6. Интегральное исчисление функции одной переменной

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала заданной функции. Поставим обратную задачу, а именно − для функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$. Задачу можно сформулировать и в равносильной форме: для функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, дифференциал которой равен выражению $f(x)dx$, т. е. $dF(x) = f(x)dx$. Эту задачу решает раздел математики, называемый интегральным исчислением.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех точек этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Так, например, первообразной для функции $f(x) = x^4$ является функция $F(x) = \frac{x^5}{5}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$ или $dF(x) = d\left(\frac{x^5}{5}\right) = x^4 dx$. Нетрудно заметить, что первообразными для данной функции являются также функции $\left(\frac{x^5}{5} + 2\right)$, $\left(\frac{x^5}{5} - 9\right)$ и вообще $\left(\frac{x^5}{5} + C\right)$, где C − произвольная постоянная. Можно показать, что все первообразные для функции $f(x) = x^4$ могут быть представлены в виде $\left(\frac{x^5}{5} + C\right)$. Этот факт следует из такой теоремы: пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ − две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, тогда их разность равна константе, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Условие существования первообразной для известной функции на заданном отрезке, определяет следующая теорема: Всякая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную на этом отрезке.

Если $F(x)$ − одна из первообразных для функции $f(x)$, то множество функций вида $F(x) + C$, где C − произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом*.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ − подынтегральным выражением, x − переменной интегрирования, а знак $\int$ – знаком интеграла. Нахождение всех первообразных для функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Свойства, следующие из определения неопределенного интеграла

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$. Данное свойство можно использовать для проверки выполненного интегрирования. Проверим, что $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. Для этого продифференцируем выражение $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. Имеем

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right)' = \frac{1}{2} + \frac{2\cos 2x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1\right) = \cos^2 x .$$

Получена подынтегральная функция, значит интеграл найден верно.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C: $\int dF(x) = F(x) + C$.

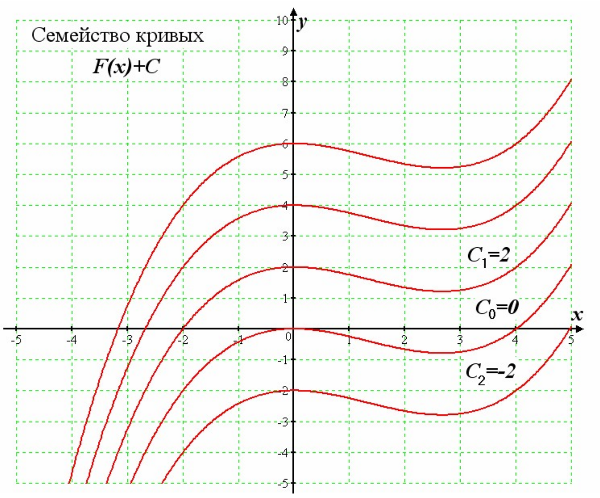
Так, например, $\int dx = x + C$; $\int d\left(e^x\right) = e^x + C$.

Геометрический смысл неопределенного интеграла

График первообразной функции $y = F(x)$ называется *интегральной кривой.* Неопределенный интеграл $F(x)+C$ представляет собой *семейство интегральных кривых*, т.е. кривых, которые могут быть получены из одной интегральной кривой параллельным сдвигом ее вдоль оси Oy.

В качестве примера рассмотрим интеграл $\int\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2x}{3}\right)dx = F(x)+C = \frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{3}+C$.

Семейство интегральных кривых $F(x)+C = \frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{3}+C$ показано на рисунке справа.



6.1. Методы интегрирования

Основная таблица интегралов

Нахождение первообразных является более сложной задачей, чем дифференцирование функций, в том смысле, что не существует универсальных правил интегрирования. Для облегчения решения задач, связанных с интегрированием, составлена таблица основных интегралов. (В таблице α, a – данные числа, а C – произвольная постоянная).

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C;\ (\alpha\neq-1)$	7. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
2. $\int\frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	8. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$	9. $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
5. $\int\sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$
6. $\int\cos x dx = \sin x + C$	12. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$

Проверим, например, формулу (9) таблицы. Для этого продифференцируем правую часть формулы:

$$\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{x^2+a^2}.$$

Получили подынтегральную функцию формулы (9), что подтверждает её справедливость.

Основные свойства неопределенного интеграла

Приведем теоремы, которые позволяют существенно расширить возможности применения табличных интегралов.

Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или более слагаемых равен сумме интегралов:

$$\int(f(x)+g(x)-h(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx-\int h(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int(2\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+4\cdot 2^x)dx$.

Решение.

$$\int(2\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+4\cdot 2^x)dx=2\int\sqrt[3]{x^2}dx+3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+4\int 2^x dx=$$

$$=2\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+3\cdot\ln|x|-2\sqrt{x}+4\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

При нахождении неопределенных интегралов, кроме приведенных теорем, часто используют следующие простые правила.

1. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(a\,x)dx=\frac{1}{a}F(a\,x)+C$.

Например, $\int\sin xdx=-\cos x+C$, поэтому $\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Так как $\int e^x dx=e^x+C$, то $\int e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}+C$.

2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x \pm a)dx = F(x \pm a) + C\cdot$

Например, $\int (x-5)^{17}dx = \frac{1}{18}(x-5)^{18} + C$.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Например, $\int (\cos(3x-7))dx = \frac{1}{3}\sin(3x-7) + C$.

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $u(x)$ непрерывная функция от x, то $\int f(u)du = F(u) + C\cdot$

Например, известно, что $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$, тогда $\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -ctgu + C$. Если функция $u(x)$, скажем, имеет вид $u(x) = e^{2x}$, то $\int \frac{1}{\sin^2(e^{2x})}d(e^{2x}) = -ctg(e^{2x}) + C$.

5. Если подынтегральную функцию можно разложить на слагаемые, то нахождение интеграла, как правило, упрощается. Например,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$
$$= tgx - ctgx + C.$$

Все приведенные теоремы и формулы проверяются дифференцированием.

Теперь перейдем к специальным приемам интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод, при котором рассматриваемый интеграл путем тождественных преобразований и с использованием приемов и теорем приводится к табличному интегралу, называется непосредственным интегрированием. При этом часто применяют преобразование, называемое подведением множителя под знак дифференциала. Обсудим идею этого метода. По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx = d\left(\varphi(x)\right)$. Переход в этом равенстве слева направо называют «подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала». Пусть требуется найти интеграл вида $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Подведем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем произведем замену $\varphi(x)=u$. Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du$.

Интеграл $\int f(u)du$ может оказаться либо проще исходного, либо даже табличным.

При этом полезно использовать такие равенства:

$$dx=d(x\pm a);\ dx=\frac{1}{k}d(kx);\ dx=\frac{1}{k}d(kx\pm a).$$

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x-5}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x-5}=\int\frac{d(x-5)}{x-5}=\ln|x-5|+C$.

Пример 2. Найти интеграл $\int tgxdx$.

Решение. $\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$.

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{ctg^3x}}{\sin^2 x}dx$.

Решение. $\int\frac{\sqrt{ctg^3x}}{\sin^2 x}dx=-\int\sqrt{ctg^3x}d(ctgx)=|u=ctgx|=$

$$=-\int\sqrt{u^3}du=-\frac{2}{5}\sqrt{u^5}+C=-\frac{2}{5}\sqrt{ctg^5x}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x}{x^2+a^2}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x}{x^2+a^2}dx=\left|\begin{aligned}&d(x^2+a^2)=2xdx,\\&xdx=\frac{d(x^2+a^2)}{2}\end{aligned}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \left| \begin{matrix} d(x^2+a^2) = 2xdx, \\ xdx = \frac{d(x^2+a^2)}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки

При нахождении интегралов часто встречаются ситуации, когда введение новой переменной u вместо переменной интегрирования x позволяет свести данный интеграл $\int f(x)dx$ к другому интегралу, который или содержится в таблице или легко находится другим методом. Введем новую переменную $x = \varphi(u)$, где $\varphi(u)$ − непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(u)$. В этом случае справедливо равенство:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(u), \quad dx = \varphi'(u)du, \\ u = \Phi(x) \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du =$$

$$= F(u) + C = F(\Phi(x)) + C.$$

Если подынтегральную функцию можно записать в виде $f(\psi(x))\psi'(x)$, то замену можно записать так:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left| \begin{matrix} u = \psi(x), \\ du = \psi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(u)du =$$

$$= F(u) + C = F(\psi(x)) + C.$$

Применение этих приемов рассмотрим на примерах.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx$.

Решение. $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{u^3}du = \frac{2}{5}\sqrt{u^5} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\ln^5 x} + C$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx = \left| \begin{matrix} u = 2+\sin x, \\ du = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{2+\sin x} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t, \ dx = 2\cos t dt, \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt =$$

$$= 4\int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t dt =$$

$$= 2t + \sin 2t + C = \left| \begin{matrix} \text{или возвращаясь к} \\ \text{переменной } x \end{matrix} \right| = 2\arcsin \frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin \frac{x}{2}\right) + C.$$

Замечание. В дальнейшем будет показано, как записать результат интегрирования в более удобной форме.

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ − функции, имеющие непрерывные производные, тогда справедлива формула $\int udv = uv - \int vdu$, называемая *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести нахождение исходного интеграла к интегралу вида $\int vdu$, который во многих случаях оказывается проще исходного. Следует иметь в виду, что метод интегрирования по частям иногда применяется последовательно несколько раз.

Отметим некоторые типы интегралов, которые удобно находить методом интегрирования по частям. $\int P(x) \cdot e^{kx}dx$; $\int P(x) \cdot \sin(kx)dx$; $\int P(x) \cdot \cos(kx)dx$, Здесь $P(x)$− многочлен, а k− постоянный множитель. В этих интегралах за функцию $u(x)$ принимают многочлен: $u(x) = P(x)$.

Методом интегрирования по частям находятся также интегралы вида $\int P(x) \cdot \arcsin x dx$; $\int P(x) \cdot \arccos x dx$; $\int P(x) \cdot arctgx dx$; $\int P(x) \cdot \ln x dx$.

В этих случаях за $u(x)$ принимают множитель при $P(x)$, т.е. за $u(x)$ берут $\arcsin x, \arccos x, arctgx$ или $\ln x$. Тогда $dv = P(x)dx$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти интеграл $\int x \cdot \cos x \, dx$.

Решение.

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu, \\ u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos xdx, \quad v = \int \cos xdx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int (3x+5) \cdot e^{-2x} dx$.

Решение.

$$\int (3x+5) \cdot e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x+5, \quad du = (3x+5)' dx = 3dx, \\ dv = e^{-2x} dx, \quad v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \end{array} \right| =$$

$$= (3x+5) \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - 3 \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx = -\frac{3}{2} e^{-2x} \cdot x - \frac{5}{2} e^{-2x} - \frac{3}{4} \cdot e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{3}{2} e^{-2x} \cdot x - \frac{13}{4} e^{-2x} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \ln(x+1) dx$.

Решение.

$$\int \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1), \ du = (\ln(x+1))' dx = \frac{1}{x+1} dx, \\ dv = dx, \ v(x) = \int dx = x \end{array} \right| = \ln(x+1) \cdot x -$$

$$- \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= x \cdot \ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \int \frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= x \cdot \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int arctg 2x\,dx$.

Решение.

$$\int arctg 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = arctg 2x, \quad du = (arctg 2x)' dx = \dfrac{2dx}{4x^2+1}, \\ dv = dx, \quad v(x) = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot arctg 2x - \int \frac{2xdx}{4x^2+1} = x \cdot arctg 2x - \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1} =$$

$$= x \cdot arctg 2x - \frac{1}{4} \ln(4x^2+1) + C.$$

6.2. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен, и рациональных дробей

Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Выделим четыре часто встречающихся вида неопределенного интеграла, нахождение которых проводится по схожим правилам.

I. $\int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$; II. $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$; III. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; IV. $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Рассмотрим интеграл $I_1 = \int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$. Выделяя в знаменателе полный квадрат и вводя выражение вида $(x+k)$ под знак дифференциала, получим табличную формулу (9) или (10).

Продемонстрируем этот прием на примерах.

Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2+6x+10}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \left| \begin{array}{l} x^2+6x+10 = (x+3)^2+1, \\ dx = d(x+3) \end{array} \right| = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+1} = arctgu + C = arctg(x+3) + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{8+2x-x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{8+2x-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2-2x-8} = \left| \begin{array}{l} x^2-2x-8=(x-1)^2-9, \\ dx = d(x-1) \end{array} \right| = -\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-8} =$$

$$= -\int \frac{du}{u^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right| + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+9x+18}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3x^2+9x+18} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3x+6} = \left| \begin{array}{l} x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+6=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{15}{4}, \\ dx = d(x+\frac{3}{2}) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}} arctg \frac{u}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} arctg \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} arctg \frac{2x+3}{\sqrt{15}} + C.$$

Перейдем к интегралу вида $I_2 = \int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$. Тождественными преобразованиями этот интеграл можно разбить на два интеграла, причем первый интегрируется по формуле (2) основной таблицы, а второй − есть интеграл I_1, рассмотренный в примерах 1,2 и 3.

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+7}$.

Решение.

$$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+7} = \left| \begin{array}{l} x^2+8x+4=(x+4)^2-9, \\ u=x+4,\ x=u-4,\ dx=du \end{array} \right| = \int \frac{u-4-3}{u^2-9}du = \int \frac{u-7}{u^2-9}du =$$

$$= \int \frac{u\,du}{u^2-9} - 7\int \frac{du}{u^2-9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2-9)}{u^2-9} - 7\int \frac{du}{u^2-9} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u^2-9\right| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C.$$

Рассмотрим нахождение интеграла I_3 на примерах.

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} -(x^2+2x-8) = -(x^2+2x+1-9) = \\ = 9-(x+1)^2; \quad dx = d(x+1) \end{array} \right| = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+30x+20}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+30x+20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+4}} = \left| \begin{array}{l} (x^2+6x+9-5) = (x+3)^2-5 \\ dx = d(x+3) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| x+3+\sqrt{x^2+6x+4} \right| + C.$$

Метод решения интегралов вида I_4 аналогичен методу интегрирования, приведенному выше для I_2.

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}$.

Решение.

$$\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}} = \left| \begin{array}{l} x^2+4x-7 = (x+2)^2-11, \\ d(x^2+4x-7) = (2x+4)dx, \\ 2x-7 = 2x+4-11; \; dx = d(x+2) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{[(2x+4)-11]dx}{\sqrt{x^2+4x-7}} = \int \frac{d\left(x^2+4x-7\right)}{\sqrt{x^2+4x-7}} - 11\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-11}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x-7} - 11 \cdot \ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x-7} \right| + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Функция вида $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$, где $n-$ натуральное число, a_i- числовые коэффициенты, причем $a_0\neq 0$, называется многочленом $n-$ ой степени относительно x. *Рациональной дробью* называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-2}x^2+b_{m-1}x+b_m}, \text{ например } \frac{x^4+4x^3-7x+5}{x^2-2x+3}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $n<m$. Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то дробь называется *неправильной*. Можно доказать, что всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы $\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где $M(x)-$ многочлен степени $(n-m)$, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная дробь, т.е. степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Многочлен $M(x)$ называется *целой частью частного*, а слагаемое $\frac{R(x)}{Q(x)}$ называется *дробной частью частного*. Переход от дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ к сумме $M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ называется *выделением целой части*.

Пример. Выделить целую часть дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+4x^2-3x+5}{x^2+x}$.

Решение.

Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная. Разделим многочлен-числитель на многочлен-знаменатель по правилу деления многочленов «столбиком».

Получим

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^3+4x^2-3x+5 & \underline{x^2+x} \\
-\underline{x^3+x^2} & x+3 \\
\quad 3x^2-3x & \\
\quad -\underline{3x^2+3x} & \\
\qquad -6x+5 &
\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^3+4x^2-3x+5}{x^2+x}=x+3+\frac{-6x+5}{x^2+x}$$

Целая часть дроби равна $M(x)=x+3$, дробная часть частного $\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{-6x+5}{x^2+x}$ − правильная дробь.

Если целая часть дроби выделена, то интеграл от рациональной дроби будет иметь вид $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int M(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

Так как нахождение интеграла от многочлена не вызывает трудностей, то задача интегрирования рациональной дроби сводится к интегрированию правильных рациональных дробей. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функцию $\frac{R(x)}{Q(x)}$ при условии, что степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Как будет отмечено дальше, всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших дробей*.

Дроби следующих четырех типов

$$I.\ \frac{A}{x-a};\quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k}(k \geq 2);\quad III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad IV.\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

называются *простейшими* дробями. Здесь $A, M, N, p, q -$ действительные числа, а квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант.

Ограничимся рассмотрением интегрирования дробей типа I − III.

Интегрирование дробей типа I и II не представляет трудностей:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

Интегрирование дроби третьего типа (содержащего в знаменателе квадратный трехчлен) было рассмотрено в этом разделе ранее.

При разложении правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{R_n(x)}$ на простейшие дроби существенное значение имеет разложение знаменателя дроби на произведение линейных и квадратичных сомножителей.

Пусть для определенности знаменатель $R_n(x)$ раскладывается на множители следующим образом:

$$R_n(x) = (x-x_1)^k (x-x_2)^l \left(x^2+px+q\right)^m, \quad k+l+2m=n,$$

причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Среди линейных и квадратичных множителей, на которые разложен многочлен, могут быть одинаковые. Корень многочлена, для которого линейный множитель в разложении встречается k раз, называется *корнем кратности* k. Если какой-либо линейный множитель встречается один раз, то соответствующий ему корень называется *простым*.

Пример. Определить кратность действительных корней многочлена $Q(x) = (x+2)(x-1)^2(x-4)^3(x^2+x+1)$.

Решение. Этот многочлен имеет простой корень $x_1 = -2$, его кратность $k_1 = 1$. Корень $x_2 = 1$ имеет кратность $k_2 = 2$. Корень $x_3 = 4$ имеет кратность $k_3 = 3$. А квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ $(D = -3 < 0)$ действительных корней не имеет и на действительные множители не раскладывается.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Выше мы показали, что $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int M(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

Сейчас рассмотрим, как правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму простейших дробей. Это разложение может быть выполнено по такой схеме:

1. Каждому простому корню $x = a$ знаменателя будет соответствовать простейшая дробь *I*- го типа: $\frac{A}{x-a}$.

2. Каждому кратному корню $x = b$ кратности k будет соответствовать сумма простейших дробей вида: $\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k}$.

3. Каждому квадратичному множителю вида $x^2 + px + q$ с отрицательным дискриминантом $(D < 0)$ будет соответствовать простейшая дробь *III*-го типа: $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Поясним эту схему на ряде примеров.

Пример 1. Написать разложение дроби $\dfrac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}$ на простейшие.

Решение. Знаменатель x^3-4x имеет три простых корня $x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=-2$. Поэтому $\dfrac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x-2}+\dfrac{A_3}{x+2}$.

Пример 2. Написать разложение дроби $\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x-4)^3}$ на простейшие.

Решение. Знаменатель дроби имеет корень $x_1=-2$ кратности $k_1=2$ и корень $x_2=4$ кратности $k_2=3$. Тогда, следуя схеме, получим такое разложение $\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x-4)^3}=\dfrac{A_1}{x+2}+\dfrac{A_2}{(x+2)^2}+\dfrac{B_1}{x-4}+\dfrac{B_2}{(x-4)^2}+\dfrac{B_3}{(x-4)^3}$.

Пример 3. Написать разложение дроби $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ на простейшие.

Решение. В этом случае знаменатель имеет один простой действительный корень $x=2$. Ему будет соответствовать дробь I-го типа, а множителю $x^2+2x+4\ (D=-3<0)$ − дробь III-го типа. Таким образом, разложение будет иметь вид $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+2x+4}$.

Пример 4. Написать разложение дроби $\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-1)^3(x^2+9)}$ на простейшие.

Решение. Следуя схеме, получаем

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-1)^3(x^2+9)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}+\frac{Mx+N}{x^2+9}.$$

В этом и предыдущих примерах коэффициенты, стоящие в числителях дробей, подлежат определению.

Определение неизвестных коэффициентов в разложении на простейшие дроби

При нахождении коэффициентов разложений используют два метода (на практике оба эти метода применяют совместно, ориентируясь лишь на соображения удобства).

1) Метод частных значений. Идея этого метода состоит в том, что после приведения к наименьшему общему знаменателю суммы простейших дробей, получается равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями. Но тогда должны быть равны и числители дробей при любых значениях x. Придавая переменной x некоторые «удобные» значения, находим неизвестные коэффициенты. Этот способ обычно применяют, когда знаменатель исходной дроби имеет только простые корни.

2) Метод сравнения коэффициентов. Он основан на теореме: Если два многочлена тождественно равны друг другу, то их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x соответственно равны. Таким образом, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x числителя исходной дроби и числителя той дроби, которая получится после сложения простейших дробей, получим линейную систему уравнений. Решая ее, найдем значения неизвестных коэффициентов.

Рассмотрим разложение рациональной функции $\frac{5x+2}{(x-3)(x+1)}$, знаменатель которой имеет два различных простых действительных корня, на простейшие дроби $\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+1}$:

$$\frac{5x+2}{(x-3)(x+1)}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+1}.$$ Используем первый метод.

$5x+2=A_1(x+1)+A_2(x-3)$, пусть $x=-1$, тогда $-5+2=-4A_2 \Rightarrow A_2=\frac{3}{4}$;

пусть $x=3$, тогда $15+2=4A_1 \Rightarrow A_1=\frac{17}{4}$.

Тогда разложение будет иметь вид

$$\frac{5x+2}{(x-3)(x+1)}=\frac{17}{4(x-3)}+\frac{3}{4(x+1)}.$$

Решим эту же задачу, используя второй метод.

$$\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+1}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{A_1x+A_1+A_2x-3A_2}{(x-3)(x+1)}=\frac{(A_1+A_2)x+(A_1-3A_2)}{(x-3)(x+1)},$$

Так как

$$\frac{5x+2}{(x-3)(x+1)}=\frac{(A_1+A_2)x+(A_1-3A_2)}{(x-3)(x+1)}, \text{ то } 5x+2=(A_1+A_2)x+(A_1-3A_2).$$

Приравнивая коэффициенты при x^1 и при x^0, получим систему линейных уравнений относительно A_1 и A_2:

или $$\begin{cases}5=A_1+A_2;\\ 2=A_1-3A_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=5-A_2;\\ 2=5-A_2-3A_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_2=\dfrac{3}{4};\\ A_1=5-\dfrac{3}{4}=\dfrac{17}{4}.\end{cases}$$

Общая схема интегрирования рациональных дробей

Положения, изложенные в предыдущих пунктах, позволяют сформулировать следующую схему интегрирования рациональной дроби.

1. Если дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то выделяют целую часть. Для этого числитель делят на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен. После этого дробь может быть записана в виде суммы многочлена $M(x)$ (целая часть) и правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ (дробная часть).

2. Знаменатель правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ разлагают на множители. Для этого находят корни уравнения $Q(x)=0$.

3. Записывают разложение дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ на сумму простейших дробей и находят неизвестные коэффициенты одним из рассмотренных методов.

4. Выполняют интегрирование целой части (многочлена) и суммы простейших дробей.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная дробь. Знаменатель дроби имеет один простой корень $x_1=0$ и корень $x_2=-1$ кратности $k=3$.

Первому корню будет соответствовать дробь вида $\frac{A}{x}$, а множителю $\left(x+1\right)^3$ будет соответствовать сумма дробей вида $\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$. Таким образом, разложение подынтегральной функции на простейшие дроби будет иметь вид

$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$. Приведем дроби, стоящие в правой части, к общему знаменателю. Получим равенство

$3x+2=A(x+1)^3+B_1x(x+1)^2+B_2x(x+1)+B_3x$. Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов при соответствующих степенях x, найдем

$$
\begin{array}{l|l}
x=0 & 2=A. \\
x=-1 & -1=-B_3;\ B_3=1. \\
\textit{При } x^3 & 0=A+B_1;\ B_1=-A;\ B_1=-2. \\
\textit{При } x^2 & 0=3A+2B_1+B_2;\ B_2=-3A-2B_1=-6+4=-2.
\end{array}
$$

Поэтому $\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$. Следовательно,

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}+\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^3}=$$

$$=2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2\left(x+1\right)^2}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx$.

Решение. Подынтегральная функция − правильная дробь. Ее знаменатель раскладывается на множители по формуле суммы кубов: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Разложение дроби на простейшие будет иметь вид

$\frac{5x^2+1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}$. Откуда $5x^2+1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$.

Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов, получим

$$x=-1 \;\Big|\; 6=3A;\;\; A=2.$$

$$\textit{При}\ x^2 \;\Big|\; 5=A+M;\; M=5-A=3.$$

$$\textit{При}\ x^0 \;\Big|\; 1=A+N;\; N=1-A=-1.$$

Поэтому

$$\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx=2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=2\ln|x+1|+\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1}.$$

Рассмотрим оставшийся интеграл

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\left|\begin{matrix} x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}, \\ u=x-\dfrac{1}{2},\;\; x=u+\dfrac{1}{2},\;\; dx=du\end{matrix}\right|=\int\frac{3u+\dfrac{3}{2}-1}{u^2+\dfrac{3}{4}}du=$$

$$=\int\frac{3u+\dfrac{1}{2}}{u^2+\dfrac{3}{4}}du=3\int\frac{u\,du}{u^2+\dfrac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\dfrac{3}{4}}=\frac{3}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx=2\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

6.3. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений и некоторых иррациональных функций

Универсальная тригонометрическая подстановка

Если подынтегральная функция рационально выражается через тригонометрические функции, т.е. $\int R(\sin x,\cos x)dx$, то данный интеграл можно свести к интегралу от дробно-рациональной функции. Пусть $t=tg\dfrac{x}{2}$, тогда известные тригонометрические формулы позволяют записать

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1},$$

Учитывая, что $t = tg\frac{x}{2}$, найдем $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{t^2+1}$.

Пример. Найти $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$$ учитывая, что

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, получим $\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Следует учитывать, что данный метод может приводить к достаточно сложным вычислениям. Поэтому во многих случаях целесообразно применять другие подходы.

Интегралы вида $\int\sin^n x\cdot\cos^m x$.

1. Пусть хотя бы одно из чисел n или m нечетное натуральное число. В этом случае интеграл сводится к табличным интегралам. Идея метода ясна из следующих примеров.

Пример1. Найти интеграл $\int\sin^3 x\cos^4 xdx$.

Решение. У степени с нечетным показателем отделим множитель $\sin x$ и замечая, что $\sin xdx = -d(\cos x)$, получим

$$\int\sin^3 x\cos^4 xdx = \int\sin^2 x\cos^4 x\cdot\sin xdx = -\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 xd(\cos x) =$$

$$= -\int\left(\cos^4 x - \cos^6 x\right)d\cos x = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} dx$.

Решение. Рассуждая аналогично, получим

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} \cos x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} - \int (\sin x)^{\frac{9}{7}} d(\sin x) =$$

$$= \frac{7}{2}(\sin x)^{\frac{2}{7}} - \frac{7}{16}(\sin x)^{\frac{16}{7}} + C.$$

2. Пусть теперь оба показателя четные неотрицательные числа. В этом случае следует использовать формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Применение этих формул позволяет добиться уменьшения показателя степени вдвое. Повторное их применение позволяет свести, в конечном счете, интеграл к интегралам от нечетных степеней синуса и косинуса.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C.$$

3. При четных отрицательных показателях интеграл можно свести к табличному интегралу, используя тригонометрические формулы

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x; \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \left(1 + ctg^2 x\right) dctgx = -ctgx - \frac{1}{3} ctg^3 x + C.$$

Интегралы, подынтегральная функция которых зависит только от tgx.

$\int R(tgx)dx$ можно найти, используя замену $t = tgx,\quad x = arctgt,\quad dx = \dfrac{dt}{t^2+1}$.

Пример. Найти интеграл $\int \dfrac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, \quad x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right| + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

В этом разделе мы рассмотрим наиболее важные случаи интегралов от иррациональных функций:

1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx;$ 2) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx;$

3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx;$ 4) $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}},.., x^{\frac{m_k}{n_k}})dx.$

В каждом из них подынтегральная функция является рациональной функцией от x и соответствующего радикала. Интегралы (1, 2, 3) путем надлежащей подстановки сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций. Подстановка подбирается так, чтобы устранить иррациональность.

1. Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$.

Подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию, имеет вид $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$). Действительно, $\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cos t$, при этом $dx = a\cos t\,dt$. Тогда функция $R(x,\sqrt{a^2-x^2})$ после выполнения подстановки будет рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$. После чего к полученному интегралу применяем один из способов, рассмотренных в разделе (6.9).

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$.

Решение. Применим подстановку $x = 2\sin t$, получим $dx = 2\cos t\,dt$, при этом $t = \arcsin\frac{x}{2}$; $\sqrt{(4-x^2)^3} = \sqrt{(4-4\sin^2 t)^3} = 8\cos^3 t$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = \int \frac{8\cos^3 t}{64\sin^6 t}\cdot 2\cos t dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int ctg^4 t\, d(ctgt) = -\frac{1}{20}ctg^5 t + C = -\frac{1}{20}ctg^5\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$. В этом случае подстановка, устраняющая иррациональность, имеет вид $x = a\,tgt$ (или $x = a\,ctgt$). Действительно, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tg^2t} = a\sqrt{1+tg^2t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$. При этом, $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}}$.

Решение. Применим подстановку $x = 4tgt$, тогда $dx = \frac{4}{\cos^2 t}dt,\ t = arctg\frac{x}{4}$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}} = \int \frac{\frac{4dt}{\cos^2 t}}{16tg^2t\sqrt{(16+16tg^2t)}} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{16}\frac{1}{\sin\left(arctg\frac{x}{4}\right)} + C.$$

Ответ можно упростить, используя формулы тригонометрии: $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}$ и $tg\left(arctg\frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$. Окончательно получим

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}} = -\frac{1}{16}\frac{\sqrt{16+x^2}}{x} + C.$$

3. Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$. В этом случае подынтегральная функция рационализируется подстановкой $x = \frac{a}{\sin t}$ (или $x = \frac{a}{\cos t}$). Покажем это: $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t}$.

При этом $dx = -\frac{a \cdot \cos t dt}{\sin^2 t}$; $\quad t = \arcsin\frac{a}{x}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(x^2 - 16)}dx}{x}$.

Решение. Применяя подстановку $x = \frac{4}{\sin t}$, получим $dx = -\frac{4\cos t}{\sin^2 t}dt$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx = -\int \frac{\sqrt{\frac{16}{\sin^2 t} - 16}}{\frac{4}{\sin t}} \cdot \frac{4}{\sin^2 t}\cos t dt = -4\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -4\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = -4\int \frac{dt}{\sin^2 t} + 4\int dt = 4ctgt + 4t + C.$$

Теперь вернемся к переменной x. Получим $\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx = 4ctg\left(\arcsin\frac{4}{x}\right) + 4\arcsin\frac{4}{x} + C$.

Упростим полученный ответ. Так как $ctgt = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$ и $\sin\left(\arcsin\frac{4}{x}\right) = \frac{4}{x}$, то окончательно имеем

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx = \sqrt{x^2 - 16} + 4\arcsin\frac{4}{x} + C.$$

4. Интеграл вида $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, .., x^{\frac{m_k}{n_k}})dx$. Такие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций путем подстановки $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей $n_1, n_2, ..., n_k$. При этом $dx = k \cdot t^{k-1}dt$, а все степени $x^{\frac{m_i}{n_i}}$ выражаются степенями переменной t с *целыми* показателями.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+9}dx$.

Решение. Подынтегральная функция содержит $x^{\frac{1}{2}}$ и $x^{\frac{1}{4}}$. Поэтому вводим замену $x = t^4$. Тогда $\sqrt{x} = t^2$, $\sqrt[4]{x^3} = t^3$, $t = \sqrt[4]{x}$, $dx = 4t^3dt$. В итоге получим

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+9}dx = \int \frac{t^2}{t^3+9}\cdot 4t^3dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+9}dt = 4\int \frac{t^2\left(t^3+9-9\right)}{t^3+9}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{9t^2}{t^3+9}\right)dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - 12\cdot\ln\left|t^3+9\right| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 12\cdot\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+9\right| + C.$$

Отметим более общий случай интегралов этого типа, когда подынтегральная функция содержит иррациональности вида $\left(ax+b\right)^{\frac{m_i}{n_i}}$. Тогда используется аналогичная замена $ax+b=t^k$, где $k-$ наименьшее общее кратное знаменателей n_i.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}}$.

Решение.

Подынтегральная функция содержит степени $\left(2x+1\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(2x+1\right)^{\frac{2}{3}}$. Поэтому вводим замену $2x+1=t^6$. Тогда $x = \frac{t^6-1}{2}$, $dx = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot t^5dt = 3t^5dt$, $t = \sqrt[6]{2x+1}$. В итоге имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}} = 3\int \frac{t^5dt}{t^3+t^4} = 3\int \frac{t^2dt}{1+t} = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln\left|t+1\right|\right) + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} - 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right) + C.$$

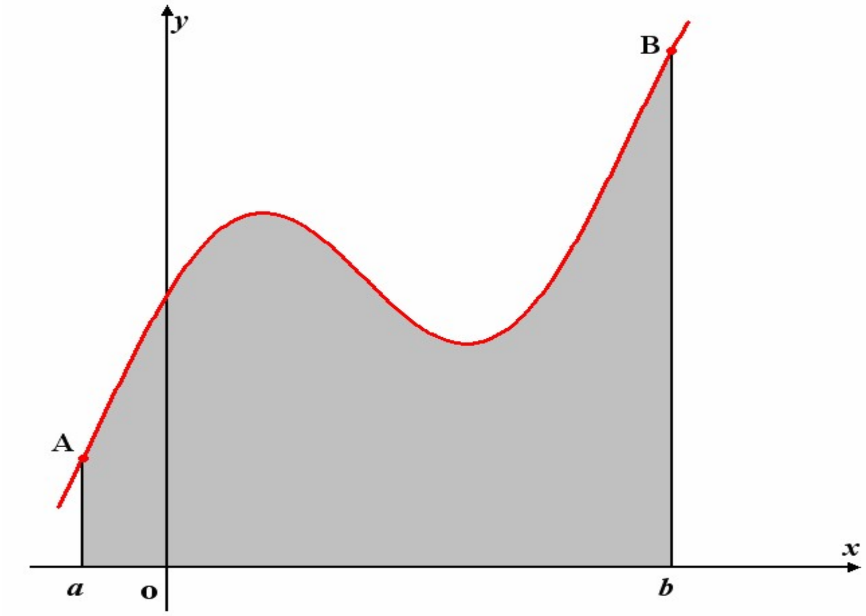
В заключение главы «Неопределенный интеграл» приведем таблицу основных интегралов, расширенную за счет наиболее часто встречающихся в приложениях интегралов. Для того, чтобы подчеркнуть свойство независимости интеграла от того является ли переменная интегрирования независимой переменной или некоторой функцией, табличные интегралы приведены в виде $\int f(u)du$, где $u = u(x)$.

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ (\alpha \neq -1)$	11. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = tgu + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	12. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -ctgu + C$
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	13. $\int tgudu = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
4. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	14. $\int ctgudu = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5. $\int a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
6. $\int e^u dx = e^u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
8. $\int \cos u du = \sin u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
9. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$	19. $\int \frac{udu}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2} + C$
10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	20. $\int \frac{udu}{u^2 + a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(u^2 + a^2\right) + C$

7.4. Определение и приемы вычисления определенного интеграла

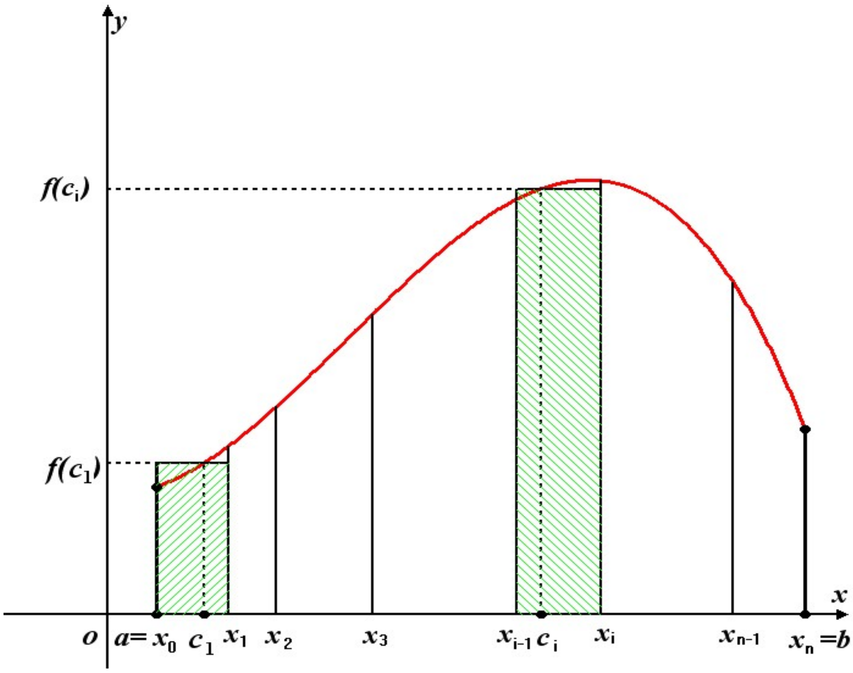
Задача о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим фигуру, ограниченную осью Ox, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$. Такая фигура называется *криволинейной трапецией* (фигура *aABb* на Рис.7.1.1). Найдем площадь этой фигуры.



Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_n = b$ с длинами частичных отрезков $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, .., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, или $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Выберем на каждом из этих отрезков произвольным способом точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и найдем значение функции в этой точке $f(c_i)$. Проведем через точки с координатами $(c_i, f(c_i))$ горизонтальные отрезки длиной Δx_i. Выполнив данное построение, получим ступенчатую фигуру (на следующем рисунке для простоты построены только два прямоугольника с основаниями Δx_i, высотами $f(c_i)$ и площадями $f(c_i)\Delta x_i$). Площадь всей ступенчатой фигуры, очевидно, равна $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Сумма, построенная по изложенным правилам, называется *интегральной суммой*.

Из рисунке видно, что площадь ступенчатой фигуры, равная интегральной сумме, не равна площади криволинейной трапеции. Однако, легко предположить, что при увеличении числа разбиений n и одновременном уменьшении длин интервалов разбиения, S_n будет неограниченно приближаться к площади криволинейной трапеции S. Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x_i)\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.



Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок на n частей произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, выберем произвольно точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Если существует предел интегральной суммы при $n\to\infty$ и $\lambda = \max(\Delta x_i) \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается так:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*; x – *переменной интегрирования*. Заметим, что определенный интеграл – это число.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл существует и конечен.

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad (k=const).$$

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл меняет свой знак: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. Величина определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

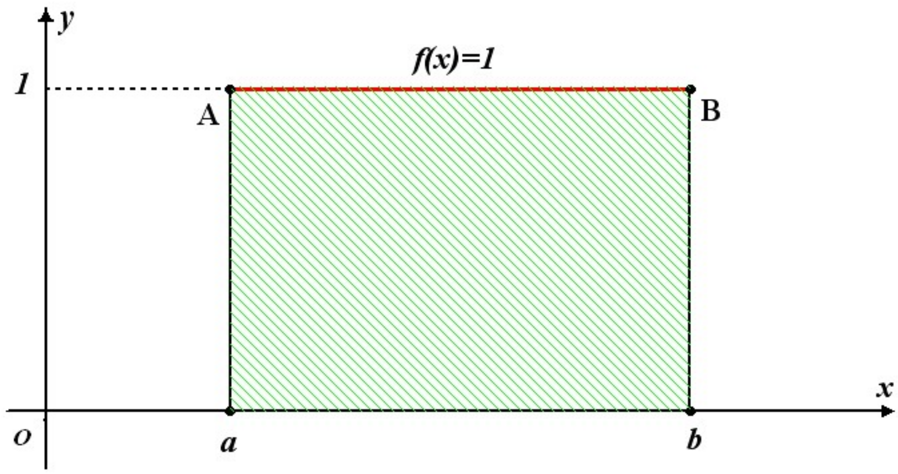
5. Если верхний и нижний пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

6. Интеграл на отрезке $[a,b]$ равен сумме интегралов :

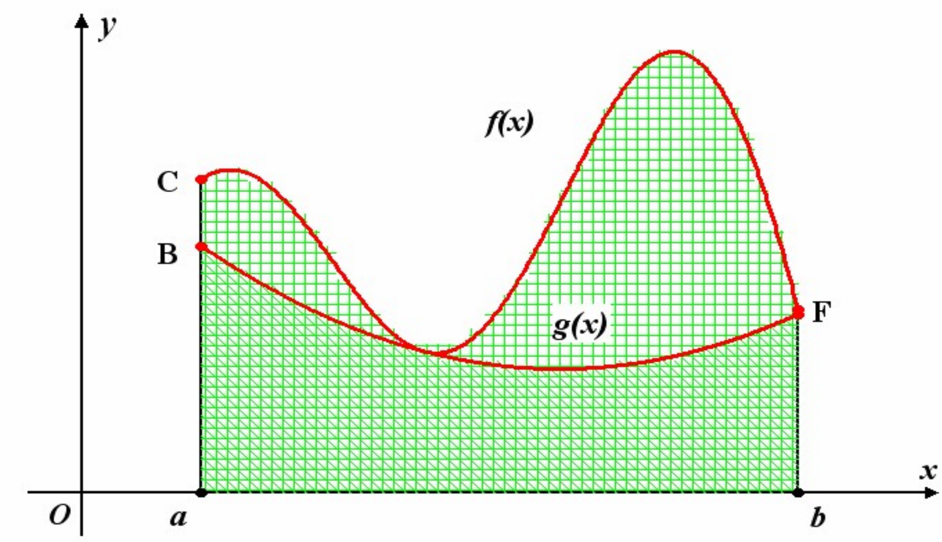
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

При этом точка c может лежать как внутри отрезка $[a,b]$, так и вне его, если все указанные интегралы существуют.

7. Если подынтегральная функция равна единице, то интеграл численно равен длине отрезка интегрирования $(b-a)$: $\int_a^b 1\cdot dx = b-a.$



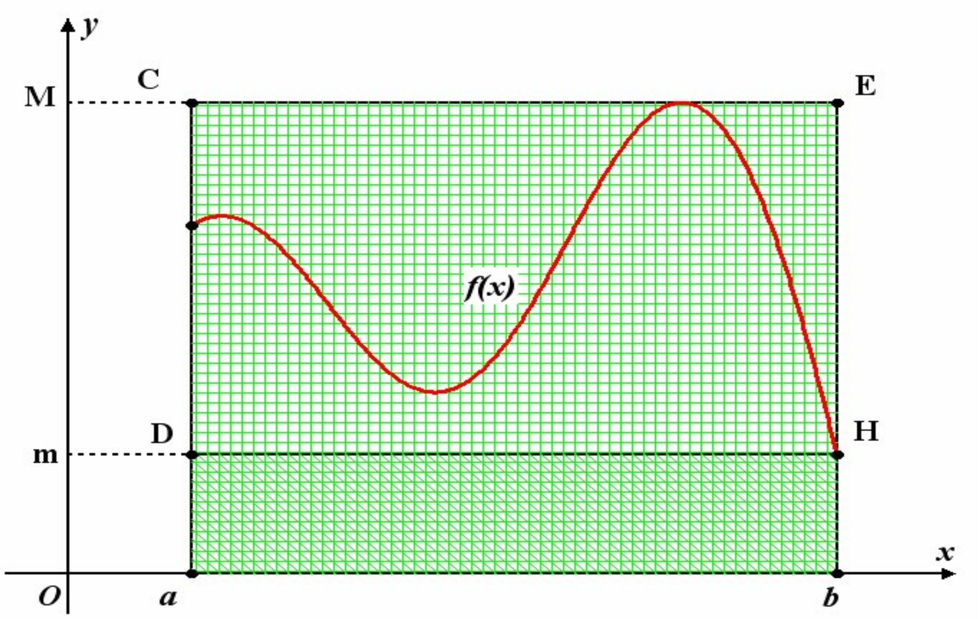
8. Если некоторые функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \geq g(x),\ \ x \in [a,b]$, то и интегралы от этих функций удовлетворяют этому же условию: $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$. Отметим геометрический смысл этого свойства. На рисунке видно, что при выполнении условия $f(x) \geq g(x),\ \ x \in [a,b]$ площадь криволинейной трапеции *aCFb* больше площади *aBFb*. Смысл этого свойства в том, что неравенства можно почленно интегрировать.



9. Теорема об оценке интеграла. Если подынтегральная функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ наибольшее значение, равное *M*, и наименьшее значение, равное *m*, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

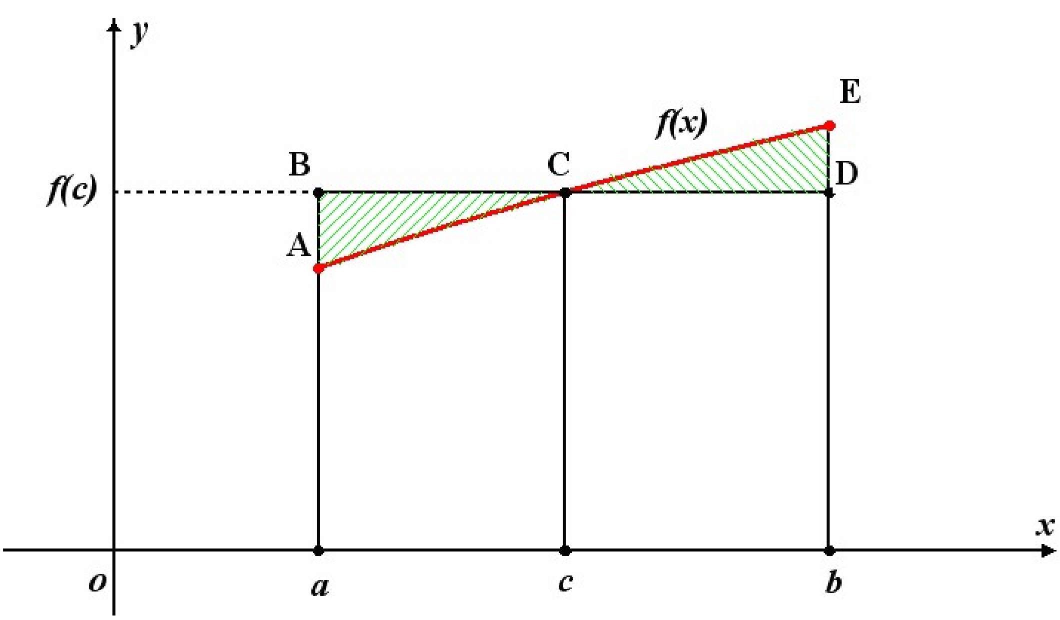
Геометрическое истолкование свойства показано на следующем рисунке. Видно, что площадь прямоугольника $aDHb$ меньше площади криволинейной трапеции, которая, в свою очередь, меньше площади прямоугольника $aCEb$.

$$S_{aDHb} = m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) = S_{aCEb} .$$



10. Теорема о среднем значении. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Площадь криволинейной трапеции на рисунке $S_{aAEb} = \int_a^b f(x)dx$ равна площади прямоугольника $S_{aBDb} = f(c)(b-a)$, причем $S_{ABC} = S_{CDE}$.



11. Рассмотрим функцию $y=f(x)$ непрерывную на отрезке $[a,b]$, тогда она непрерывна и на отрезке $[a,x]$, $x\in[a,b]$ и, следовательно, определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$ существует (переменную интегрирования x заменили на t во избежание путаницы). Такой интеграл называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом.* Если $y=f(x)$ непрерывная функция и $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x)=f(x)$. Т.е., *производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции,* в которой переменная интегрирования заменена переменной верхнего предела.

Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$ Эта формула устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралом и носит название формулы Ньютона-Лейбница. Формула дает удобный способ вычисления определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_a^b x^n dx.$

Решение. $\int_a^b x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\quad (n\neq -1).$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^2 \dfrac{x}{x^2+4}dx.$

Решение. $\int_1^2 \dfrac{x}{x^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2\dfrac{d(x^2+4)}{x^2+4}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}(\ln 8-\ln 5)=\dfrac{\ln 1.6}{2}.$

Замена переменной в определенном интеграле

Замена переменной проводится в случае, если получаемый интеграл вычисляется проще, чем исходный и выполняется в двух вариантах.

а) $\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} x=\varphi(t);\ \ \varphi(\alpha)=a;\ t=\alpha \\ dx=\varphi'(t)dt;\ \varphi(\beta)=b;\ t=\beta \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha).$

Данный интеграл существует, если функции $f(x),\ \varphi(t),\ \varphi'(t)$ непрерывны.

б) $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} u=\varphi(x);\ \ du=\varphi'(x)dx \\ \varphi(a)=A;\ \varphi(b)=B \end{matrix} \right| = \int_A^B f(u)du = F(B)-F(A).$

Замечание. При вычислении определенного интеграла методом замены переменной нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

Решение. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x=2\sin t;\ \ x=0 \Rightarrow t=0 \\ dx=2\cos tdt;\ \ x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt =$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt = 4(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^5 x}\cdot\cos xdx.$

Решение. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^5 x}\cdot\cos xdx = \left| \begin{matrix} u=\sin x;\ \ u=\sin 0=0 \\ du=\cos xdx;\ \ u=\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \sqrt[3]{u^5}du = \frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

Решение.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \arcsin(\ln e)-\arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Интегрирование по частям для определенного интеграла производится по формуле

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x\cdot\ln x dx.$

Решение.

$$\int\limits_1^e x\cdot\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x;\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx;\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}(\ln x-\frac{1}{2})\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях $x\in[a,\infty)$. Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется предел вида $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, который обозначается так $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Следовательно, по определению $\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если $f(x)\geq 0$, то в соответствии с геометрическим смыслом определенного интеграла он представляет собой площадь криволинейной трапеции с бесконечным основанием как показано на Рис. 7.5.1.

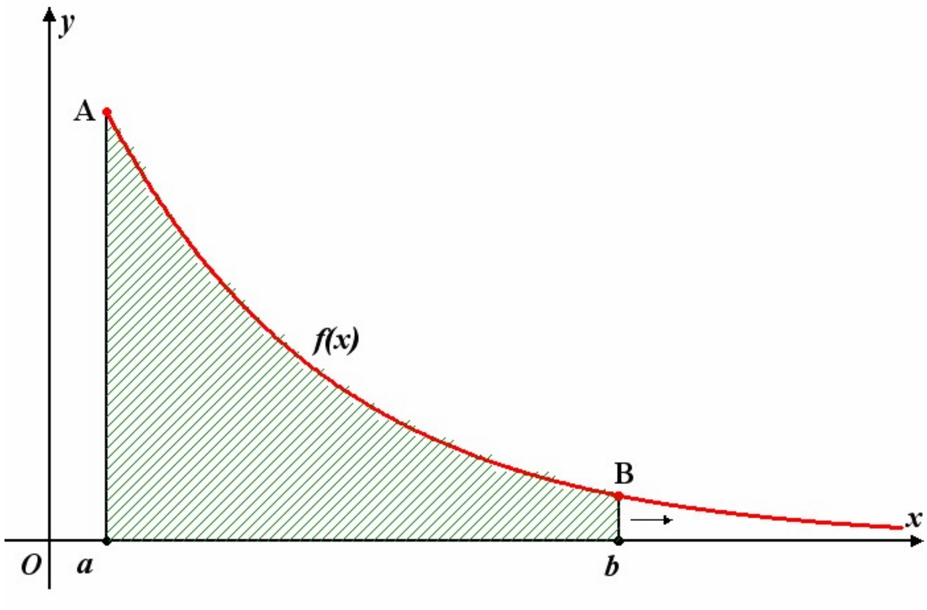


Рис. 7.5.1.

Если указанный предел существует и конечен, то говорят, что *интеграл сходится,* т.е. криволинейная трапеция с бесконечным основанием имеет конечную площадь. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что *интеграл расходится.*

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования, а также интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$, где c любая точка,

называются несобственными интегралами I-го рода. В последнем случае интеграл будет сходящимся, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{a}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ или установить его расходимость.

Решение.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} arctg\, x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}.$$

Данный интеграл сходится и его численное значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x}$ или установить его расходимость.

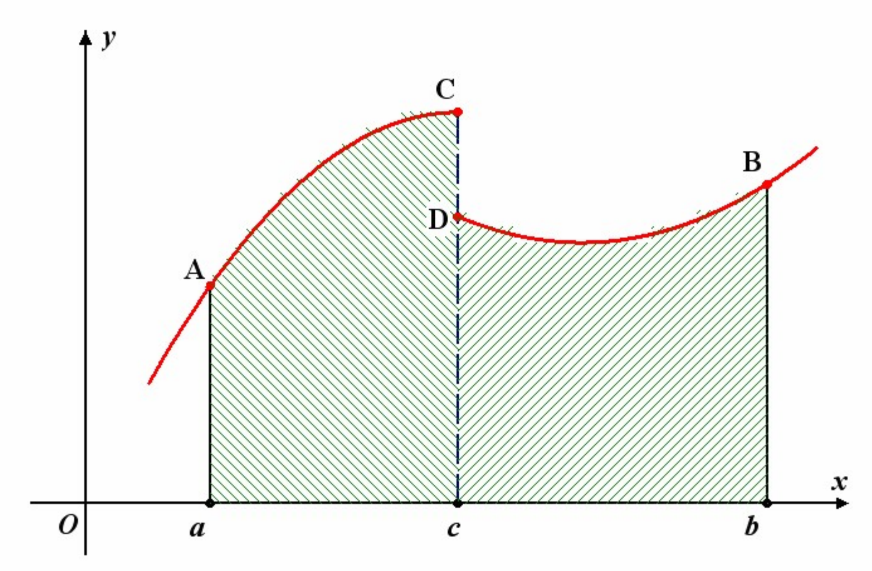
Решение. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{1+x} = \lim_{b\to\infty}\ln(1+x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln(1+b)-\ln 2) = \infty.$

Таким образом, данный интеграл расходится.

Интегралы от функций, имеющих разрыв первого рода

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $c\in[a,b]$. На следующем рисунке показана одна из возможных ситуаций. В этом случае разобьем интервал $[a,b]$ точкой c на два интервала и, используя свойство 6, получим $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$.

При этом значения функции $f(x)$ в каждом из полученных интервалов при $x=c$ будем считать равными соответствующим односторонним пределам. Геометрический смысл полученного равенства такой:

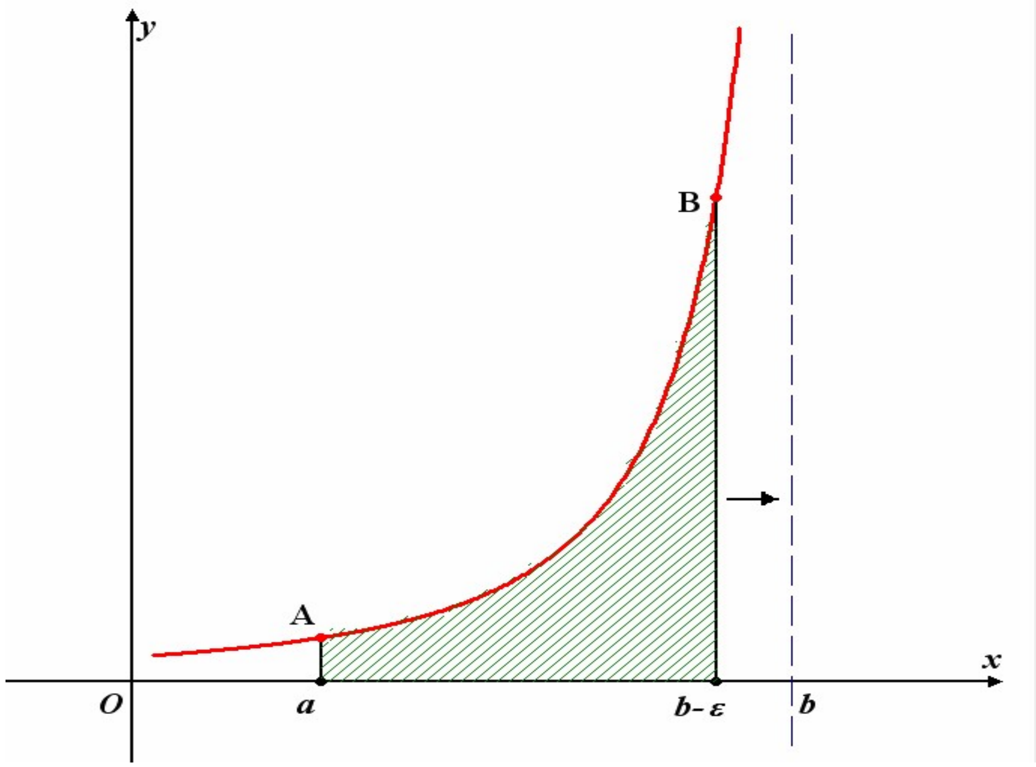


площадь криволинейной трапеции *aACDBb* равна сумме площадей трапеций *aACc* и *cDBb*. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках x отличных от *c*, а в точке *c* имеет разрыв первого рода, то определенный интеграл от нее существует и не зависит от значения функции в точке *c*.

Интегралы от функций, имеющих разрыв второго рода

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $x \in [a,b)$ и имеет разрыв второго рода в точке b, тогда несобственным интегралом второго рода называется предел вида $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, где $\varepsilon > 0$. Если данный предел существует и конечен, то интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся. Следовательно, по определению $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Геометрическая иллюстрация приведена на следующем рисунке и означает, что если существует и сходится данный интеграл, то данная неограниченная криволинейная трапеция обладает конечной площадью. Если интеграл расходится, то и площадь трапеции бесконечна.



Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ или показать его расходимость.

Решение. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{-1})=\infty.$

Вывод − интеграл расходится.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ или показать его расходимость.

Решение. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{1-x}\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}2(\sqrt{\varepsilon}-1)=1.$

Вывод − интеграл сходится и площадь криволинейной трапеции равна 1.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции, имеющей разрыв второго рода на левой границе интервала интегрирования:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx.\ (\text{Здесь } \varepsilon>0).$$

В случае, если разрыв второго рода имеет место внутри интервала интегрирования, например, в точке c, то следует разбить интервал этой точкой и рассмотреть сумму интегралов вида $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b}f(x)dx$.

Данный интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части, и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ или показать его расходимость.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}3\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{1+\delta}^{2}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon}-\sqrt[3]{-2}\right)+3\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\delta}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

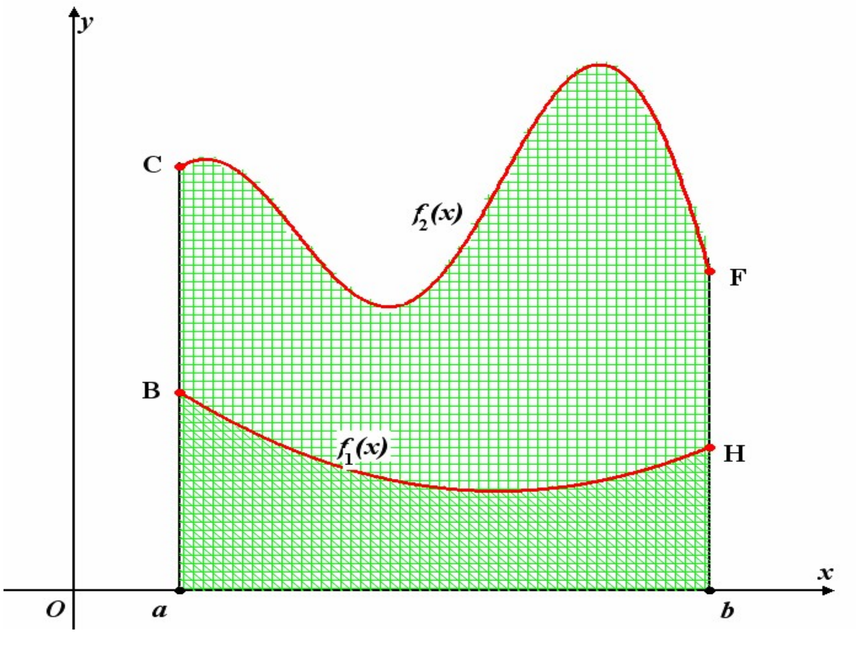
Вывод − интеграл сходится.

7.5. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a;\ x=b;\ y=0;\ y=f(x)$, равна $\int_a^b f(x)dx$ (предполагается, что $f(x)\geq 0$).

В более общем случае фигуры $x=a;\ x=b;\ y=f_1(x);\ y=f_2(x);\ f_2(x)\geq f_1(x)$ площадь равна $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$. Данный факт иллюстрируется рисунком. Очевидно, что площадь фигуры *BCFH* равна разности площадей фигур *aCFb* и *aBHb*.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = c;\ y = d;\ x = \varphi_1(y);\ y = \varphi_2(y);\ \varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$, вычисляется по формуле

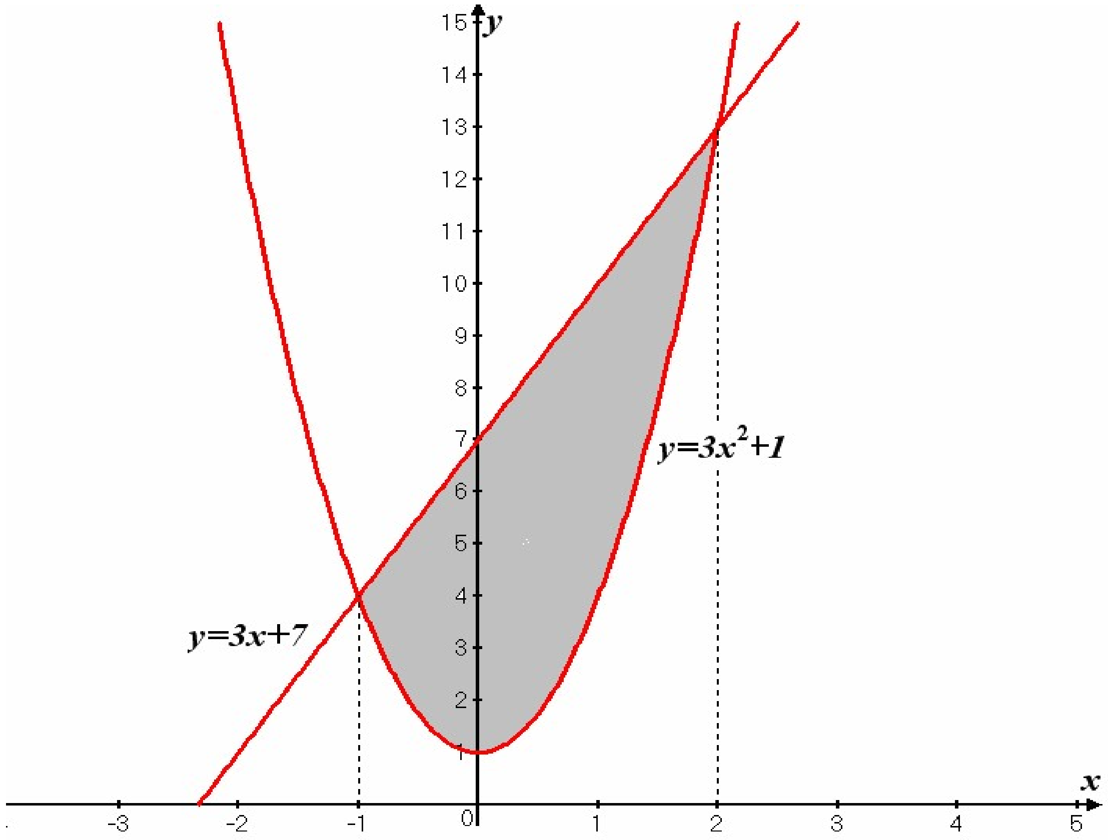
$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + 1;\quad y = 3x + 7$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой. Приравняем правые части уравнений, задающих функции, и решим полученное уравнение $3x^2 + 1 = 3x + 7 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0;\ \ x_1 = -1;\ \ x_2 = 2.$ Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рисунке. По формуле получим

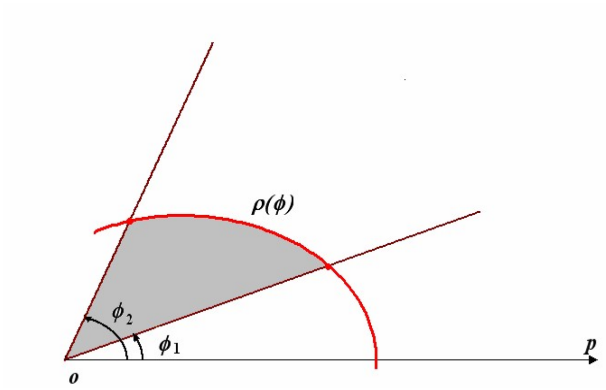
$$S = \int_{-1}^{2} (3x + 7 - 3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{2} (3x + 6 - 3x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 6x - x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= (6 + 12 - 8) - \left(\frac{3}{2} - 6 + 1\right) = \frac{27}{2}.$$



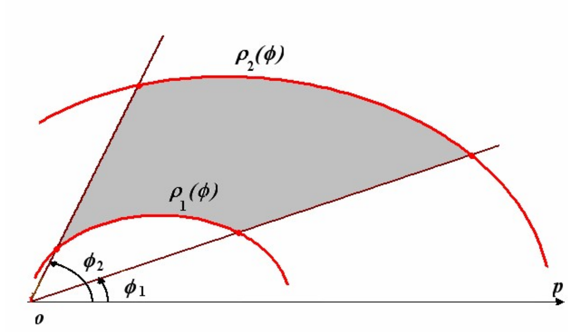
Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть плоская фигура ограничена линией $\rho=\rho(\phi)$ и лучами $\phi=\phi_1;\ \phi=\phi_2$, тогда ее площадь можно найти по формуле $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\rho^2(\phi)d\phi$



Если же фигура ограничена линиями $\rho_1=\rho_1(\phi);\ \rho_2=\rho_2(\phi)$ и лучами $\phi=\phi_1;\ \phi=\phi_2$, как показано на рисунке, площадь фигуры равна

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}(\rho_2^2(\phi)-\rho_1^2(\phi))d\phi\,.$$



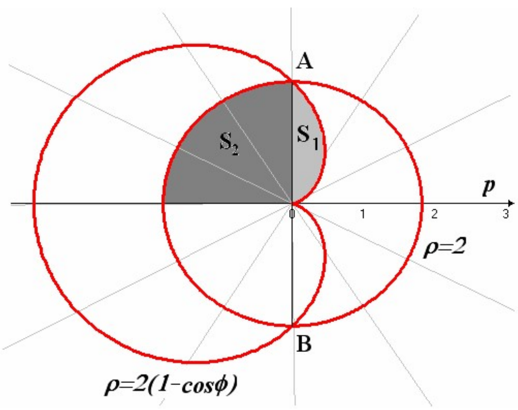
Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho=3+\sin\phi$.

Решение. Используем более простую первую формулу.

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+\sin\phi)^2d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(9+6\sin\phi+\sin^2\phi)d\phi=(9\phi-6\cos\phi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\phi}{2}d\phi=$$

$$=9\pi+\frac{1}{2}\pi=9.5\pi$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат $\rho=2(1-\cos\phi);\quad \rho=2$.



Решение. Используем формулу вторую формулу. Фигура, площадь которой требуется найти, показана на рисунке. Найдем точки пересечения окружности и кардиоиды. Решая совместно данные уравнения, получим точки $A(2;\dfrac{\pi}{2}),\ B(2;-\dfrac{\pi}{2})$.

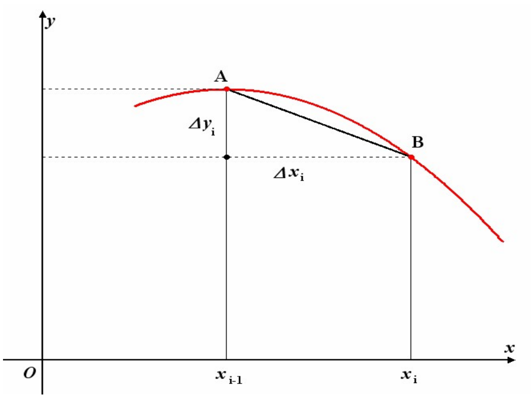
Вычислим площадь половины фигуры, которая в свою очередь делиться на части S_1 и S_2.

$$\frac{1}{2}S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2(1-\cos\phi))^2 d\phi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2)^2 d\phi = \frac{1}{2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\phi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\phi)d\phi +$$

$$+\frac{1}{2}4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\phi = 2(\frac{3}{2}\phi - 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin 2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\phi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2(\frac{3\pi}{4}-2)+2(\pi-\frac{\pi}{2}) = \frac{5}{2}\pi - 4.$$

Ответ: $S = 5\pi - 8$.

Вычисление длины дуги плоской кривой



Длина отрезка прямой, координаты точек концов которого известны, находится по формуле $L_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Поставим задачу определения длины дуги плоской кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$ и ограниченной точками $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Для этого разобьем плоскую кривую произвольными точками на n частей. Соединим полученные точки хордами. Длина полученной ломаной будет тем ближе к длине дуги, чем больше *n*. Длина *i*-го звена ломаной равна $\sqrt{(\Delta x)^2_i + (\Delta y_i)^2}$, а длина всей ломаной равна сумме всех длин звеньев

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\cdot(\Delta x_i).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и при условии, что $\max \Delta x_i \to 0$, получим формулу для вычисления длины дуги кривой. $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$,

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и их производные непрерывны, а границы изменения параметра определяют границы дуги, то длина кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt.$$

Пример 1. Найти длину кривой $y=\ln(2x)$ на интервале $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x};\ 1+[f'(x)]^2=1+\frac{1}{x^2}=\frac{1+x^2}{x^2};$$

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\left|\begin{matrix}t=\sqrt{1+x^2};\quad x=\sqrt{t^2-1};\quad dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}\\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2;\quad x=\sqrt{8}\Rightarrow t=3\end{matrix}\right|=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=$$

$$=\int_2^3(1+\frac{1}{t^2-1})dt=(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|)\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Пример 2. Найти длину кривой $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi,$ (первая арка циклоиды).

Решение.

$$x_t'=a(1-\cos t);\ y_t'=a\sin t;\ \left[x_t'\right]^2+\left[y_t'\right]^2=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=2a^2(1-\cos t).$$

Тогда

$$L=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

Пусть теперь кривая задана уравнением $\rho=\rho(\phi)$ в полярной системе координат и угол ϕ, отсчитываемый от полярной оси до радиус-вектора переменной точки дуги кривой, меняется в пределах $(\phi_1\le\phi\le\phi_2)$. Тогда при условии непрерывности функции $\rho(\phi)$ и ее производной $\rho'(\phi)$ длина кривой вычисляется по формуле $L=\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sqrt{[\rho(\phi)]^2+[\rho'(\phi)]^2}d\phi$.

Пример 3. Найти длину кривой $\rho=a(1-\cos\phi)\quad 0\le\phi\le 2\pi,$ (кардиоида).

Решение. Данная кривая симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды.

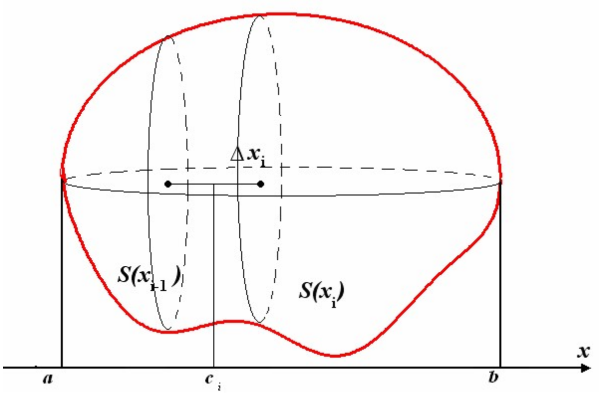
$$\frac{1}{2}L=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\phi)^2+a^2(\sin\phi)^2}d\phi=a\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos\phi+\cos^2\phi+\sin^2\phi}d\phi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\phi}d\phi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\phi)}d\phi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cdot\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}d\phi=4a\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)d\left(\frac{\phi}{2}\right)=$$

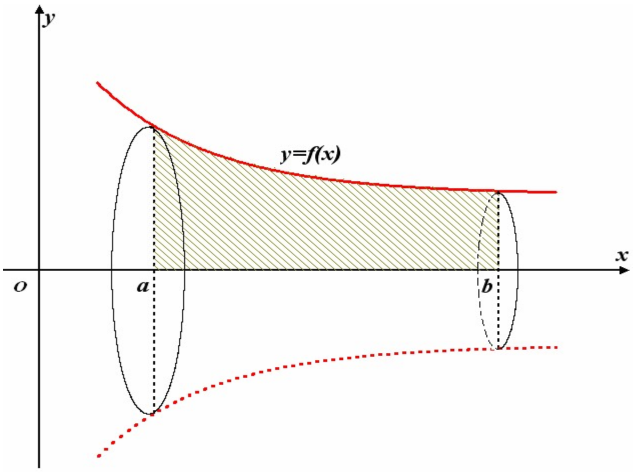
$$=4a(-\cos\left(\frac{\phi}{2}\right))\Big|_0^{\pi}=4a(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0)=4a.$$

Длина кардиоиды равна $L=8a$.

Вычисление объема тела

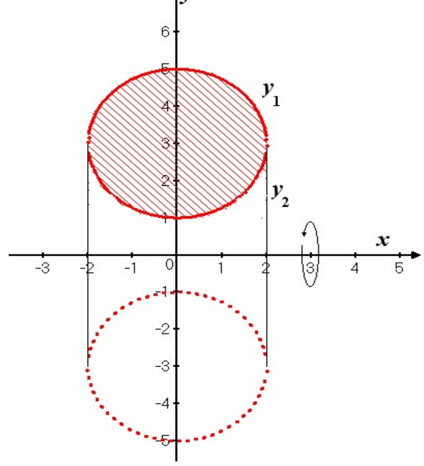


Пусть имеется тело, площади параллельных сечений которого заданы как некоторая функция $S(x)$, в каждой точке $x \in [a,b]$ (Рис.7.6.7). В этом случае объем тела равен $V = \int_a^b S(x)dx$, так как задача сводится к построению интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$; $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$.



Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Очевидно, что в этом случае поперечное сечение при любом значении $x \in [a,b]$, $S(x) = \pi R^2(x) = \pi f^2(x)$. Тогда получим $V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$.

Если плоская фигура, ограниченная линиями $x = x(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$. вращается вокруг оси Oy, то соответствующая формула имеет вид $V = \pi \int_c^d x^2(y)dy$.



Пример 1. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линией $x^2 + (y-3)^2 = 4$.

Решение. Плоская фигура ограничена сверху кривой $y_1 = 3 + \sqrt{4 - x^2}$, а снизу $y_2 = 3 - \sqrt{4 - x^2}$, тогда

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}(y_1(x))^2\,dx-\pi\int_{x_1}^{x_2}(y_2(x))^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}[(3+\sqrt{4-x^2})^2-(3-\sqrt{4-x^2})^2]dx=12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x=2\sin t;\;\; x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2} \\ dx=2\cos t dt;\;\; x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=48\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=24\pi^2 .$$

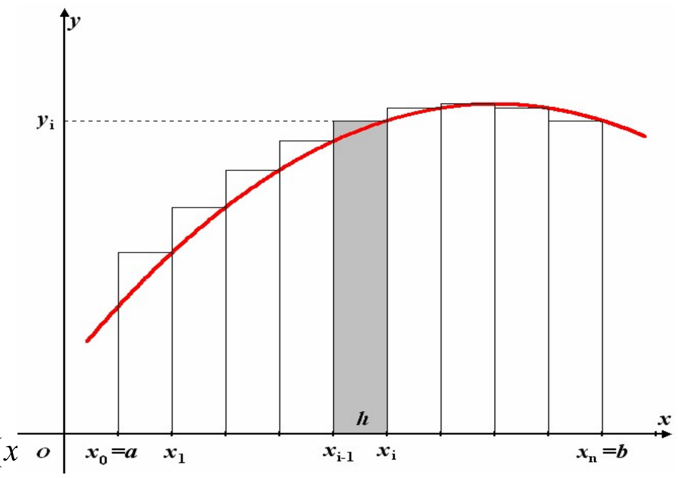
Пример 2. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линией $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. $V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_{-b}^{b}a^2(1-\dfrac{y^2}{b^2})dy=2\pi a^2(y-\dfrac{y^3}{3b^2})\Big|_0^b=\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

7.6. Приближенное вычисление определенного интеграла

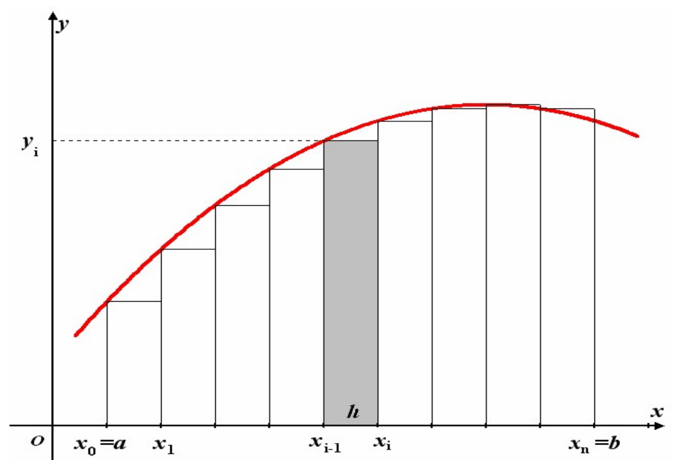
В основе приближенного вычисления определенного интеграла лежит построение интегральной суммы и тот факт, что данная сумма приближенно равна интегралу, и тем точнее, чем больше *n*. Рассмотрим простейший из численных методов − метод прямоугольников.

Разобьем интервал интегрирования $[a,b]$ на *n равных* интервалов точками $a=x_0,x_1,x_2,....,x_{n-1},x_n=b$, так, что $(x_i-x_{i-1})=h=\dfrac{b-a}{n}$; $(i=1,2,....,n)$ и найдем значения подынтегральной функции в точках разбиения: $y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_0),\ y_1=f(x_1),....,y_n=f(x$



Построим ступенчатую фигуру, так же как в пункте 7.1, выбирая точки x_i на *правых* концах интервалов разбиения Площадь ступенчатой фигуры и, следовательно, приближенное значение определенного интеграла, равно $I_1\approx\dfrac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+....y_n)$.

Построим ступенчатую фигуру другим способом. Выбирая точки на *левых* концах интервалов, найдем



площадь фигуры по формуле $I_2 \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$.

За приближенное значение определенного интеграла обычно принимают значение $I = \dfrac{I_1 + I_2}{2}$.

Пример. Найти точное значение интеграла $\int\limits_1^2 \sqrt{x^3}\,dx$ по формуле Ньютона-Лейбница. По формулам прямоугольников найти его приближенное значение. Вычислить абсолютную и относительную погрешность приближенного значения. В расчетах использовать разбиение отрезка интегрирования на 10 равных частей. Промежуточные вычисления вести, сохраняя три знака после запятой.

Решение. Вычислим данный интеграл сначала по формуле Ньютона-Лейбница. Получим $\int\limits_1^2 \sqrt{x^3}\,dx = \dfrac{2}{5}(4\sqrt{2} - 1) = 1.862$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения. Результаты сведем в таблицу.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$f(x)$	1.0	1.154	1.315	1.482	1.657	1.837	2.024	2.217	2.415	2.619	2.828

По первой формуле прямоугольников получим $I_1 = 0.1 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} y_k = 1.954$.

Вторая формула дает $I_2 = 0.1 \cdot \sum\limits_{k=0}^{9} y_k = 1.772$.

Приближенное значение интеграла $I = \dfrac{I_1 + I_2}{2} = 1.863$. Найдем абсолютную погрешность вычисления $\Delta = |1.863 - 1.862| = 0.001$. Относительная погрешность равна $\delta = \dfrac{\Delta}{I} \cdot 100\% = 0.032\%$.