2. Векторная алгебра

Вектором $\vec{a}$ называется направленный отрезок прямой. Если точка A – начало вектора, точка B – его конец, то вектор $\vec{a}$ обозначают $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Длиной, или модулем вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ называется число, равное длине отрезка AB. Если у вектора совпадают начало и конец, то его называют нуль-вектором и обозначают $\vec{0}$. Нуль-вектор не имеет определенного направления, его модуль равен нулю.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они имеют равные модули и сонаправлены, т. е. $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются противоположными, если они имеют равные модули и противоположные направления, то есть $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной плоскости.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$**,** длина которого равна $\left|\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, и его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$. При $\lambda=0$ получается нуль-вектор.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Поставим в соответствие каждой из координатных осей Ox, Oy, Oz единичные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ так, чтобы их направления совпадали с положительным направлением соответствующей оси. Единичные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ называются *базисными векторами* или *базисом*. Любой вектор в пространстве может быть задан своими координатами $\vec{a}=\{x,y,z\}$, где x, y, z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно. Также вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$.

Над векторами можно производить следующие линейные операции:

1. Сумма двух векторов $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ определяет вектор $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$.

2. Разность двух векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ определяет вектор $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$.
3. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяет вектор $\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1\}$.

Длину (модуль) вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ по его координатам можно вычислить по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Если точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$ соответственно, то координаты вектора и его модуль находят по формулам

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: векторы $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны тогда, и только тогда, когда пропорциональны их соответствующие координаты, т. е. $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Задача 2.1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -7\vec{a} + 5\vec{b}$, если $\vec{a} = \{0, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{-3, -2, 6\}$?

Решение

Векторы коллинеарны, если отношения их координат равны между собой.

Найдем вектора $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$\vec{c} = 4 \cdot \{0, -3, 1\} + 2 \cdot \{-3, -2, 6\} = \{0, -12, 4\} + \{-6, -4, 12\}$

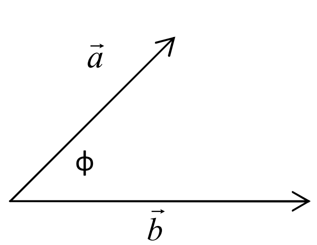
$\vec{c} = \{-6, -16, 16\}$

$\vec{d} = -7 \cdot \{0, -3, 1\} + 5 \cdot \{-3, -2, 6\} = \{0, 21, -7\} + \{-15, -10, 30\}$

$\vec{d} = \{-15, 11, 23\}$

Так как $\frac{-6}{-15} \neq \frac{-16}{11} \neq \frac{16}{23}$, то векторы не коллинеарны.

Рассмотрим действие умножения векторов. Для векторов определены три разных операции, называемых умножением (произведением).



Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме имеет вид:

$\vec a \cdot \vec b = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

С помощью скалярного произведения можно:

1) найти угол φ между векторами $\vec a$ и $\vec b$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

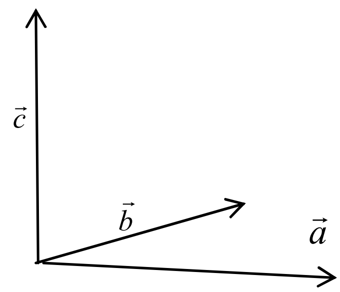
2) найти проекцию вектора $\vec a$ на заданное направление вектора $\vec b$:

$$\text{ï ð}_{\vec b}\,\vec a = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

3) доказать перпендикулярность векторов $\vec a$ и $\vec b$ (необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов):

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Векторным произведением векторов $\vec a$ и $\vec b$ называется вектор $\vec c$, удовлетворяющий условиям:



1) вектор $\vec c$ перпендикулярен векторам $\vec a$ и $\vec b$;

2) вектор $\vec c$ направлен так, что три вектора $\vec a, \vec b, \vec c$ образуют правую тройку;

3) $|\vec c| = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$, то есть модуль вектора $\vec c$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$.

Три некомпланарных вектора $\vec a, \vec b, \vec c$, взятые в указанном порядке, образуют правую (левую) тройку, если с конца третьего вектора $\vec c$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec a$ ко второму вектору $\vec b$ виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Векторное произведение векторов $\vec a$ и $\vec b$ обозначают символом $\vec a \times \vec b$.

Векторное произведение можно выразить через координаты векторов $\vec a$ и $\vec b$ по формуле $\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec i \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec j \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec k \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, где $\vec i, \vec j, \vec k$ – единичные базисные векторы.

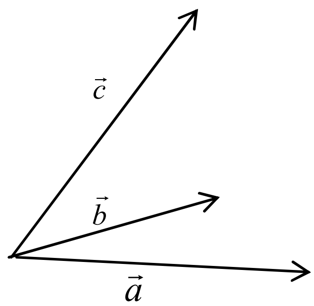
С помощью векторного произведения можно:

1) найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$;

2) найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$.

3) доказать коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов):

векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда, и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.



Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение обозначают $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в координатной форме можно вычислить по формуле
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно:

1) найти объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$V = \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|$

2) найти объем пирамиды, построенной на трех векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|$

3) доказать компланарность трех векторов (необходимое и достаточное условие компланарности): векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда, и только тогда, когда $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Задача 2.2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(0,1,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,0)$.

Решение

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \{0-0, 2-1, 1-0\} = \{0,1,1\}$

$\overrightarrow{AC} = \{1-0, 2-1, 0-0\} = \{1, 1, 0\}$

Косинус угла вычисляется по формуле $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$, где

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB_x \cdot AC_x + AB_y \cdot AC_y + AB_z \cdot AC_z = 1\cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{AB_x}^2 + {AB_y}^2 + {AB_z}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{{AC_x}^2 + {AC_y}^2 + {AC_z}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $\qquad \alpha = 60^\circ$.

Ответ: угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 60°, косинус угла равен $\frac{1}{2}$.

Задача 2.3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\quad \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение

Площадь параллелограмма находится через векторное произведение векторов $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Используем в произведении векторы $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и свойства векторного произведения:

$(\vec{a} \times \vec{b}) = (2\vec{p} + 3\vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{q}) = 2 \cdot (\vec{p} \times \vec{p}) - 4 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) + 3 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) - 6 \cdot (\vec{q} \times \vec{q}) == -4 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) - 3 \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = -7 \cdot (\vec{p} \times \vec{q})$

$S = |-7 \cdot (\vec{p} \times \vec{q})| = 7|(\vec{p} \times \vec{q})| = 7 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\widehat{\vec{p} \times \vec{q}}) = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

Ответ: Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, равна $7\sqrt{3}$.

Задача 2.4. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{-3, 3, 3\}$, $\vec{b} = \{-4, 7, 6\}$ и $\vec{c} = \{3, 0, -1\}$?

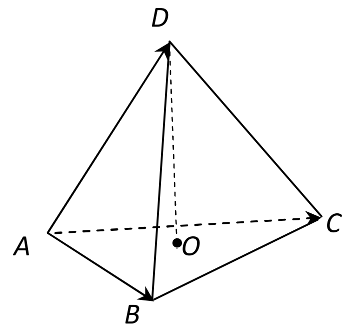
Три вектора компланарны, если их смешанное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \cdot 0 - 3 \cdot 7 \cdot 3 -$$

$$-(-3) \cdot 6 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) \cdot (-1) = 21 + 54 - 0 - 63 + 0 - 12 = 0.$$

Ответ: Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, так как их смешанное произведение равно нулю.

Задача 2.5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC, если $A(-3,-5,6)$, $B(2,1,-4)$, $C(0,-3,-1)$, $D(-5,2,-8)$.



Решение

Найдем координаты векторов, имеющих своим началом точку А.

$$\overrightarrow{AB}=\{5,6,-10\},\qquad \overrightarrow{AC}=\{3,2,-7\},\overrightarrow{AD}=\{-2,7,-14\}.$$

Объем пирамиды численно равен 1/6 смешанного произведения этих векторов:

$V_{\text{тет}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|.$

Найдем смешанное произведение векторов:

$$\begin{vmatrix}5 & 6 & -10\\ 3 & 2 & -7\\ 2 & 7 & -14\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}2 & -7\\ 7 & -14\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}3 & -7\\ 2 & -14\end{vmatrix}-10\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=103.$$

$$V_{\text{тет}}=\frac{1}{6}\cdot 103=17{,}16$$

Известно, что объем пирамиды в свою очередь равен $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h$,

где S – площадь основания, h – опущенная из вершины пирамиды на это основание. Площадь основания найдем через векторное произведение двух векторов, образующих стороны основания.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 5 & 6 & -10\\ 3 & 2 & -7\end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix}6 & -10\\ 2 & -7\end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix}5 & -10\\ 3 & -7\end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 3 & 2\end{vmatrix}=$$

$22i+5j-8k.$

Площадь основания пирамиды найдем как половину площади параллелограмма, которая численно равна модулю найденного векторного произведения $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{22^2+5^2+(-8)^2}=\sqrt{484+25+64}=\sqrt{573}\approx 12$$

$$h=\frac{3\cdot V}{S}=\frac{3\cdot 17{,}16}{12}=4{,}29.$$

Ответ: Объем тетраэдра равен 17,16.

Высота h из точки D на плоскость ABC равна 4,29.