1. Линейная алгебра

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$. Числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}$ называются элементами матрицы A. Размер матрицы обозначают $(n \times m)$.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица размера $(n \times n)$.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются равными, если их элементы, стоящие на соответствующих местах, равны, то есть $a_{ij} = b_{ij}$.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda \cdot A$, элементы которой равны $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Суммой двух матриц A и B размера $(n \times m)$ называется матрица C размера $(n \times m)$ такая, что $\tilde{n}_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Если A – матрица размера $(n \times m)$, а B – матрица размера $(m \times k)$, то есть число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то *произведением* этих матриц называется матрица $C = A \cdot B$ размера $(n \times k)$, каждый элемент которой равен $\tilde{n}_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{im}b_{mj}$, где $i = 1, 2, ..., n;$ $j = 1, 2, ..., k$.

Матрица, содержащая один столбец, называется матрицей-столбцом, а матрица, содержащая одну строку – матрицей-строкой.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки равен номеру столбца (т. е. $i = j$), называются диагональными и образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица называется диагональной, если все её недиагональные элементы равны нулю.

Диагональная матрица называется единичной, если все её диагональные элементы равны единице, т.е. матрица имеет вид: $\mathring{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.1. Найти $A + B$; $2A - B$; $A \cdot B$; $B \cdot A$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+7 & 3+3 \\ 7+2 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 & 6-3 \\ 14-2 & 10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$.

3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 7 \cdot 7 + 5 \cdot 2 & 7 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 15 \\ 59 & 26 \end{pmatrix}$.

4. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 4 + 3 \cdot 7 & 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 36 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$.

Каждой квадратной матрице *A* порядка *n* можно поставить в соответствие число, называемое ее определителем и обозначаемое $|A|$. Определитель первого порядка матрицы (a_{11}) – это само число a_{11}. Определитель второго порядка, соответствующий матрице $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число, вычисленное следующим образом: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Элементы a_{11}, a_{12} образуют первую строку определителя, a_{21}, a_{22} – вторую строку, a_{11}, a_{21} – первый столбец, a_{12}, a_{22} – второй столбец, a_{11}, a_{22} – главную диагональ, a_{21}, a_{12} – побочную диагональ.

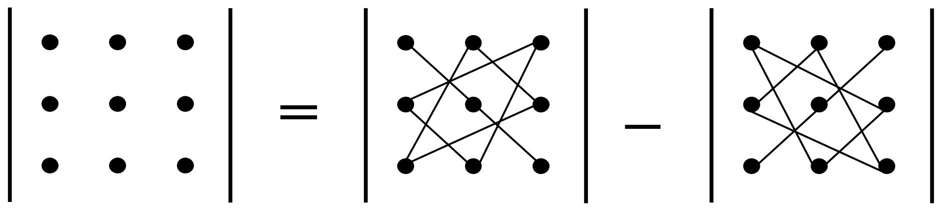
Определитель третьего порядка, соответствующий матрице *A* –это число, вычисленное *по правилу треугольника* следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя третьего порядка, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – его побочную диагональ. Первые три слагаемые – это произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Следующие три слагаемые – произведения элементов матрицы, стоящих на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, взятые со знаком минус.

Схематическая запись этого правила выглядит следующим образом:



произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, а также образующих равнобедренные треугольники, основания которых параллельны главной диагонали

произведения элементов матрицы, стоящих на побочной диагонали, а также образующих равнобедренные треугольники, основания которых параллельны побочной диагонали

Определитель можно вычислить, разложив его по элементам какой-либо строки (столбца). Рассмотрим понятия минора и алгебраического дополнения. Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij}, называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием из него i-той строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число, определяемое равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Разложение определителя третьего порядка по элементам *первой* строки можно представить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно выполнить разложение по элементам любой другой строки или столбца.

Задача 1.2. Найти определители матриц $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - 7\cdot 3 = 20 - 21 = -1,$

2. Вычислим определитель матрицы B двумя способами.

По правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-1) = 7.$$

Разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 1 = 7.$$

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами, x_j – неизвестные системы.

Решением системы называется n значений неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система может иметь единственное решение, бесконечное множество решений или не иметь решений. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Обозначим: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных – основная матрица системы; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных.

Пусть число уравнений равно числу неизвестных т. е., $n = m$, тогда матрица A коэффициентов при неизвестных – квадратная. Ее определитель $\Delta = |A|$ называется главным определителем системы.

Справедливо утверждение: если главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta_i = |A_i|$, а матрица A_i получена из основной матрицы системы A заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Задача 1.3. Показать, что система уравнений имеет единственное решение и найти его по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Решение

Составим главный определитель системы и вычислим его: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Чтобы найти решение по формулам Крамера, составим и вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Применим формулы Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$

Ответ: $(4, 2, 1)$.

Рассмотрим матричный способ решения систем уравнений.

Квадратная матрица A называется невырожденной, если её определитель не равен нулю, т. е. $\Delta = |A| \neq 0$. В этом случае для матрицы A существует *обратная* матрица A^{-1} которая удовлетворяет условию $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где Е – единичная матрица.

Систему, приведенную в начале параграфа, можно представить в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$.

Чтобы из данного уравнения найти матрицу X, умножим обе части уравнения слева на матрицу $\grave{A}^{-1}$. Получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $X = A^{-1} \cdot B$.

Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Причем эти алгебраические дополнения занимают место, симметричное положению элемента a_{ij} в матрице A относительно главной диагонали.

Задача 1.4. Решить предыдущую систему матричным методом.

Решение

Запишем матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $\Delta = |A| = 5 \neq 0$, значит матрица А невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов a_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 1; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2 - 1\cdot 1) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1\cdot 2 - 1\cdot 1) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 1\cdot 1 = -2;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1 - 1\cdot 2) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2 = 3.$$

Составим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислим матрицу неизвестных:

$$X = \grave{A}^{-1} \cdot \hat{A} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot 11 - 2\cdot 8 \\ -3\cdot 3 + 1\cdot 11 + 1\cdot 8 \\ 1\cdot 3 - 2\cdot 11 + 3\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, то есть результат решения совпадает с ответом, полученным по формулам Крамера.

Ответ: $(4, 2, 1)$.