8. Дифференциальные уравнения.
Дифференциальные уравнения 1 порядка

8.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения (основные понятия)

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и производные (или дифференциалы) этой функции, то есть $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, *y=y(x)* – искомая функция; y', y'', …, $y^{(n)}$ – производные искомой функции.

Дифференциальное уравнение, содержащее одну независимую переменную, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Далее будем называть такие уравнения просто *дифференциальными уравнениями* или сокращённо ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, дифференцируемая по крайней мере n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение последнее обращается в тождество. Например, функция $y = 2\ln(x-3)+1$ является решением дифференциального уравнения $(x-3)y'' + y' = 0$. Действительно, $y' = \frac{2}{x-3}$; $y'' = -\frac{2}{(x-3)^2}$. После подстановки в уравнение получим $(x-3)\cdot(-\frac{2}{(x-3)^2}) + \frac{2}{(x-3)} = -\frac{2}{(x-3)} + \frac{2}{(x-3)} \equiv 0$.

В дальнейшем понятие решения дифференциального уравнения первого $(F(x, y, y') = 0)$ и второго $(F(x, y, y', y'') = 0)$ порядков будет дополнено и уточнено. Как мы увидим ниже, при нахождении решения дифференциального уравнения приходится выполнять операции интегрирования. Поэтому процесс нахождения решения ДУ называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. уравнение вида: $F(x, y, y') = 0$. Разрешая это уравнение, если это возможно, относительно y', получим $y' = f(x, y)$. Это уравнение называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Решением дифференциального уравнения первого порядка $F(x,y,y')=0$ называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, т.е. $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0$. График решения дифференциального уравнения *называется интегральной кривой.*

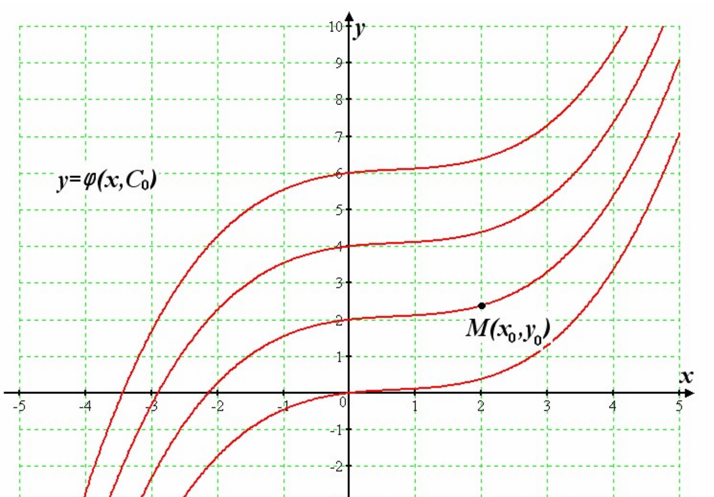
Условие, состоящее в том, что при $x=x_0$ функция $y(x)$ должна быть равна заданному числу y_0, т.е. $y(x_0)=y_0$, называется *начальным условием.* Обычно начальное условие записывается в виде $y(x_0)=y_0$ или $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая таким условиям:

1. при любом допустимом значении произвольной постоянной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением;

2. каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$ можно найти такое значение $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию, т.е. $\varphi(x_0,C_0)=y_0$.

Всякое решение $y=\varphi(x,C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется *частным решением*. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего данному начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется *задачей Коши*. Геометрически это обозначает, что из семейства интегральных кривых, определяемых общим решением, нужно выделить ту, которая проходит через точку M_0 с координатами $M_0(x_0;y_0)$. Эта интегральная кривая и будет графиком соответствующего частного решения. Рисунок справа иллюстрирует решение задачи Коши.



Если общее решение дифференциального уравнения получено в виде не разрешенном относительно y, т.е. в виде $\Phi(x,y,C)=0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. При $C = C_0$ решение принимает вид $\Phi(x, y, C_0) = 0$ и называется *частным интегралом.*

Рассмотрим ДУ первого порядка в виде: $y' = f(x;y)$.Так как производная y' равна отношению дифференциалов ($y' = \frac{dy}{dx}$), то уравнение $y' = f(x;y)$ можно записать в виде $f(x;y)dx - dy = 0$. Записанное в такой форме, оно является частным случаем более общего уравнения $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$.

Уравнение вида $y' = f(x)$.

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на некотором интервале. В этом случае все решения данного дифференциального уравнения находятся так: $y = \int f(x)dx + C$. Если задано начальное условие, $y(x_0) = y_0$ то можно определить постоянную C и найти соответствующее частное решение: $y = \int f(x)dx + C_0$.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = (x-1)^2$.

Решение. В данном уравнении заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = (x-1)^2$; умножим обе части уравнения на dx. Тогда $dy = (x-1)^2 dx$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения: $\int dy = \int (x-1)^2 dx$ или $y = \frac{(x-1)^3}{3} + C$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x^2+1)y' = arctg(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $y' = \frac{arctg(x)}{x^2+1}$.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{arctg(x)}{x^2+1}$. Умножим обе части уравнения на dx, получим $dy = \frac{arctg(x)}{x^2+1}dx$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения: $\int dy = \int \frac{arctg(x)}{x^2+1}dx$. Интеграл, стоящий в правой части уравнения, можно найти путем внесения множителя под знак дифференциала:

$$y=\int arctg(x)d\left(arctg(x)\right)=\frac{\left(arctg(x)\right)^2}{2}+C.$$

Определим постоянную *C,* пользуясь начальным условием $y(0)=1$. Для этого подставим $x=0$ и $y=1$ в полученное равенство. Тогда $1=\frac{\left(arctg(0)\right)^2}{2}+C$, т.к. $arctg0=0$, то $C_0=1$. Подставив $C_0=1$ в общее решение ДУ, получим частное решение $y=\frac{\left(arctg(x)\right)^2}{2}+1$, которое удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$. Правая часть уравнения представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых зависит только от *x* или только от *y*. Такое уравнение можно представить также в виде: $y'-f_1(x)f_2(y)=0;\quad dy-f_1(x)f_2(y)dx=0;\ \frac{dy}{f_2(y)}-f_1(x)dx=0$ при $f_2(y)\neq 0$.

Преобразуем полученное равенство: $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. В данном случае элементарными преобразованиями мы «разделили переменные». То есть, в левой части уравнения находится функция, зависящая от переменной y и дифференциал по переменной y, а в правой части − по переменной x.

Проинтегрируем полученное равенство $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx$.

После нахождения соответствующих интегралов получится общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными: $\Phi(x,y,C)=0$. Если задано начальное условие, то при подстановке x_0 и y_0 в общее решение находится постоянная величина C_0, а, соответственно, и частный интеграл.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $yy'=\frac{-2x}{\cos y}$.

Решение. Преобразуем исходное ДУ к виду: $y\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x$. Разделим переменные следующим образом: в левой части полученного равенства оставим все множители, зависящие от y, а в правой части соберём множители, зависящие от x. Для этого умножим обе части данного выражения на dx, тогда получим: $y\cos y\cdot dy=-2x\cdot dx$. Проинтегрируем обе части полученного равенства: $\int y\cdot\cos y\,dy=-2\int x\,dx$.

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям: $\int y\cdot\cos y\,dy=\left\{\begin{matrix} u=y, & dv=\cos y\cdot dy \\ du=dy, & v=\sin y\end{matrix}\right\}=y\cdot\sin y-\int\sin y\cdot dy=y\cdot\sin y+\cos y+C$.

Выполняя интегрирование в правой части уравнения, получим: $y\cdot\sin y+\cos y+C=-x^2$ или $y\cdot\sin y+\cos y+x^2+C=0$. Мы получили решение в виде общего интеграла.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y'=x(y^2+1)$.

Решение. В данном уравнении заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим $\dfrac{dy}{dx}=x(y^2+1)$. Разделим переменные $(\dfrac{dy}{y^2+1}=xdx)$ и проинтегрируем обе части равенства: $\int\dfrac{dy}{y^2+1}=\int x\,dx$. Получим: $arctg\,y=\dfrac{x^2}{2}+C$ или $y=tg\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$. Таким образом, получено общее решение исходного уравнения.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $(1+e^x)\cdot y\dfrac{dy}{dx}=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Имеем: $(1+e^x)\cdot y\,dy=e^x\,dx$. Для разделения переменных поделим обе части уравнения на $(1+e^x)$. Получим следующее равенство: $\int y\,dy=\int\dfrac{e^x}{e^x+1}dx$. Общий интеграл уравнения будет иметь вид: $\dfrac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C$.

Найдем частный интеграл. Полагая $x=0,\quad y=1$, получим: $0{,}5=\ln 2+C$, откуда находим $C_0=0{,}5-\ln 2$. Подставляя C_0 в общий интеграл, окончательно имеем: $0{,}5y^2=\ln(1+e^x)+0{,}5-\ln 2$ или $y^2=2(\ln(1+e^x)+0{,}5-\ln 2)$.

Замечание. Дифференциальное уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ будет уравнением с разделяющимися переменными, если после тождественных преобразований оно может быть записано в виде: $P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(x)Q_2(y)dy=0$. Путем почленного деления его обеих частей на $P_2(y)Q_1(x)$ оно приводится к виду $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy=0$. Дальнейший ход его решения аналогичен рассмотренному выше. Переход к последней форме требует, чтобы $P_2(y)Q_1(x)\neq 0$. Следует иметь в виду, что при этом могут быть потеряны некоторые решения. Чтобы этого не произошло, нужно отдельно решить уравнение $P_2(y)Q_1(x)=0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего интеграла (так называемые особые решения).

Однородные уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *однородным,* если его можно представить в виде: $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$. Например, уравнение $y'=\frac{x^3+x^2y}{xy^2}$ является однородным, так как, разделив числитель и знаменатель на x^3, получим $y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Уравнение $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$ так же однородное, так как после деления обеих его частей на x оно принимает вид $y'=3\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$.

Однородные уравнения преобразуются к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены $u(x)=\frac{y}{x}$ или $y=u\cdot x$. Тогда $y'=u'x+u$ и после подстановки уравнение примет вид $u'x+u=F(u)$ или $\frac{du}{F(u)-u}=\frac{dx}{x}$.

Это уравнение решается уже известным способом: $\int\frac{du}{F(u)-u}=\ln|x|+C$.

Выполняя интегрирование, найдем его общий интеграл $\Phi(x,u,C)=0$. Возвращаясь к исходной функции, получим общий интеграл однородного уравнения.

Замечание. Если существуют такие u, для которых $u-F(u)=0$, то к найденным решениям нужно присоединить еще решение вида $y=u_0x$, где u_0 – корень уравнения $u-F(u)=0$.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2y' = x^2 + y^2$.

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2, получим $2y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$. Выполняя замену $y = ux, \quad y' = u'x + u$, получим уравнение с разделяющимися переменными $2(u'x + u) = 1 + u^2; \quad 2x\frac{du}{dx} = u^2 - 2u + 1; \quad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрировав последнее уравнение и подставив вместо $u = \frac{y}{x}$, получим $-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|; \; -\frac{2}{u-1} = \ln|xC|; \; -\frac{2}{\frac{y}{x}-1} = \ln|xC|;$ или $Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}}$.

Замечание. При разделении переменных мы выполнили деление на $x \cdot (u-1)^2$, считая при этом, что $x \neq 0$ и $u \neq 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $u = 1$, т.е. $y = x$ также является решением данного уравнения, но оно не входит в общий интеграл.

Пример 2. Найти частное решение уравнение $y' = \frac{y}{x}(\ln\frac{y}{x} + 1)$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e^3$.

Решение. Введем вспомогательную функцию $u(x)$: $u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$. Отметим, что введенная нами функция $u(x)$ всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставим функцию u в исходное уравнение: $u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u$. Разделим переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим: $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C$, $\ln u = Cx$, $u = e^{Cx}$. Переходя от вспомогательной функции u к функции y, получаем общее решение: $y = x \cdot e^{Cx}$.

Определим постоянную C. Т.к. по условию задачи $y(1) = e^3$, то подставив эти значения в общее решение, получим $e^3 = 1 \cdot e^{C \cdot 1}$, отсюда $C_0 = 3$. Итак, частное решение уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, имеет вид $y = x \cdot e^{3x}$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x; y)$ называется *линейным,* если его можно записать в виде: $y' + p(x) \cdot y = g(x)$, где $p(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, зависящие от x или константы. Если $g(x) = 0$, то уравнение (9.3.1) называется *линейным однородным*. Кроме того, оно является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение $y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Чтобы решить уравнение при $g(x) \neq 0$, будем искать неизвестную функцию в виде произведения двух пока неизвестных функций от x: $y = u(x) \cdot v(x)$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:) $u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot p(x) = g(x)$.

Сгруппируем слагаемые, содержащие u. Уравнение примет вид: $u' \cdot v + u(v' + v \cdot p(x)) = g(x)$. Так как y равно произведению двух функций, то одну из них можно выбирать произвольно, другая же должна определятся полученным уравнением.

Выберем множитель $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в скобках, было равно нулю. Для этого достаточно, чтобы $v(x)$ было бы каким-либо частным решением уравнения $v' + p(x) \cdot v = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Получим $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя обе части, найдем: $\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ какая-либо первообразная для $-p(x)$. Следовательно, $v = e^{\varphi(x)}$.

Подставляя найденную функцию в уравнение, получим существенное упрощение выражения и второе уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} \cdot e^{\varphi(x)} = g(x)$, $du = g(x) \cdot e^{-\varphi(x)} dx$. Проинтегрировав последнее равенство, найдем $u(x)$: $u = \int g(x) \cdot e^{-\varphi(x)} dx + C$.

Возвращаясь к исходной переменой y, получим решение исходного уравнения: $y = u \cdot v = (\int g(x) \cdot e^{-\varphi(x)} dx + C) \cdot e^{\varphi(x)}$.

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$.

Решение. Полагаем $y = u \cdot v$ и $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. После подстановки уравнение примет вид: $u' \cdot v + u \cdot v' + 2xuv = 2x \cdot e^{-x^2}$. В левой части полученного равенства сгруппируем второе и третье слагаемое и вынесем u за скобку, тогда получим: $u'\cdot v+u\cdot(v'+2xv)=2x\cdot e^{-x^2}$. Функцию $v(x)$ найдем из уравнения $v'+2x\cdot v=0$: $\dfrac{dv}{dx}=-2x\cdot v$, откуда $\int\dfrac{dv}{v}=-\int 2x\cdot dx$, $\ln|v|=-x^2$, тогда $v=e^{-x^2}$.

Подставим полученную функцию в уравнение: $u'\cdot e^{-x^2}=2x\cdot e^{-x^2}$, отсюда найдём функцию u: $du=2x\cdot dx$, проинтегрировав обе части, получим $u=x^2+C$.

Тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид $y=u\cdot v=(x^2+C)\cdot e^{-x^2}$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'+2(x-1)y=x-1$, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=4$.

Решение. Полагаем $y=u\cdot v$ и $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Тогда $u'\cdot v+u\cdot v'+2(x-1)uv=x-1$ или $u'v+u\cdot(v'+2(x-1)v)=x-1$. Сначала найдем решение уравнения $v'+2(x-1)v=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому $\dfrac{dv}{v}=-2(x-1)\,dx;$ $\ln|v|=-(x-1)^2;$ $v=e^{-(x-1)^2}$.

Подставив найденную функцию $v(x)$ в уравнение, получим: $\dfrac{du}{dx}e^{-(x-1)^2}=x-1$. Разделим переменные: $du=(x-1)e^{(x-1)^2}dx$. Проинтегрируем это равенство $\int du=\int (x-1)e^{(x-1)^2}dx$ или $u=\dfrac{1}{2}\int e^{(x-1)^2}d(x-1)^2$. Получим $u=\dfrac{e^{(x-1)^2}}{2}+C$. Тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид $y=u\cdot v=(\dfrac{e^{(x-1)^2}}{2}+C)\cdot e^{-(x-1)^2}$.

Определим значение произвольной постоянной, пользуясь начальным условием $y(2)=4$. Подставим $x=2, y=4$ в общее решение. Получим $4=(\dfrac{e^{(2-1)^2}}{2}+C)\cdot e^{-(2-1)^2}$; $4e=\dfrac{e}{2}+C;$ $C_0=3{,}5e$. Итак, частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, имеет вид $y=(\dfrac{e^{(x-1)^2}}{2}+3{,}5e)\cdot e^{-(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}+3{,}5e^{1-(x-1)^2}$.

8.3. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка уравнения.

Уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$ (или в виде, разрешенном относительно y'': $y'' = f(x, y, y')$) называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

Условия, состоящие в том, что при $x = x_0$ функция $y(x)$ должна быть равна заданному числу y_0, а ее производная $y'(x)$ должна быть равна заданному числу $y'(x_0)$ называются начальными условиями. Обычно они записываются в виде

$$\begin{matrix} y(x_0) = y_0, & \text{или} & y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. & & y'\big|_{x=x_0} = y'_0. \end{matrix}$$

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2, называется *общим решением дифференциального уравнения* $y'' = f(x, y, y')$, если она удовлетворяет двум условиям:

1. при любых допустимых значениях постоянных C_1 и C_2 функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением данного уравнения;
2. каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, существуют единственные значения C_1^0 и C_2^0 такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет этим начальным условиям, т.е. $\varphi(x_0, C_1^0, C_2^0) = y_0$; $\varphi'(x_0, C_1^0, C_2^0) = y'_0$.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего двум начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, называется задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ (или $F(x, y, y', y'') = 0$). Геометрический смысл задачи Коши заключается в том, что из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, представляющего собой семейство интегральных кривых, нужно выделить такую, которая проходит через точку $M(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке заданный угловой коэффициент $y'(x_0)$.

Если общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ получено в виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных C_1^0, C_2^0, называется частным решением. Аналогично дается определение частного интеграла. Он имеет вид $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$.

Уравнение вида $y'' = f(x)$.

После первого интегрирования получаем $y' = \int f(x)dx + C_1$.После второго интегрирования уравнения находим общее решение $y = \int \left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1x + C_2$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = 2\sin x - \cos x$.

Решение. Интегрируем последовательно обе части данного уравнения. Тогда $y' = -2\cos x - \sin x + C_1$. Интегрируем еще раз: $y = -2\sin x + \cos x + C_1x + C_2$.

Уравнение, не содержащее явно искомую функцию y: $F(x, y', y'') = 0$.

Порядок уравнения можно понизить путём замены $y' = p(x)$. При этом $y'' = p'(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид: $F(x, p, p') = 0$. Из этого уравнения определяем $p = \varphi(x, C_1)$, а затем находим $y = y(x, C_1, C_2)$ из уравнения $y' = \varphi(x, C_1)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x-1}$.

Решение. Сделаем замену $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Тогда уравнение будет иметь вид: $p' = \dfrac{p}{x-1}$ или $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x-1}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим $\int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{dx}{x-1}$, $\ln|p| = \ln|x-1| + \ln|C_1|$, $\qquad p = C_1(x-1)$.

Возвращаясь к переменной y, получим дифференциальное уравнение первого порядка $y' = C_1(x-1)$. Отсюда интегрированием находим общее решение исходного уравнения $y = C_1\dfrac{(x-1)^2}{2} + C_2$.

Уравнение, не содержащее явно независимую переменную: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'') = 0$.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $y' = p(y)$, зависящую от переменной y. Дифференцируя это равенство по x, и учитывая, что y − функция от x, получим $y'' = p'(y(x)) \cdot y' = p' \cdot p$. Подставляя выражения для y' и y'' в данное дифференциальное уравнение, получим уравнение первого порядка относительно p: $F(y, p, p') = 0$. Пусть $p = \varphi(y, C_1)$ является его общим решением. Интегрируя его, находим общий интеграл исходного уравнения: $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 2y^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Решение. Сделаем замену $y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$. Имеем $p'p = 2y^3$. Разделяя переменные, получим уравнение $pdp = 2y^3 dy$, откуда $p^2 = y^4 + C_1$ или $y' = \pm\sqrt{y^4 + C_1}$.

Используя второе начальное условие, находим C_1: $y'(0) = +\sqrt{y^4(0) + C_1}, \qquad 1 = \sqrt{1 + C_1} \Rightarrow C_1^0 = 0$ (знак минус опущен, так как $y'(0) = 1 > 0$). Таким образом, $\frac{dy}{dx} = y^2$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим: $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{y} = x + C_2, \qquad y = -\frac{1}{x + C_2}$.

Учитывая начальное условие $y(0) = 1$, находим C_2: $y(0) = -\frac{1}{0 + C_2} = 1, \quad \Rightarrow \quad C_2^0 = -1$. Таким образом, частное решение будет иметь вид: $y = -\frac{1}{x - 1}$.

Замечание. При решении ДУ целесообразно использование начальных условий для определения соответствующего значения произвольной постоянной C_1 при нахождении $p(y)$. Это упрощает дальнейшее интегрирование.