7. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Область определения функции нескольких переменных

Многие задачи физики, техники, экономики и т.д. приводят к рассмотрению переменной величины, которая связана зависимостью с двумя или более независимо меняющимися переменными. Отсюда вытекает необходимость оперировать с так называемыми функциями нескольких переменных (аргументов). В данной главе мы ограничимся случаем двух независимых переменных, так как все основные свойства таких функций легко обобщить на большее число аргументов и, кроме того, функции двух переменных имеют вполне определенный геометрический смысл.

Переменная z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой упорядоченной паре чисел ($x;\ y$) из некоторого множества пар D по определенному правилу поставлено в соответствие единственное значение переменной z. При этом переменные x и y называются *независимыми переменными* (или аргументами), а переменная z – *функцией*. Обозначение функциональной зависимости между x, y и z имеет вид: $z = f(x; y)$.

Графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется множество точек пространства, координаты которых имеют вид (x; y; z), где x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата. В заданной системе координат графиком функции $z = f(x; y)$ в общем случае является поверхность.

Обычно функции двух переменных задают *аналитическим или табличным* способами. Нас в дальнейшем будет интересовать аналитический способ задания, при котором функция задается некоторой формулой, например, $z = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \sin(xy)$.

Множество $D(f)$ всех пар (x; y), при которых аналитическое выражение $f(x; y)$ имеет смысл, называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых z в области определения, называется *множеством значений функции*.

Таким образом, функцию $z = f(x; y)$ можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$. Тогда ее область определения геометрически представляет собой совокупность точек плоскости Oxy. Это может быть или вся координатная плоскость или часть плоскости, ограниченная некоторыми линиями. Такие линии называются *границами области определения*. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними*, а область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой областью*. Область, включающая границу называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$.

Некоторые условия нахождения области определения функции $D(f)$:

$\sqrt{f(x;y)} \Rightarrow f(x;y) \geq 0$;

$\log_a\left(f(x;y)\right) \Rightarrow f(x;y) > 0$;

$\dfrac{1}{f(x;y)} \Rightarrow f(x;y) \neq 0$;

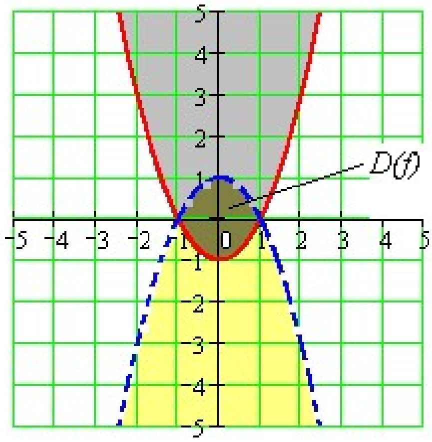
$\arcsin f(x;y) \Rightarrow -1 \leq f(x;y) \leq 1$;

$\arccos f(x;y) \Rightarrow -1 \leq f(x;y) \leq 1$.

Пример 1. Найдите область определения функции двух переменных $z(x;y) = \sqrt{1+y-x^2} - \ln(1-y-x^2)$.

Решение. Областью определения функции $z(x;y) = \sqrt{1+y-x^2} - \ln(1-y-x^2)$ является множество точек плоскости Oxy, значения координат которых удовлетворяют системе неравенств

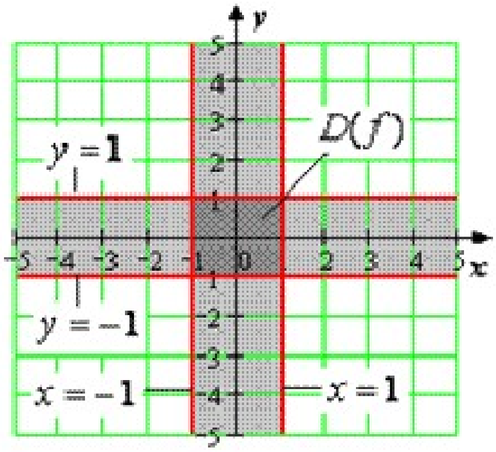
$$\begin{cases} 1+y-x^2 \geq 0; \\ 1-y-x^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x^2 - 1; & (10.1.1) \\ y < -x^2 + 1. & (10.1.2) \end{cases}$$



Рассмотрим сначала первое неравенство. Ему будет соответствовать уравнение $y = x^2 - 1$, которое определяет параболу с вершиной в точке $(0;-1)$, ее ветви направлены вверх. Парабола делит координатную плоскость на две части: внешнюю и внутреннюю. Для одной из них $y > x^2 - 1$, для другой $y < x^2 - 1$ (на самой параболе $y = x^2 - 1$). Чтобы установить, какая из этих частей состоит из точек, для которых $y \geq x^2 - 1$, достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки, например, для точки $(0;1)$. Подставив ее координаты в исследуемое первое неравенство, получим верное числовое неравенство $1 \geq 0-1$. Значит эта точка (она лежит во внутренней части) и подобные ей дают геометрическое изображение области, определяемой первым неравенством, причем точки параболы также принадлежат этой области. Рассуждая аналогично со вторым неравенством, получим, что оно определяет часть плоскости, расположенной внутри параболы $y=-x^2+1$. Причем точки самой параболы в область определения не входят. В таких случаях мы будем соответствующую линию изображать пунктиром.

На рисунке область определения закрашена более темным цветом.

Пример 2. Найдите область определения функции двух переменных $z(x,y)=\arcsin x+\arccos y$.



Решение. Областью определения функции $z(x;y)=\arcsin x+\arccos y$ является множество точек плоскости *Oxy*, значения координат которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1; & (10.1.3) \\ -1 \leq y \leq 1. & (10.1.4) \end{cases}$$

Решения первого неравенства изображаются на чертеже точками, лежащими на прямых $x=-1$ и $x=1$ и между ними, а решением второго неравенства – точками плоскости *Oxy*, лежащими на прямых $y=-1$ и $y=1$ и между ними. Геометрически область определения функции будет изображаться точками, принадлежащими одновременно горизонтальной и вертикальной полосе. Это будет квадрат. Область определения замкнутая, так как включает в себя точки границы. На рисунке она закрашена более темным цветом.

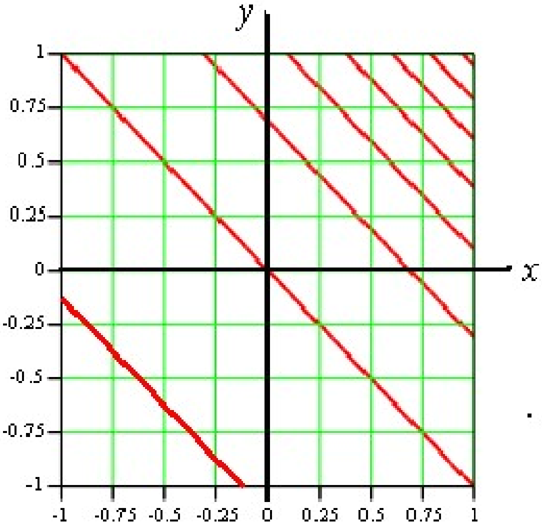
Линии уровня функции

Линии на плоскости *Oxy* вида $f(x;\ y) = C$ называются *линиями уровня функции двух переменных* $z=f(x;y)$.

Построение линий уровня, соответствующих различным значениям постоянной величины C, позволяет увидеть характер поверхности, заданной исследуемой функцией.

Сгущение линий уровня означает более быстрое изменение значений функции. Редкое расположение линий уровня характеризует пологую поверхность (значения функции изменяются медленно). Линии равных высот на физической карте – это пример линий уровня.

Пример 1. Найдите линии уровня функции $z = f(x;y) = e^{x+y}$.

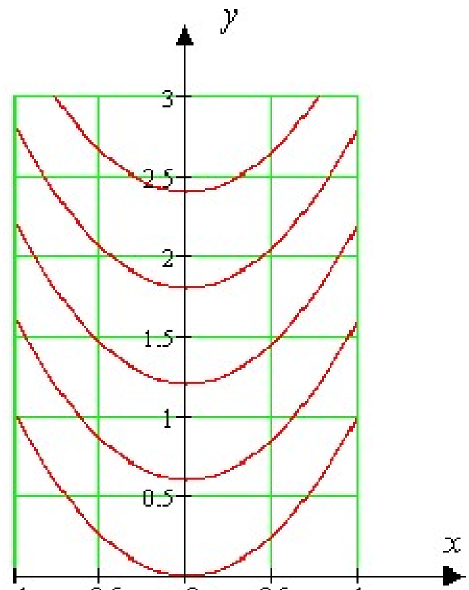


Решение. Линии уровня функции $z(x;y) = e^{x+y}$ – это семейство кривых на плоскости Oxy, описываемое уравнением $C = e^{x+y}$. Представим это уравнение в другой форме, выполнив следующие преобразования:

$$C = e^{x+y} \Rightarrow \ln C = \ln e^{x+y} \Rightarrow \ln C = x + y.$$

Пусть $\ln C = C^*$, тогда $y = C^* - x$ (семейство прямых линий)

Пример 2. Найдите линии уровня функции $z(x;y) = \sqrt{y - x^2}$.



Решение. Определить линии уровня функции $z(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ как семейства кривых $y = g(x,C)$ на плоскости Oxy можно, осуществляя следующие преобразования: $C = \sqrt{y - x^2} \Rightarrow y - x^2 = C^2$. Пусть $C^2 = C^*$, тогда $y = x^2 + C^*$, $C^* \geq 0$, (семейство парабол)

Предел и непрерывность функции двух переменных

Окрестностью точки $P_0(x_0;y_0)$ называется внутренность круга с центром в этой точке.

Число A называется *пределом функции* $z = f(x;y) = f(P)$ при $P \to P_0$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки $P_0(x_0;y_0)$, что для любой точки $P(x;y)$ из этой окрестности (за исключением может быть точки $P_0(x_0;y_0)$) выполняется неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в том, что каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такая окрестность точки $P_0(x_0;y_0)$, что во всех точках $P(x;y)$, отличных от $P_0(x_0;y_0)$, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x;y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Функция $z = f(x;y)$ называется *непрерывной* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если она:

1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;
2) имеет предел $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;
3) этот предел равен значению функции $z = f(x;y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$, т.е. $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

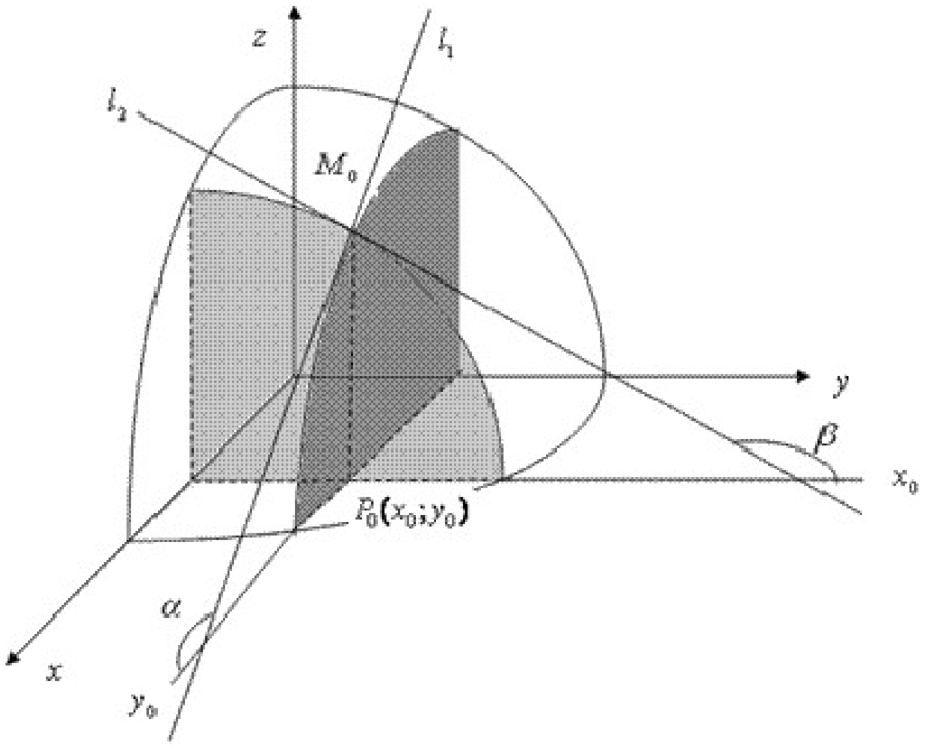
Точки, в которых непрерывность нарушается, т.е. не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, называются *точками разрыва* этой функции. Причем, точки разрыва функции $z = f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, например, функция $z = \dfrac{2}{y - x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Дифференцирование функции двух переменных

Разность $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0;y_0) = \Delta_x z$ называется *частным приращением по переменной x* функции $z = f(x;y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Разность $f(x_0;y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) = \Delta_y z$ называется *частным приращением по переменной y* функции $z = f(x;y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. Предел отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется *частной производной* *функции* $z = f(x;y)$ по одному из ее аргументов: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Используются также обозначения: z'_x, z'_y, f'_x, f'_y.

Геометрический смысл частных производных z'_x и z'_y заключается в том, что они равны значениям угловых коэффициентов касательных l_1 и l_2 к линиям пересечения поверхности, определяемой уравнением $z = z(x;y)$, плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, проходящими через точку M_0 (касательная l_1 параллельна плоскости *Oxz*, касательная l_2 параллельна плоскости *Oyz*).



Значения частных производных z'_x и z'_y в точке P_0 соответственно равны $z'_x(x_0;y_0) = tg\alpha$ и $z'_y(x_0;y_0) = \mathrm{tg}\beta$.

Частная производная функции двух переменных по переменной *x* представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированном значении *y*, поэтому ее находят по правилам вычисления производных функций одной переменной (аналогично рассматривается и частная производная по переменной *y*).

Пример 1. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z(x;y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

Решение.

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x+2\sqrt{xy}}.$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{xy}+2y}.$$

Пример 2. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)$.

Решение.

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\left(\frac{y}{x}+1\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(y+x)^2}{x^2}}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-x^2y}{\left(x^2+2yx+x^2+y^2\right)x^2}=\frac{-y}{2x^2+2yx+y^2}.$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(arctg\left(\frac{y}{x}+1\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}+1\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2x^2+2yx+y^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{x}{2x^2+2yx+y^2}.$$

Полный дифференциал ФНП

Полным приращением функции $z=f(x;y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ называется разность $\Delta z=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$.

Функция $z=f(x;y)$ называется *дифференцируемой в точке* $P(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \alpha(\Delta x;\Delta y)$. где a и b – не зависят от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x;\Delta y)$ – бесконечно малая величина, для которой $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\alpha(\Delta x;\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$.

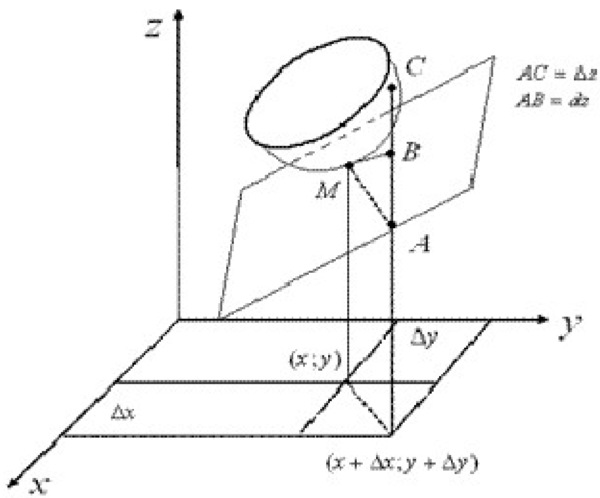
Главная, линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается dz:

$$dz = a\Delta x + b\Delta y.$$

Можно показать, что $a = \frac{\partial z}{\partial x}$; $b = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Таким образом, окончательно имеем: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Геометрический смысл дифференциала dz функции $z = f(x;y)$ состоит в том, что он равен приращению Δz аппликаты касательной плоскости.



Пример. Найдите полный дифференциал dz функции двух переменных $z(x;y) = \frac{x\arcsin y}{y}$.

Решение.

$$dz = d\left(\frac{x\arcsin y}{y}\right) =$$

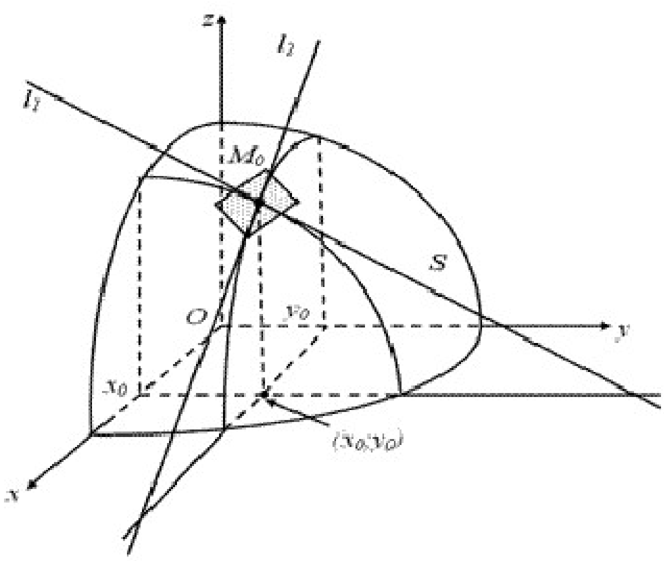
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\arcsin y}{y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\arcsin y}{y}\right)dy =$$

$$= \frac{\arcsin y}{y}\cdot 1\cdot dx + x\cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot y - 1\cdot \arcsin y}{y^2}dy =$$

$$= \frac{\arcsin y}{y}dx + \frac{x}{y^2}\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \arcsin y\right)dy.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ некоторой области D, лежащей в плоскости Oxy. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$.



Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии, уравнение которой в плоскости $x = x_0$ имеет вид $z = f(x_0; y) = \varphi_1(y)$. Оно получается подстановкой $x = x_0$ в исходную функцию $z = f(x; y)$. Точка $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ принадлежит кривой $\varphi_1(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $\varphi_1(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $\varphi_1(y)$ может быть проведена касательная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z = f(x, y_0) = \varphi_2(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0.*

Уравнение касательной плоскости для функции $z = f(x; y)$ имеет следующий вид: $z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)\cdot(y - y_0)$.

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее *нормалью*.

Нормальный вектор касательной плоскости может быть принят за направляющей вектор нормали к поверхности, поэтому ее канонические уравнения будут

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнения касательной плоскости и нормали примут следующий вид

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Пример 1. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z(x;y)=\sin\frac{x}{y}$ в точке $M_0(\pi;1;0)$.

Решение. Найдем значения частных производных z'_x и z'_y функции $z(x;y)=\sin\frac{x}{y}$ в точке $M_0(\pi;1;0)$:

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot\cos\frac{x}{y},\quad z'_x(\pi;1)=\frac{1}{1}\cdot\cos\frac{\pi}{1}=-1,$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y},\quad z'_y(\pi;1)=-\frac{\pi}{(-1)^2}\cos\frac{\pi}{1}=\pi.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z(x;y)=\sin\frac{x}{y}$, в точке $M_0(\pi;1;0)$ имеет вид:

$$z-0=-1(x-\pi)+\pi(y-1)\ \text{ или}$$
$$x-\pi\cdot y+z=0.$$

Канонические уравнения нормали к поверхности, заданной уравнением $z(x;y)=\sin\frac{x}{y}$, в точке $M_0(\pi;1;0)$ имеют вид: $\frac{x-\pi}{-1}=\frac{y-1}{\pi}=\frac{z}{-1}$.

Пример 2. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2-z^2=-1$ в точке $M_0(2;2;3)$.

Решение. Чтобы записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, определяемой заданной функцией, найдем значения частных производных от этой функции в точке M_0:

$F'_x = 2x$, $F'_x(M_0) = 2\cdot 2 = 4$;

$F'_y = 2y$, $F'_y(M_0) = 2\cdot 2 = 4$;

$F'_z = -2z$, $F'_z(M_0) = -2\cdot 3 = -6$.

Запишем уравнение касательной плоскости и нормали:

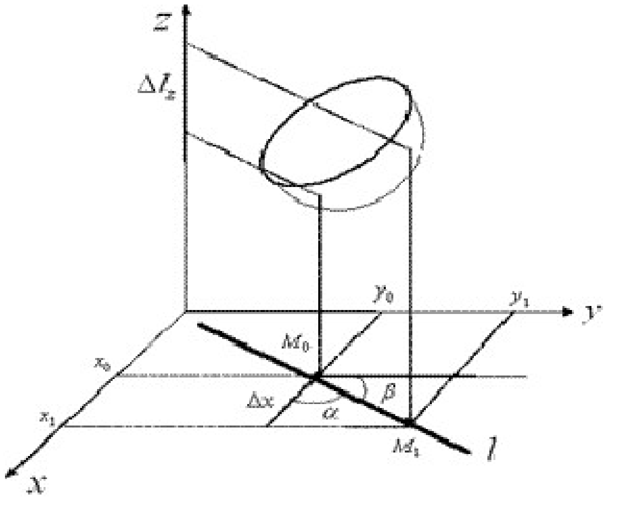
$4(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0$ или после преобразований $2x+2y-3z+1=0$,

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}.$$

Производная по направлению и градиент функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, $\vec{l}$ – некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{e} = (\cos\alpha;\cos\beta)$, $|\vec{e}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, при этом $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, а $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – косинусы углов, образуемых вектором $\vec{e}$ с осями координат (направляющие косинусы).

При перемещении в данном направлении $\vec{l}$ точки $M_0(x_0;y_0)$ в точку $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ функция $z = f(x;y)$ получает приращение $\Delta_l z(x;y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x;y)$, называемое *приращением функции* $z = f(x;y)$ *в данном направлении*



Длина отрезка $M_0M_1 = \left|\overrightarrow{\Delta l}\right|$ численно равна гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого равны Δx и Δy, следовательно, $\Delta x = \left|\overrightarrow{\Delta l}\right| \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \left|\overrightarrow{\Delta l}\right| \cdot \cos\beta$ и приращение функции $\Delta_l z(x; y)$ в данном направлении можно представить следующей формулой:

$$\Delta_l z(x; y) = f(x + \left|\overrightarrow{\Delta l}\right| \cos\alpha; y + \left|\overrightarrow{\Delta l}\right| \cos\beta) - f(x; y).$$

Производной $z'_l(x; y)$ *по направлению* $\vec{l}$ функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения $\overrightarrow{\Delta l}$ при стремлении Δl к нулю:

$$z'_l(x; y) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z(x; y)}{\left|\overrightarrow{\Delta l}\right|}.$$

Производная по направлению $z'_l(x; y)$ характеризует скорость изменения функции в направлении $\vec{l}$ и определяется выражением: $z'_l(x; y) = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$, которые вычисляются по формулам $\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}, \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}$, где $\vec{l}$ – вектор, задающий данное направление, l_x, l_y - координаты вектора, $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ – длина вектора $\vec{l}$.

Пример. Вычислите производную функции $z(x; y) = 5x^4 - 3x - y - 1$ в точке M(2; 1) по направлению вектора $\overrightarrow{MN}$, где N(5; 5).

Решение. Нахождение производной $z'_l(x; y)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MN}$ согласно формуле $z'_l(x; y) = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta$ связано с определением частных производных z'_x, z'_y и направляющих косинусов cosα, cosβ.

Вычислим частные производные z'_x и z'_y в точке M(2; 1):

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^4 - 3x - y - 1\right) = 20x^3 - 3, \quad z'_x(2; 1) = 20 \cdot 2^3 - 3 = 157,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4 - 3x - y - 1\right) = -1, \quad z'_y(2; 1) = -1.$$

Направляющие косинусы cosα и cosβ можно найти, если использовать приведенные выше формулы. $\overrightarrow{MN}=\{5-2;5-1\}=\{3;4\}$, $|MN|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Тогда $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

Значение производной по направлению $z'_l(2;1)$ в точке $M(2;1)$ равно:

$$z'_l(2;1)=z'_x(2;1)\cdot\cos\alpha+z'_y(2;1)\cdot\cos\beta=157\cdot\frac{3}{5}+(-1)\cdot\frac{4}{5}=93,4.$$

Так как $z'_l(2;1)$ положительна в точке $M(2;1)$, то можно сделать вывод, что функция $z(x;y)$ возрастает в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$.

Градиентом $grad\,z$ функции $z=f(x;y)$ называется вектор с координатами $\left(z'_x;z'_y\right)$.

Производная по направлению z'_l равна скалярному произведению градиента и единичного вектора, задающего направление вдоль некоторой прямой l, т.е. $z'_l=gradz\cdot\vec{e}=z'_x\cos\alpha+z'_y\cos\beta$.

Градиент функции $z=f(x;y)$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Если в точке $M(x;y)$ модуль градиента отличен от нуля, то в точке $M(x;y)$ градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

Пример. Найдите градиент $grad\,z$ функции $z(x;y)=x\cdot\ln(x+y)$ и его модуль в точке $M(-1;2)$.

Решение. Координаты вектора $grad\,z$ можно найти, если вычислить значения частных производных z'_x и z'_y в точке $M(-1;2)$:

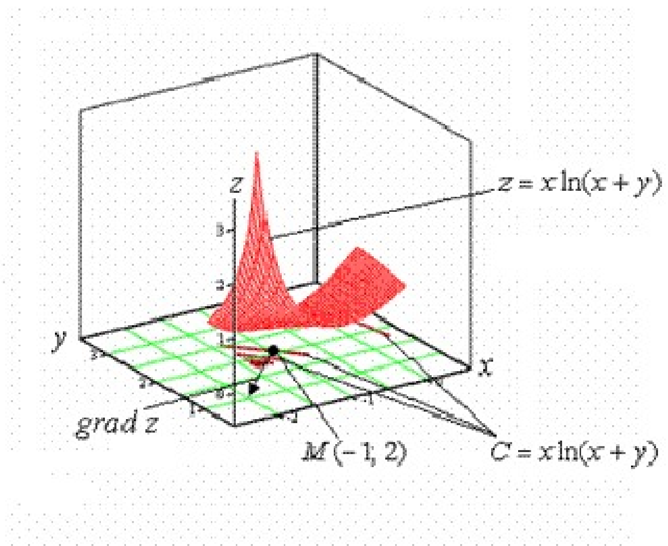
$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\ln(x+y)\right)=x'\cdot\ln(x+y)+x\cdot(\ln(x+y))'_x=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y},$$

$$z'_x(-1;2)=\ln 1-1=-1,$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot\ln(x+y)\right)=x\cdot(\ln(x+y))'_y=\frac{x}{x+y},$$

$$z'_y(-1;2)=-1.$$

Градиент функции $grad\,z=(-1;-1)$ в точке $M(-1;2)$ перпендикулярен линии уровня, которая проходит через данную точку. Направление максимально быстрого возрастания функции $z(x;y) = x \cdot \ln(x+y)$ и градиента в точке $M(-1;\ 2)$ совпадают.



Модуль градиента функции $|grad\ z|$ в точке $M(-1;\ 2)$ – это длина вектора-градиента: $|grad\ z| = \sqrt{(z'_x(-1;2))^2 + (z'_y(-1;2))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$

Частные производные второго порядка

Частная производная от частной производной функции называется *частной производной второго порядка*.

Приняты следующие обозначения для частных производных второго порядка:

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = f''_{xx}(x;y)$ – функция дифференцируется по x последовательно два раза;

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y)$ – функция сначала дифференцируется по x, а результат затем дифференцируется по y;

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y)$ – функция сначала дифференцируется по y, а результат затем дифференцируется по x;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = f''_{yy}(x;y)$ – функция дифференцируется по y последовательно два раза.

Если функция $z(x;y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} в этой точке равны.

Пример. Найдите частные производные второго порядка от функции $z(x,y) = x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y$.

Решение. Первоначально находим частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y\right) = 4x^3y^2 + 2xy - 3y,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y\right) = 2x^4y + x^2 - 3x - 2.$$

Последовательно находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3y^2 + 2xy - 3y\right) = 12x^2y^2 + 2y,$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y^2 + 2xy - 3y\right) = 8x^3y + 2x - 3,$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4y + x^2 - 3x - 2\right) = 8x^3y + 2x - 3,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4y + x^2 - 3x - 2\right) = 2x^4.$$

Экстремум функции

Точка $P_0(x_0;y_0)$ называется *точкой максимума функции* $z = f(x;y)$, а значение функции в ней $z_0 = f(x_0;y_0)$ – *максимумом*, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x;y)$ из этой окрестности, отличных от $P_0(x_0;y_0)$, выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0;y_0)$. Точка $P_0(x_0;y_0)$ называется *точкой минимума функции* $z = f(x;y)$, а значение функции в ней $z_0 = f(x_0;y_0)$ – *минимумом*, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x;y)$ из этой окрестности, отличных от

$P_0(x_0; y_0)$, выполняется неравенство $f(x; y) > f(x_0; y_0)$. Максимум и минимум функции называют ее *экстремумами*.

Точка, в которой обе частные производные равны нулю, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, называется *стационарной точкой* функции $z = f(x; y)$.

Имеет место теорема (необходимый признак существования экстремума): Если $P_0(x_0; y_0)$ точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x; y)$, то $z'_x(x_0; y_0) = 0$, $z'_y(x_0; y_0) = 0$. Этот признак не является достаточным условием. Сформулируем достаточный признак.

Пусть в стационарной точке $P_0(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка $z''_{xx}(x_0; y_0)$, $z''_{xy}(x_0; y_0)$, $z''_{yy}(x_0; y_0)$.

Составим определитель второго порядка вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0; y_0) & z''_{xy}(x_0; y_0) \\ z''_{xy}(x_0; y_0) & z''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $P_0(x_0; y_0)$ экстремум. Причем максимум, если $z''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ и минимум, если $z''_{xx}(x_0; y_0) > 0$.

2) Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ не имеет экстремума.

3) В случае, если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме в точке $P_0(x_0; y_0)$ остается открытым.

Схема исследования функции $z(x; y)$ на экстремум

1. Находим стационарные точки.

1.1. Находим частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x; y)$.

1.2. Находим решение системы уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

2. *Проверяем выполнение достаточного условия экстремума* в каждой стационарной точке.

2.1. Находим частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} функции $z=f(x;y)$.

2.2. Определяем значения частных производных второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} в стационарной точке.

2.3. Вычислим значение определителя вида $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0;y_0) & z''_{xy}(x_0;y_0) \\ z''_{xy}(x_0;y_0) & z''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix}$ и, используя достаточное условие, экстремума делаем вывод относительно наличия экстремума в стационарных точках.

Пример 1. Исследовать функцию $z(x;y) = xy(1-x-y)$ на экстремум.

Решение.

1. Находим стационарные точки.

1.1. Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x;y)$.

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\big(xy(1-x-y)\big) = y(1-x-y) + xy(-1) =$$
$$= y - xy - y^2 - xy = y - 2xy - y^2.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\big(xy(1-x-y)\big) = x(1-x-y) + xy(-1) =$$
$$= x - x^2 - xy - xy = x - x^2 - 2xy.$$

1.2. Для нахождения стационарных точек решаем систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0; \\ x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-2x-y) = 0; \\ x(1-x-2y) = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x = 1; \\ y = 0. \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x = 0; \\ y = 1. \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 1-2x-y = 0; \\ 1-x-2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3; \\ y = 1/3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, стационарные точки имеют координаты (0; 0), (1; 0), (0; 1) и (1/3; 1/3).

2. *Проверим выполнение достаточного условия экстремума* для каждой из найденных точек.

2.1. Найдем частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} исследуемой функции $z=f(x;\,y)$.

$$z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z'_x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y-2xy-y^2\right)=-2y.$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x-x^2-2xy\right)=-2x.$$

$$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z'_y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x-x^2-2xy\right)=1-2x-2y.$$

2.2. Определим значения частных производных z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} исследуемой функции $z=f(x;\,y)$ в стационарных точках (0; 0), (1; 0), (0; 1) и (1/3; 1/3).

$$z''_{xx}(0;0)=0;\quad z''_{xx}(1;0)=0;\quad z''_{xx}(0;1)=-2;\quad z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3};$$

$$z''_{yy}(0;0)=0;\quad z''_{yy}(1;0)=-2;\quad z''_{yy}(0;1)=0;\quad z''_{yy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3};$$

$$z''_{xy}(0;0)=1;\quad z''_{xy}(1;0)=-1;\quad z''_{xy}(0;1)=-1;\quad z''_{xy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

2.3. Вычислим определитель $\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0;y_0) & z''_{xy}(x_0;y_0)\\ z''_{xy}(x_0;y_0) & z''_{yy}(x_0;y_0)\end{vmatrix}$ в каждой из стационарных точек.

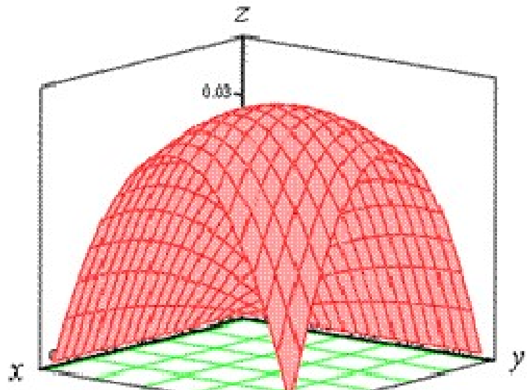
$\Delta_1=\begin{vmatrix} z''_{xx}(0;0) & z''_{xy}(0;0)\\ z''_{xy}(0;0) & z''_{yy}(0;0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1<0$, следовательно, в стационарной точке (0; 0) экстремума нет.

$\Delta_2=\begin{vmatrix} z''_{xx}(1;0) & z''_{xy}(1;0)\\ z''_{xy}(1;0) & z''_{yy}(1;0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0-1=-1<0$, следовательно, в стационарной точке (1; 0) экстремума нет.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} z''_{xx}(0;1) & z''_{xy}(0;1) \\ z''_{xy}(0;1) & z''_{yy}(0;1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$, следовательно, в стационарной точке (0; 1) экстремума нет.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) & z''_{xy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \\ z''_{xy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) & z''_{yy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0,$$

следовательно, в стационарной точке $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ экстремум есть. Так как $z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} < 0$, то точка $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – точка максимума.



Значение функции в точке максимума

$$z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$$

График исследуемой функции $z(x;y) = xy(1 - x - y)$ представлен на рисунке.

Пример 2. Исследовать функцию $z(x,y) = 3x + 6y + x^2 - xy + y^2$ на экстремум.

Решение.

1. Находим стационарные точки, используя *необходимые условия экстремума*.

1.1. Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x;y)$.

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x + 6y + x^2 - xy + y^2\right) = 3 + 2x - y.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x + 6y + x^2 - xy + y^2\right) = 6 - x + 2y.$$

Решим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$ для определения стационарных точек.

$$\begin{cases} 3+2x-y=0; \\ 6-x+2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6+4x-2y=0; \\ 6-x+2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+3x=0; \\ y=3+2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4; \\ y=-5. \end{cases}$$

Стационарная точка имеет координаты (–4;–5).

2. Проверим выполнение *достаточного условия* экстремума.

2.1. Найдем частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} функции $z=f(x;y)$.

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3+2x-y\right) = 2.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6-x+2y\right) = 2.$$

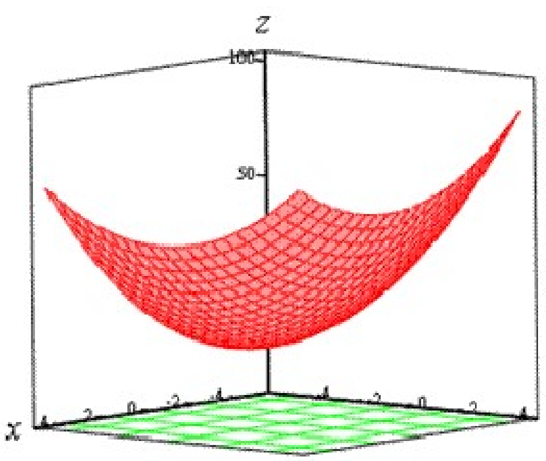
$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6-x+2y\right) = -1.$$

Частные производные z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} имеют постоянные значения в любой точке плоскости *Oxy*.

2.2. Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0;y_0) & z''_{xy}(x_0;y_0) \\ z''_{xy}(x_0;y_0) & z''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(-4;-5) & z''_{xy}(-4;-5) \\ z''_{xy}(-4;-5) & z''_{yy}(-4;-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3>0$, следовательно, в стационарной точке (–4; –5) экстремум есть, и, так как $z''_{xx}(-4;-5)=2>0$, то точка $(-4;-5)$ – точка минимума. Найдем минимальное значение функции $z(-4;-5)=-21$.

График исследуемой функции $z(x,y)=3x+6y+x^2-xy+y^2$ представлен на рисунке.



Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, в которой в некоторых точках она достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

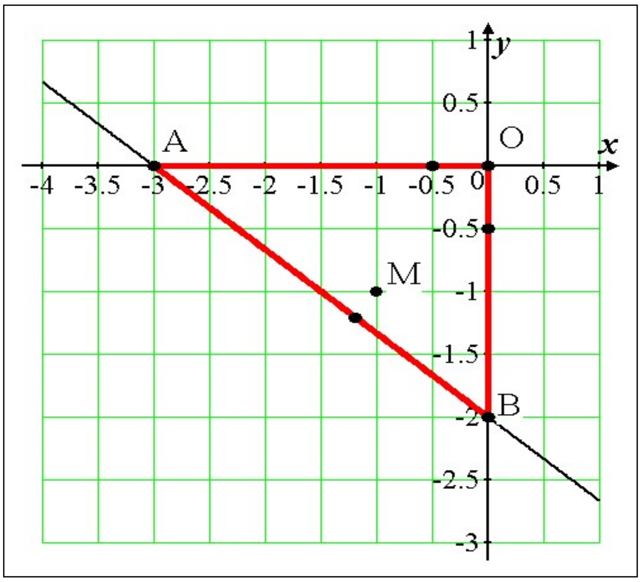
Порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в замкнутой области $\overline{D}$ функции $z = f(x;y)$ состоит в следующем:

1. Найдем все стационарные точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислим значения функции в них.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ на границе области и ее значения в угловых точках области.

3. Сравним все найденные значения функции и выберем из них наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x;y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $\begin{cases} x \le 0; \\ y \le 0; \\ 2x + 3y + 6 \ge 0. \end{cases}$



Решение.

1. Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - xy + x + y\right) = 2x - y + 1 = 0; \\ z'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - xy + x + y\right) = 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение (-1;-1). Стационарная точка M(-1;-1) лежит внутри области D (она изображена на рисунке). Найдем значение функции в ней: $z_1 = f(-1;-1) = -1$.

Исследуем поведение функции на границе области. Для этого разобьем границу на три отрезка *AO, OB, AB*. На отрезке *AO* имеем: $y=0,\ -3\le x\le 0,\ z=x^2+x$. Найдем значения функции на концах отрезка $[-3;0]$ в точках $A(-3;0)$ и $O(0;0)$. Получим $z_2=f(-3;0)=6,\ z_3=f(0;0)=0$. Теперь попробуем найти стационарную точку на этом отрезке. Для этого найдем производную $z_x{}'=2x+1$ и приравняем ее к нулю, получим $x=-\dfrac{1}{2}$. Точка $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ лежит внутри отрезка AO. Значение функции в этой точке будет $z_4=f\left(-\dfrac{1}{2};0\right)=-\dfrac{1}{4}$. Перейдем к отрезку BO.

Здесь $x=0,\ -2\le y\le 0,\ z=y^2+y$. Вычислим значение функции в точке $B(0;-2)$. Получим $z_5=f(0;-2)=2$. При $y=0$ значение функции вычислено ранее.

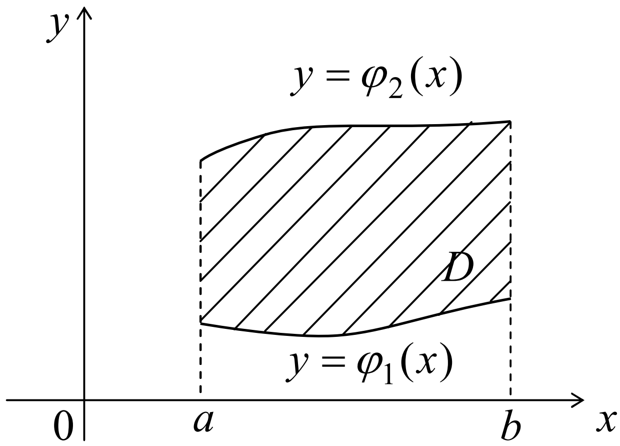
Попробуем найти стационарную точку функции $z=y^2+y$, лежащую внутри отрезка OB. Для этого найдем $z'_y=2y+1$ и приравняем ее к нулю, получим $y=-\dfrac{1}{2}$. Точка $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ лежит внутри отрезка OB. Значение функции в ней $z_6=f\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Рассмотрим поведение функции z на отрезке AB. Значение функции на концах отрезка (в точках *A* и *B*) вычислены ранее. Найдем стационарную точку, лежащую внутри этого отрезка. Для этого из уравнения прямой *AB* $2x+3y+6=0$ выразим *y*: $y=-\dfrac{2}{3}x-2$. Подставим найденное y в функцию $z=x^2+y^2-xy+x+y$. Получим $z=\dfrac{19}{9}x^2+5x+2$ и найдем стационарную точку этой функции при условии, что $-3\le x\le 0$. Имеем: $z'_x=\dfrac{38}{9}x+5=0$, $x=-\dfrac{45}{38}$. Таким образом, стационарная точка лежащая внутри отрезка AB, имеет координаты $\left(-\dfrac{45}{38};-\dfrac{46}{38}\right)$. Значение функции в ней $z_7=f\left(-\dfrac{45}{38};-\dfrac{46}{38}\right)=-\dfrac{73}{76}$.

Сравнивая все найденные значения функции $z_1,z_2,...z_7$, делаем вывод, что в заданной области функция z принимает наименьшее значение (-1) в точке $M(-1;-1)$. Наибольшее значение, равное 6, функция принимает в точке $A(-3;0)$.

Двойной интеграл в полярных координатах

Если область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$ и линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, то такая область называется правильной в направлении оси Oy: луч, запущенный параллельно оси Oy и сонаправленный с ней, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Эта формула представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dxdy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берется внутренний интеграл при постоянном x, затем берется внешний интеграл, то есть результат внутреннего интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y=c$, $y=d$ и линиями $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, причем функции $\psi_1(y),\psi_2(y)$ непрерывны и таковы, что $\psi_1(x)\le\psi_2(x)$ на отрезке $[c;d]$, то такая область называется правильной в направлении оси Ox: луч, запущенный параллельно оси Ox и сонаправленный с ней, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Эта формула также представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$ называется *внутренним* интегралом.

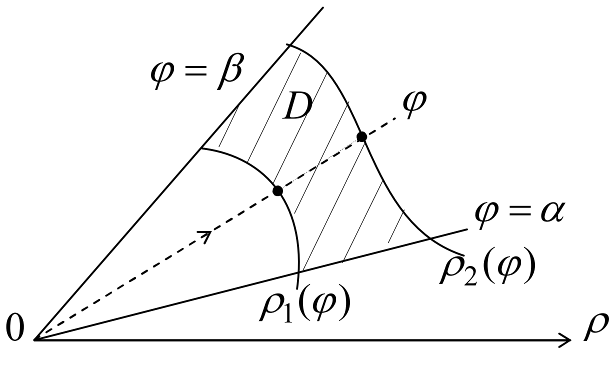
Для вычисления двукратного интеграла сначала берется внутренний интеграл при постоянном y, затем берется внешний интеграл, то есть результат внутреннего интегрирования интегрируем по y в пределах от c до d.

Замечания. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно считать по любой из формул.

Если область D не является правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy, то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy. Полезно помнить, что внешние пределы интегрирования в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Двойной интеграл в полярных координатах

Известна формула перехода от декартовых координат точки плоскости к полярным при вычислении двойного интеграла:



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Если область D ограничена линиями $\begin{cases} \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi), \\ \alpha\le\varphi\le\beta, \end{cases}$ то

$$\iint\limits_D f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho.$$

Приложения двойного интеграла

1. Площадь плоской фигуры может быть вычислена в декартовой системе координат по формуле $S=\iint\limits_D dxdy$ или в полярной системе координат по формуле $S=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi$.

2. Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)\geq 0$ и построенного на основании D в плоскости Oxy, равен $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

3. Масса неоднородной пластинки D с переменной поверхностной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ равна: $m=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy$.

4. Статические моменты пластинки D относительно координатных осей могут быть вычислены по формулам: $S_x=\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)dxdy$, $S_y=\iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)dxdy$.

5. Координаты центра тяжести пластинки D могут быть найдены по формулам: $x_0=\dfrac{S_y}{m}=\dfrac{\iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}$, $y_0=\dfrac{S_x}{m}=\dfrac{\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}$.

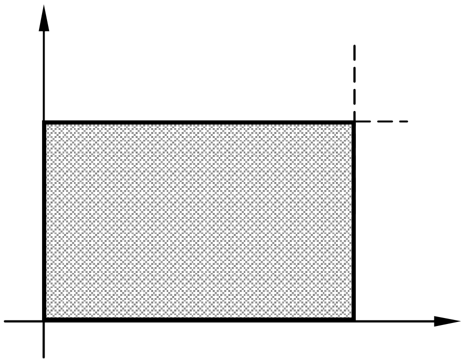
6. Моменты инерции пластинки D относительно координатных осей вычисляются по формулам: $I_x=\iint\limits_D y^2\cdot\gamma(x,y)dxdy$, $I_y=\iint\limits_D x^2\cdot\gamma(x,y)dxdy$.

7. Момент инерции пластинки D относительно начала координат равен $I_0=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\cdot\gamma(x,y)dxdy$.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, если область D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2$;

Решение

Построим область интегрирования – прямоугольник. Границы области D определяются системой $D:\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 2\,. \end{cases}$



Р

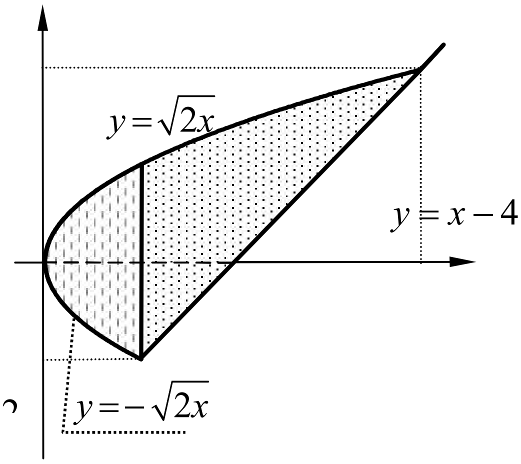
Составим выражение для вычисления двукратного интеграла

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 xydy = \int\limits_0^3 xdx \int\limits_0^2 ydy\ .$$

Проведем интегрирование, для этого вычислим внутренний интеграл, а затем найденное решение подставим во внешний интеграл

$$\int\limits_0^2 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = 2 \to \int\limits_0^3 xdx \int\limits_0^2 ydy = \int\limits_0^3 x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2\right)dx = 2\int\limits_0^3 xdx = 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = 9\,.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ (выражение совпадает с предыдущим), а область D ограничена прямой $y = x - 4$ и параболой $y^2 = 2x$.



Решение

Область интегрирования показана на рисунке. Выберем порядок интегрирования: сначала по переменной *y*, а затем по переменной *x*. Тогда внешние постоянные пределы интегрирования будут расположены на оси О*x*.

В этом случае область интегрирования необходимо разбить на две части D_1 и D_2 прямой, параллельной оси О*y*, так как линия нижней границы состоит из двух частей: кривой $y = -\sqrt{2x}$ и прямой $y = x - 4$.

Найдем абсциссы точек пересечения, приравняв выражения линий

$$2x = (x-4)^2 \to x_1 = 2; \quad x_2 = 8\,.$$

Тогда область интегрирования $D = D_1 + D_2$, где

$$D_1:\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}\ , \end{cases} \quad D_2:\begin{cases} 2 \le x \le 8, \\ x-4 \le y \le \sqrt{2x}\,. \end{cases}$$

Двойной интеграл в этом случае выражается двумя двукратными интегралами: $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \int\limits_2^8 xdx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy = 90$.

Заметим, что внешние постоянные пределы интегрирования можно выбрать на оси Оy. В этом случае интегрировать придется в другом порядке – сначала по переменной x, а затем по переменной y. Такой выбор постоянных пределов интегрирования является более удобным, поскольку разбивать область интегрирования не нужно (рис. 9). Найдем ординаты точек пересечения

$$\frac{1}{2}y^2 = y + 4 \to y_1 = -2, \quad y_2 = 4.$$

Тогда границы области D определяются системой $D: \begin{cases} -2 \le y \le 4, \\ \frac{1}{2}y^2 \le x \le y + 4. \end{cases}$

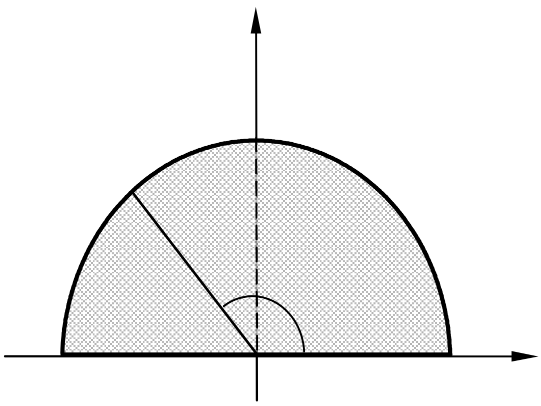
В этом случае двойной интеграл по области интегрирования D выражается одним двукратным интегралом $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{-2}^{4} ydy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx$.

Вычислим внутренний интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} = \frac{1}{2}[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}]$,

раскрыв скобки, подставим полученное выражение во внешний интеграл. Последовательное вычисление двукратных интегралов приводит к тому же результату:

$$\iint\limits_D xydxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} y[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}]dy = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\right|_{-2}^{4} = 90.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ (выражение совпадает с предыдущими), а область D – верхняя часть круга $x^2 + y^2 \le 4$.



Решение

Построим чертеж области D. Найдем уравнение границы области. Для этого заменим в выражении $x^2 + y^2 \le 4$ знак неравенства на «равно», получим уравнение окружности (верхней границы области D) $x^2 + y^2 = 4$.

Поскольку область интегрирования ограничена окружностью, то удобно перейти в полярную систему координат. Подставим в уравнение окружности соотношения $x = \rho\cdot\cos\varphi$, $y = \rho\cdot\sin\varphi$ и запишем уравнение линии верхней границы области в полярной системе координат

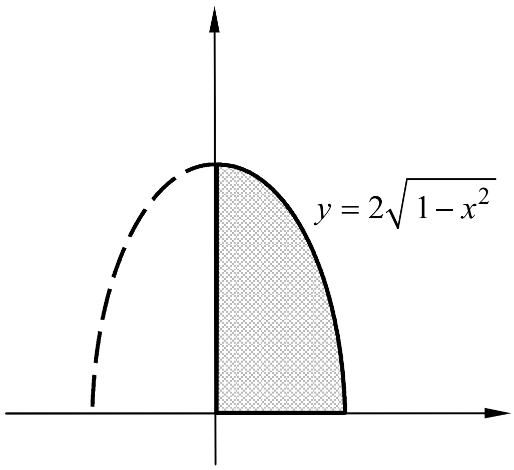
$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4 \ \rightarrow\ \rho = 2\ .$$

Полюс расположен в точке $\mathrm{O}(0;0)$, поэтому в качестве уравнения линии нижней границы области интегрирования в полярной системе координат следует взять $\rho = 0$.

Из рисунка видно, что интервал изменения угла поворота луча составляет π радиан. Таким образом, границы области D определяются системой неравенств $D:\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \rho \le 2\ . \end{cases}$. Двойной интеграл в полярной системе координат примет вид

$$\int\limits_D \rho^3\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho = 4\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}\sin 2\varphi\, d\varphi = 0\,.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ (выражение совпадает с предыдущими), а область D ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ и расположена в первой четверти координатной плоскости.



Решение

Область *D* показана на рисунке. Выберем внешние пределы интегрирования на оси О*x* (абсциссы крайних точек области слева и справа: $x = 0,\quad x = 1$). Найдем пределы интегрирования внутреннего интеграла, для этого выразим *y* из уравнения эллипса: $y = 2\sqrt{1-x^2}$ – верхняя граница и $y = 0$ – нижняя граница. Тогда система, определяющая границы области будет иметь вид $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2\sqrt{1-x^2}\ . \end{cases}$

Проведем двукратное интегрирование – внутренний интеграл по *y*, затем внешний интеграл по *x*

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{2\sqrt{1-x^2}} ydy = \int\limits_0^1 x\cdot 2\left(1-x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$