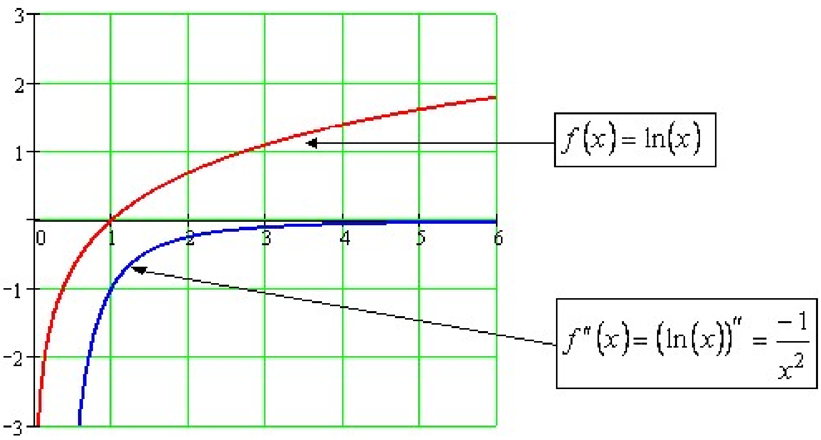
Выпуклость графика функции и точки перегиба

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на интервале (a, b).

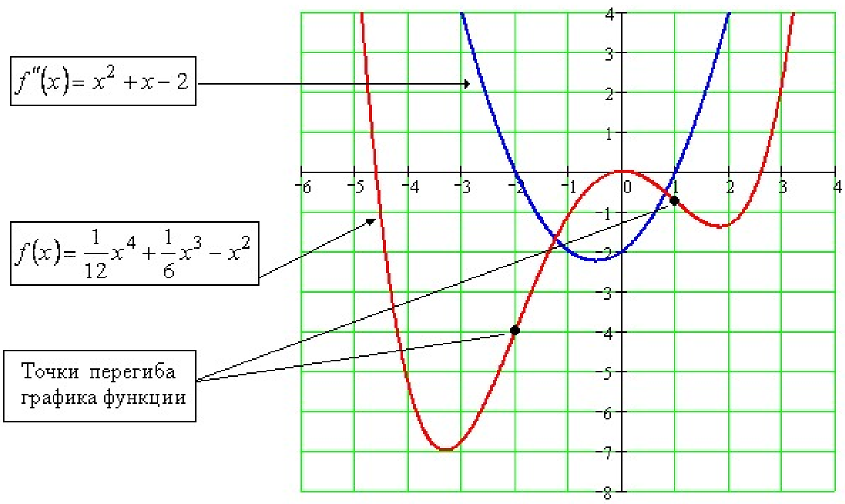
Производная от производной $(y')'$ для функции $y = f(x)$ называется *производной второго порядка* (или второй производной) и обозначается $y'' = f''(x)$. По знаку второй производной можно определить направление выпуклости графика функции . Если на интервале (a, b) вторая производная положительна $f''(x) > 0$, то график функции является *выпуклым вниз*:



Если на интервале (a, b) вторая производная отрицательна $f''(x) < 0$, то график функции является *выпуклым вверх*:



Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 – *точка перегиба*



Построение графиков функций с помощью пределов и производных

Кроме интервалов монотонности и положения экстремумов, при построении графика функции важно знать уравнения асимптот, то есть уравнения прямых, к которым график функции неограниченно приближается при удалении переменной точки графика от начала координат.

Уравнение *наклонной асимптоты* графика функции $y = f(x)$ имеет вид: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - k\cdot x\right)$. Если $k = 0$, то график функции имеет *горизонтальную* асимптоту. Если хотя бы один из пределов не существует или «равен бесконечности», то наклонных асимптот у графика нет. Отметим, что у некоторых функций асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ различны. Например, для функции $y = x - \mathrm{arctg}x$, асимптоты при $x \to +\infty$ асимптотой является прямая $y = x - \pi/2$, а при $x \to -\infty$ асимптота имеет уравнение $y = x + \pi/2$. Для функции $y=\mathrm{e}^x$, асимптотой является ось Ox (y=0) только при $x \to -\infty$.

Если точка x_0 является точкой разрыва второго рода, то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции.

Для исследования функции и построения её графика предварительно проводится ряд исследований:

1) установить область определения функции;

2) вычислить координаты точек пересечения графика функции с осями координат Ox и Oy;

3) найти уравнения асимптот (вертикальных и наклонных);

4) определить критические точки, промежутки монотонности функции и определить локальные экстремумы функции;

5) найти точки перегиба и интервалы выпуклости (вверх или вниз) графика функции.

По полученным данным можно качественно построить график функции.

Пример 1. Провести исследование и построить график функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. *Установим область определения функции*. Область определения функции $y = f(x)$ – вся числовая прямая, то есть $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. *Найдем координаты точек пересечения графика функции с осями координат Ох и Оу*. График функции $f(x)$ пересекает ось Oy при условии, что $x = 0$, то есть в точке с координатами $(0;f(0))$ или $(0;1)$. График функции $f(x)$ пересекает ось Ох при условии, что $y = 0$, следовательно, необходимо решить уравнение $0 = \frac{1}{1+x^2}$, в котором выражение справа положительно на всей числовой оси и не равно нулю, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

3. *Найдем уравнения асимптот графика функции.* Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна на всем интервале $(-\infty; +\infty)$. Угловой коэффициент k наклонной асимптоты и ордината b точки ее пересечения оси Oy находятся по формулам: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot\left(1+x^2\right)} = 0$,

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+x^2} - 0\cdot x\right) = 0$, следовательно, уравнение двусторонней асимптоты имеет вид $y = 0$. Таким образом, асимптотой графика функции является ось Ox.

4. Определим критические точки и промежутки монотонности функции. Критические точки функции $f(x)$ находим из условия $f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0$. Единственная критическая точка $x_0 = 0$, а значение функции в этой точке равно единице $f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$.

Критическая точка $x_0 = 0$, разбивает область определения функции $f(x)$ на два интервала $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Первая производная $f'(x)$ для любых точек $x \in (-\infty; 0)$ положительна ($f'(x) > 0$). Например, если $x = -2$, то $f'(-2) = -\frac{2(-2)}{\left(1+(-2)^2\right)^2} = \frac{4}{25} > 0$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ на интервале $(-\infty; 0)$ возрастает. Первая производная $f'(x)$ для любых точек $x \in (0; +\infty)$ отрицательна ($f'(x) < 0$). Например, если $x = 2$, то $f'(2) = -\frac{2\cdot 2}{\left(1+2^2\right)^2} = -\frac{4}{25} < 0$.

Отсюда следует, что функция $f(x)$ на интервале $(0; +\infty)$ убывает.

Первая производная $f'(x)$ при переходе через критическую точку $x_0 = 0$ меняет знак с плюса «+» на минус «–», следовательно, эта критическая точка является точкой максимума функции $f(x)$. Результаты исследования функции $f(x)$ занесем в таблицу.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	1	–
$f(x)$	↑	max	↓

5. *Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости функции вверх и вниз.* Критические для выпуклости графика функции $y = f(x)$ определяем из условия

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.6$$

.

Две точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ разбивают область определения функции $(-\infty; +\infty)$ на три интервала $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Вторая производная $f''(x)$ на интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ положительна. Например, если $x = -1$, то $f''(-1) = \frac{6\cdot(-1)^2-2}{\left(1+(-1)^2\right)^3} = \frac{4}{8} > 0$. Отсюда следует, что график функции $f(x)$ на этом интервале выпуклый вниз. Вторая производная $f''(x)$ на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ отрицательна. Например, если $x = 0$, то $f''(0) = \frac{6\cdot 0^2-2}{(1+0^2)^3} = \frac{-2}{1} < 0$.

Отсюда следует, что график функции $f(x)$ на этом интервале выпуклый вверх. Вторая производная $f''(x)$ на интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ положительна. Например,

если $x = 1$, то $f''(1) = \frac{6\cdot 1^2-2}{(1+1^2)^3} = \frac{4}{8} > 0$. Отсюда следует, что график функции $f(x)$ на этом интервале выпуклый вниз.

Вторая производная $f''(x)$ при переходе через точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ меняет свой знак, следовательно, эти точки являются абсциссами точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

Вычислим ординаты точек перегиба графика функции $y_1 = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0.75$, $y_2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0.75$.

Результаты исследования выпуклости графика функции $y = f(x)$ занесем в таблицу.

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$,	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,	$\frac{1}{\sqrt{3}}$,	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$,
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$	0.75	$\cap$	0.75	$\cup$

Построение графика функции