3. Аналитическая геометрия

3.1. Аналитическая геометрия в пространстве

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат Oxyz. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ является уравнением поверхности, если координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, удовлетворяют данному уравнению, а координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности, – ему не удовлетворяют. Простейшим видом поверхности является плоскость. Рассмотрим различные формы уравнений плоскости.

Пусть в пространстве плоскость (α) задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярным плоскости. Такой вектор называется *нормальным вектором плоскости*. Тогда уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, имеет вид

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости*. Коэффициенты A, B, C являются координатами нормального вектора плоскости: $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ называется *уравнением плоскости в отрезках.* Число a – величина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox, число b – на оси Oy, число c – на оси Oz, т. е плоскость пересекает ось Ox в точке $(a, 0, 0)$, ось Oy в точке $(0, b, 0)$, ось Oz в точке $(0, 0, c)$.

Если известны три точки плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то из условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, где $M(x, y, z)$– текущая точка плоскости (α), можно составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости (α), заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляют по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнения вида $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ задают в пространстве прямую и называются *каноническими уравнениями прямой*. В этой записи числа x_0, y_0, z_0 – координаты точки M_0, лежащей на этой прямой, а числа m, n, p – координаты вектора $\vec{l}$, лежащего на прямой или параллельного ей и называемого *направляющим вектором прямой*.

Также прямую в пространстве определяют как линию пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

В этом случае направляющий вектор прямой – это вектор, равный векторному произведению нормальных векторов плоскостей $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Уравнения вида $\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0, \end{cases}$ где $-\infty<t<+\infty$ называются *параметрическими уравнениями прямой*. Их можно вывести из канонических уравнений прямой, если каждое отношение приравнять к параметру *t*.

Задача 3.1. Даны четыре точки $\mathrm{A}_1(6,6,5)$, $\mathrm{A}_2(4,9,5)$, $\mathrm{A}_3(4,6,11)$, $\mathrm{A}_4(6,9,3)$. Составить уравнения: плоскости, проходящей через точки $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ и A_3; прямой, проходящей через точки A_1 и A_2; прямой $\mathrm{A}_4\mathrm{M}$, перпендикулярной к плоскости $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$; прямой A_3N, параллельной прямой $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$; плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$. Вычислить: синус угла между прямой $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ и плоскостью $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$; косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$.

Решение

1. Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим уравнение плоскости по трем точкам $\mathrm{A}_1(6,6,5)$, $\mathrm{A}_2(4,9,5)$ и $\mathrm{A}_3(4,6,11)$.

$$\begin{vmatrix} x-6 & 4-6 & 4-6 \\ y-6 & 9-6 & 6-6 \\ z-5 & 5-5 & 11-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-6 & -2 & -2 \\ y-6 & 3 & 0 \\ z-5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$6\big((x-6)\cdot(-3)-(-2)\cdot(y-6)\big)+(-2)\cdot\big((y-6)\cdot 0-(-3)\cdot(z-5)\big)=$$

$$= 6\cdot(-3x+18+2y-12)+2\cdot(3z-15)=$$

$$= 6\cdot(-3x+2y-6)+2\cdot(3z-15) = -18x+12y+36+6z-30$$

$$= 0$$

$$-18x+12y+6z+6=0.$$

2. Если на прямой в пространстве выделить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты любой точки на прямой должны удовлетворять уравнению

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Для точек $\mathrm{A}_1(6,6,5), \mathrm{A}_2(4,9,5)$ получим уравнение прямой:

$$\frac{x-6}{4-6} = \frac{y-6}{9-6} = \frac{z-5}{5-5}.$$

Заметим, что один из знаменателей обращается в ноль. Эта запись не подразумевает проведения некорректного алгебраического «деления на ноль», а трактуется как постоянное равенство нулю соответствующего числителя. Оставшееся равенство принимает вид:

$$y-6 = \frac{x-6}{-2}(-3)$$

$$y-6 = (x-6)\frac{3}{2};$$

$$2y-12 = 3x-18;$$

$$2y-3x+6=0.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$, имеет вид

$$2y-3x+6=0, z=5.$$

3. Если прямая перпендикулярна к плоскости, значит, она параллельна нормальному вектору этой плоскости $\vec{n}$. Известно, что уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3 , имеет вид $-18x + 12y + 6z + 6 = 0$. Нормальный вектор этой плоскости $\vec{n} = \{-18; 12; 6\}$. Составим уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{n}$, проходящей через точку $A_4(6, 9, 3)$:

$$\frac{x-6}{-18} = \frac{y-9}{12} = \frac{z-3}{6}.$$

4. Уравнение прямой проходящей через точки A_1, A_2, имеет вид $\frac{x-6}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-5}{0}$, где $\overrightarrow{\{-2; -3; 0\}}$ – направляющий вектор прямой. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку A_3, параллельно вектору $\overrightarrow{\{-2; -3; 0\}}$, имеет вид: $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-11}{0}$. Аналогично п. 2, числитель в третьем составляющем приравниваем нулю и преобразуем оставшееся равенство $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-6}{-3}$

$3(x-4) = 2(y-6)$

$3x - 12 - 2y + 12 = 0$

$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 11 \end{cases}$ – уравнение прямой A_3N, параллельной прямой A_1, A_2.

5. Прямая, проходящая через точки A_1 и A_2 имеет вид:

$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-11}{0}$, где $\overrightarrow{\{-2; -3; 0\}}$ – направляющий вектор этой прямой. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку $A_4(6, 9, 3)$, перпендикулярно к данной прямой, имеет вид:

$$-2(x-6) + (-3) \cdot (y-9) + 0 \cdot (z-3) = 0$$
$$-2x + 12 - 3y + 27 = 0$$
$$-2x - 3y + 39 = 0.$$

6. Найдем синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид $-18x + 12y + 6z + 6 = 0$. Прямая, проходящая через точки A_1 и A_4 имеет уравнение $\frac{x-6}{6-6} = \frac{y-6}{9-6} = \frac{z-5}{3-5}$. Отсюда ясно, что Направляющий вектор прямой A_1A_4 $\{0, 3, -2\} = \vec{p}$, а нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ $\{-18, 12, 6\} = \vec{n}$, синус угла между прямой и плоскостью: $\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$.

Вычислим скалярное произведение $\vec{n} \cdot \vec{p} = -18 \cdot 0 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) = 36 - 12 = 24$. Модули векторов

$|\vec{n}| = \sqrt{(-18)^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{324 + 144 + 36} = \sqrt{504}$,
$|\vec{p}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$$\sin\varphi = \frac{24}{\sqrt{6552}} = \frac{24}{81} \approx 0{,}3, \varphi \approx 17^{\circ}.$$

7. Найдем косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $-18x + 12y + 6z + 6 = 0$. Плоскость *Oxy* имеет уравнение вида: $z = 0$.

Формула косинуса угла между плоскостями

$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, где $A_1 = -18, B_1 = 12, C_1 = 6$, $A_2 = 0, B_2 = 0, C_2 = 1$

$$\cos\varphi = \frac{-18 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 1}{\sqrt{(-18)^2 + 12^2 + 6^2} + \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{504} + 1} = \frac{1}{23{,}45} \approx 0{,}04\,,$$

$$\varphi \approx 87{,}5^{\circ}.$$

Задача 3.2. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2, 3, -4), M_2(-1, 2, -3)$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z+4}{-3+4}$, т. е. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{1}$, где вектор $\{-3, -1, 1\}$ является, направляющим вектором прямой M_1M_2.

Принимаем координаты направляющего вектора прямой M_1M_2 как соответствующие координаты нормального вектора $\vec{n}$ плоскости α.

Записываем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}(\{A, B, C\})$, в виде:

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где (x_1, y_1, z_1) – координаты точки M, $A = -3, B = -1, C = 1$

$$-3(x - 1) + (-1) \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 2) = 0$$
$$-3x + 4 - y - 1 + z - 2 = 0$$
$$-3x - y + z + 1 = 0$$

– это искомое уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярной к заданной прямой.

Задача 3.3. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7, y = t - 2, z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

1. Направляющий вектор прямой $\vec{p} = \{6, -8, -9\}$, а вектор нормали плоскости $\vec{n} = \{1, 3, -2\}$. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\vec{n} \cdot \vec{p} = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-18 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 1}{\sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{6 - 24 +}{\sqrt{181} \cdot \sqrt{14}} = 0.$

Косинус угла между векторами равен нулю. Соответственно прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

2. Подставим выражения, характеризующие прямую $x = t + 7,\ y = t - 2,$ $z = 2t + 1$ в уравнение плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, получим

$(t + 7) + 3 \cdot (t - 2) - 2 \cdot (2t + 1) + 1 = 0,$

$t + 7 + 3t - 6 - 4t - 2 + 1 = 0\ , \qquad 0 = 0.$

Получено тождественное равенство, независящее от значения t. Это свидетельствует о том, что все точки прямой (т. е. вся прямая) лежат в данной плоскости.

3.2. Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты точки $C(x, y)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}, \end{cases} \quad \lambda \neq -1.$$

Координаты середины отрезка AB, соединяющего точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

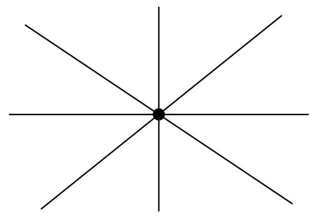
Условие принадлежности трёх точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3)$ одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Площадь треугольника с вершинами $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3)$ (знак выбирается так, чтобы площадь была неотрицательной):

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Пучком пересекающихся прямых называется множество всех прямых плоскости, проходящих через одну точку, называемую центром пучка.



Если $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ – уравнения двух прямых, пересекающихся в точке M_0, то уравнение

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$$

где α,β – произвольные числа, не равные нулю одновременно, определяет любую прямую, проходящую через центр пучка.

Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left\{A;B\right\}$: $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ параллельно вектору $\vec{s}=\left\{l;m\right\}$: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ параллельно вектору $\vec{s}=\left\{l;m\right\}$:

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\end{cases}\quad t\in\left(-\infty,\infty\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\left(x_1,y_1\right)$ и $M_2\left(x_2,y_2\right)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, где $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ – угол наклона прямой к оси Ох

$$y=kx+b,\quad k=\operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение прямой "в отрезках", где $A\left(a;0\right)$ и $B\left(b;0\right)$ – координаты точек пересечения прямой с осями Ox и Oy: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\quad a\neq 0,\ b\neq 0$.

Нормальное уравнение прямой, где p – расстояние от начала координат до прямой, α – угол между осью Ox и перпендикуляром к прямой, проходящим через начало координат: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Нормальный вид общего уравнения прямой (знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного слагаемого C): $\dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Координаты точек пересечения прямых, заданных общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

$$x_0=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2},\quad y_0=\frac{b_2k_1-b_1k_2}{k_1-k_2}.$$

Условия параллельности прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},\quad A_1B_2-A_2B_1=0 \quad \text{или} \quad k_1=k_2.$$

Условия перпендикулярности прямых, заданных заданных своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и и уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

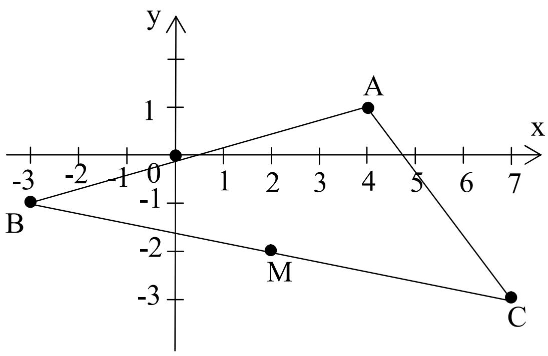
$$A_1A_2+B_1B_2=0 \quad \text{или} \quad k_1k_2=-1.$$

Острый угол α между прямыми, заданными своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \quad \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|, \text{где } k_1k_2 \neq -1.$$

Если $k_1k_2 = -1$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 3.4. Даны вершины треугольника ABC: $\mathrm{A}(4,1)$, $\mathrm{B}(-3,-1)$, $\mathrm{C}(7,-3)$. Найти: уравнение стороны *AB*; уравнение высоты *CH*; уравнение медианы *AM*; точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*; уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*; расстояние от точки *C* до прямой *AB*.



Решение

1. Даны вершины треугольника *ABC* $\mathrm{A}(4,1)$, $\mathrm{B}(-3,-1)$, $\mathrm{C}(7,-3)$ уравнение стороны AB. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Наша прямая проходит через точки *A* и *B*, а значит, для двух произвольных точек на этой прямой выполняются равенства $y_1 = kx_1 + b$ и $y_2 = kx_2 + b$, их можно записать в виде системы (решив эту систему относительно k и b, мы найдем уравнение прямой):

$$\begin{cases} kx_1 + b = y_1 \\ kx_2 + b = y_2 \end{cases}$$

В нашем случае найдем уравнение прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(4;\ 1)$, $\mathrm{B}(-3;-1)$

$$\begin{cases} k \cdot 4 + b = 1 \\ k \cdot (-3) + b = -1 \end{cases} \text{отсюда } k = \frac{2}{7}, b = -\frac{1}{7}$$

Таким образом, уравнение прямой проходящей через точки *A* и *B* имеет вид $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$.

2. Найдем уравнение высоты *CH*. Так как прямая *CH* перпендикулярна прямой *AB*, воспользуемся следующим приемом. Если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то перпендикулярная ей прямая будет иметь вид $y = \left(-{}^{1}/_{k}\right)x + d$.

Таким образом, перпендикулярная к *AB* прямая будет иметь уравнение $y = -\frac{7}{2}x + d$. Постоянную найдем d из условия, что высота *CH* проходит через точку $\mathrm{C}(7;-3)$:

$-3 = -\frac{7}{2} \cdot 7 + d$, откуда $d = 22\frac{1}{2}$

Таким образом, уравнение CH: $y = -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2}$.

3. Медиана AM проходит через две точки – точку A и середину отрезка BC.

Найдем координаты середины BC по формуле: $x = (x_1 + x_2)/2$,
$y = (y_1 + y_2)/2$, координаты точки $M(2; -2)$.

Теперь ищем уравнение прямой, идущей через две точки $\text{A}(4;\ 1)$ и $M(2; -2)$ указанным в п. 1 способом.

$$\begin{cases} 4k + b = 1 \\ 2k + b = -2 \end{cases}, \text{откуда } k = \frac{3}{2} \text{ и } b = -5$$

Уравнение прямой AM $y = \frac{3}{2}x - 5$.

4. Найдем точку N пересечения медианы AM и высоты CH. Прямая AM имеет уравнение $y = \frac{3}{2}x - 5$, а прямая CH – $y = -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2}$.

Точку пересечения найдем, решив систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - 5 - y = 0 \\ -\frac{7}{2}x + 22\frac{1}{2} - y = 0 \end{cases}$$

Точка пересечения $N\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

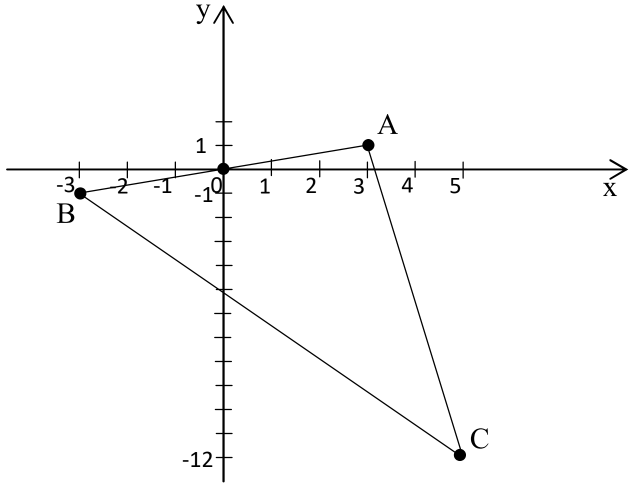
5. Найдем уравнение прямой, проходящей через вершину $\text{C}(7, -3)$ параллельно стороне AB. Уравнение прямой проходящей через точки A и B имеет вид $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$, прямая проходящая через точку $\text{C}(7, -3)$ и параллельная этой прямой сохраняет угловой коэффициент:

$y - 7 = \frac{2}{7} \cdot (x + 3)$, т. е. $y = \frac{2}{7}x + 7\frac{6}{7}$.

6. Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, определяется так: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Найдем расстояние от точки $C(7, -3)$ до прямой AB $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$, преодолевая неоднозначность обозначений: коэффициенты уравнения прямой и вершины треугольника обозначены одинаково. В нашем случае коэффициенты уравнения прямой $\text{A} = \frac{2}{7}$, $\text{B} = -1, \text{C} = -\frac{1}{7}$; координаты внешней точки $x_0 = 7, y_0 = -3$ и искомое расстояние от точки C до прямой AB

$$d=\frac{\left|\frac{2}{7}\cdot 7+(-1)\cdot(-3)-\frac{1}{7}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2+(-1)^2}}==\frac{\left|2+3-\frac{1}{7}\right|}{\sqrt{\frac{4}{49}+1}}=\frac{35}{\sqrt{53}}\approx 4{,}8.$$

Задача 3.6. Дан треугольник с вершинами ABC: $\text{A}(3,1)$, $\text{B}(-3,-1)$ и $\text{C}(5,-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.



Решение

Медиана CM проходит через две точки – точку C и середину отрезка AB.

Найдем координаты середины AB по формуле: $x=(x_1+x_2)/2$, $y=(y_1+y_2)/2$, координаты точки $M(0;0)$ совпали с началом координат.

Параметры уравнения $y=kx+b$ прямой, идущей через две точки $\text{C}(5,-12)$ и $M(0;0)$ определяем с помощью приема, описанного в предыдущей задаче

$\begin{cases}5k+b=-12\\ 0k+b=0\end{cases}$, откуда находим $y=-\frac{12}{5}x$ – уравнение медианы, опущенной из точки C.

Найдем длину медианы, т. е. найдем расстояние между двумя точками $\text{C}(5,-12)$ и $M(0;0)$.

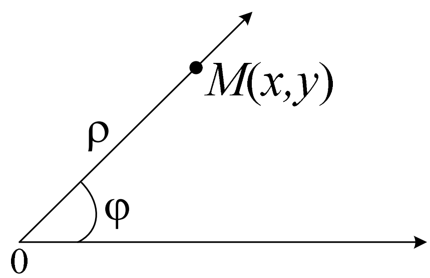
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

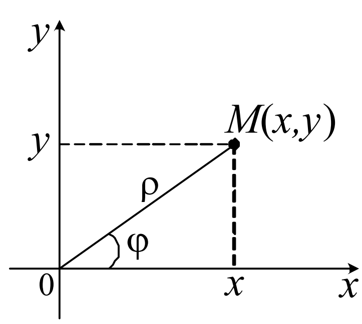
$$d=\sqrt{(5-0)^2+(-12-0)^2}\,, d=\sqrt{5^2+12^2}$$

$$d=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13.$$

Длина медианы равна 13.

Полярные координаты определяются заданием на плоскости полюса O и полярной оси. Координаты точки M в полярных координатах задаются длиной радиус-вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\rho$ этой точки и углом его поворота относительно полярной оси. При этом $0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi$.



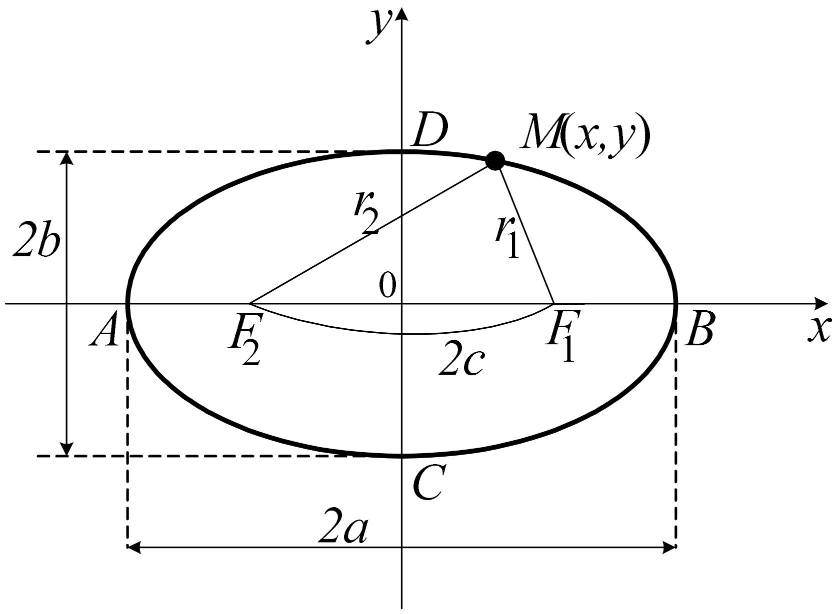


Связь полярных координат с декартовыми

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

В полярных координатах кривые второго порядка имеют уравнения $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине (для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь); p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет кривой.

Эллипс – геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ (называемых фокусами эллипса) постоянна и равна $2a$, ($a > c$).



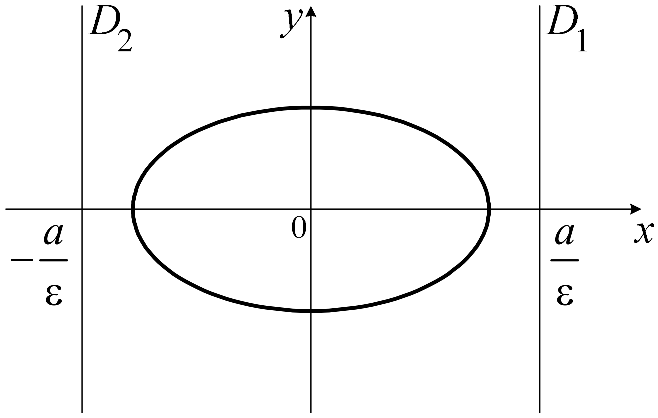
$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a \text{ и } \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = 2c,\ c^2 = a^2 - b^2.$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Элементы эллипса: точка O – центр эллипса; точки A, B, C, D – вершины эллипса; точки $F_1(+c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ – фокусы; $2c$ – фокусное расстояние; $AB = 2a$ и $CD = 2b$ – большая и малая оси; a и b – большая и малая полуоси;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, $(\varepsilon < 1)$ – эксцентриситет эллипса (чем больше ε, тем больше эллипс вытянут вдоль большой оси).



$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения правой и левой директрис

Параметрические уравнения эллипса:

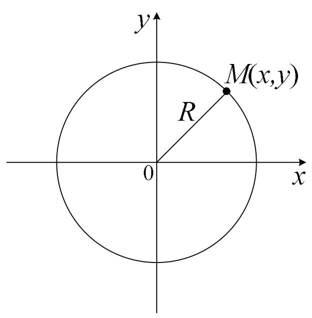
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Здесь t – параметр, $t \in [0, 2\pi)$; (t - угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox);

Каноническое уравнение эллипса со смещенным центром:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки O – центра окружности.



Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$:

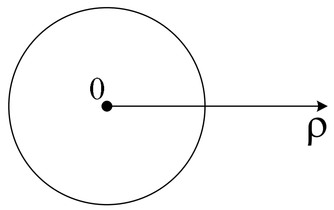
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Параметрические уравнения окружности с радиусом R и центром в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$:

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t. \end{cases}$$

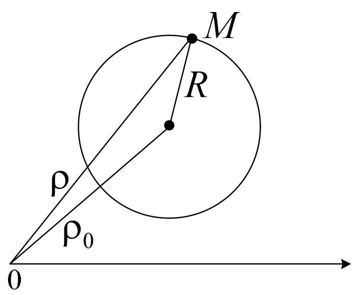
Уравнение окружности в полярных координатах с центром в начале координат (полюсе):

$$\rho=R$$



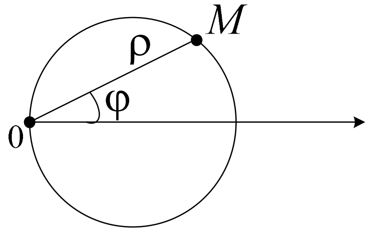
Уравнение окружности с центром в точке $M\left(\alpha_0,\varphi_0\right)$:

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2.$$

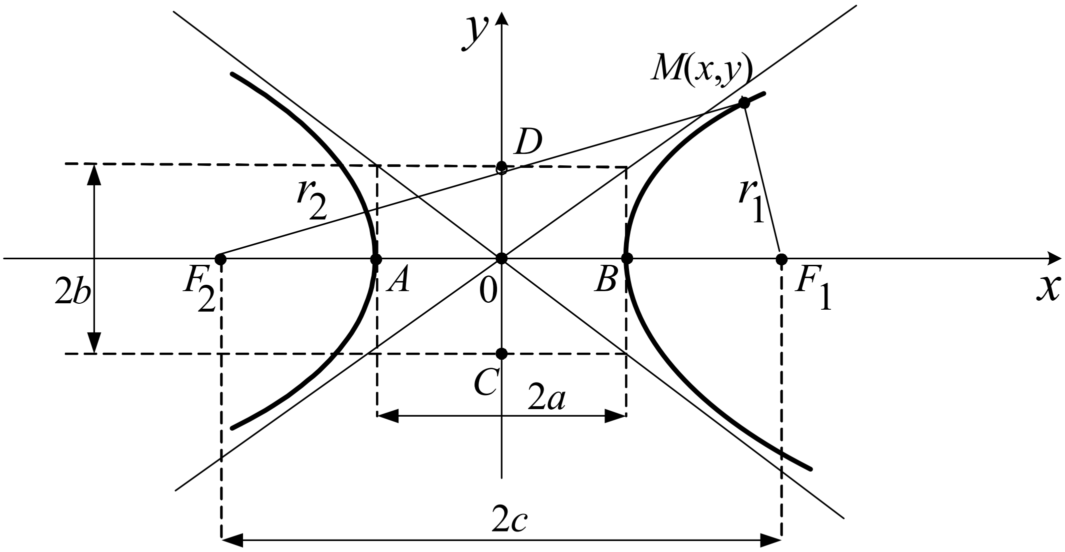


Уравнение окружности с центром в точке $B\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ и радиусом $R=\dfrac{a}{2}$

$$\rho=a\cos\varphi.$$



Гипербола – геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, называемых фокусами гиперболы, постоянна и равна $2a$ $(a < c)$.



$$\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right| = 2a \text{ и } \overrightarrow{F_1F_2} = 2c, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Каноническое уравнение гиперболы:

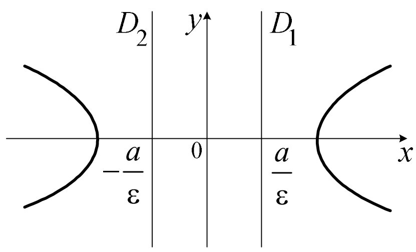
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Элементы гиперболы: точка O – центр гиперболы; точки A и B – вершины; точки $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ – фокусы; $2c$ – фокусное расстояние; $AB = 2a$ – действительная ось гиперболы; $CD = 2b$ – мнимая ось гиперболы; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon > 1)$ – эксцентриситет гиперболы $\left(\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}\right)$;

$y = \pm\dfrac{b}{a} \cdot x$ – асимптоты гиперболы.

Каноническое уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

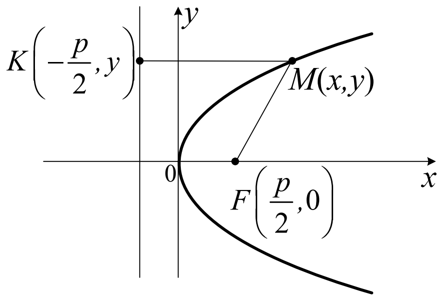


$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$ – уравнения директрис гиперболы

Параметрические уравнения одной ветви гиперболы:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = b\operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Парабола – геометрическое место точек $M(x, y)$, равноудалённых от заданной точки $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, называемой фокусом параболы, и от данной прямой, называемой директрисой параболы.



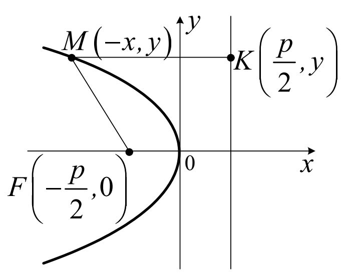
$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\overrightarrow{MK}\right|, \ \left|\overrightarrow{MK}\right| = \frac{p}{2} + x.$$

Каноническое уравнение параболы:

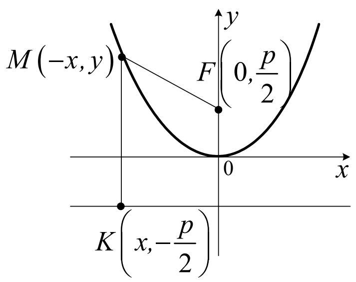
$$y^2 = 2px, \ p > 0.$$

Элементы параболы: точка O – вершина параболы; OX – ось параболы; точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус; $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; $e = 1$– эксцентриситет параболы; p – фокальный параметр (расстояние от фокуса до директрисы).

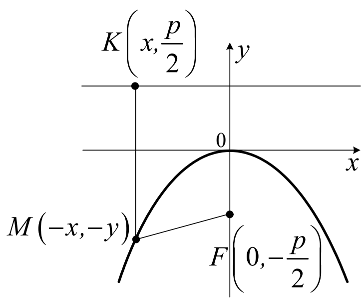
В зависимости от направления ветвей меняется уравнение параболы и ее расположение в декартовой системе координат:



$$y^2 = -2px$$



$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$

Канонические уравнения парабол с вершиной в точке $A(x_0, y_0)$:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0),$$
$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0),$$
$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0),$$
$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0).$$

Параметрические уравнения параболы $x^2 = 2py$:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2pt}, \end{cases} \quad t \geq 0 \cdot$$

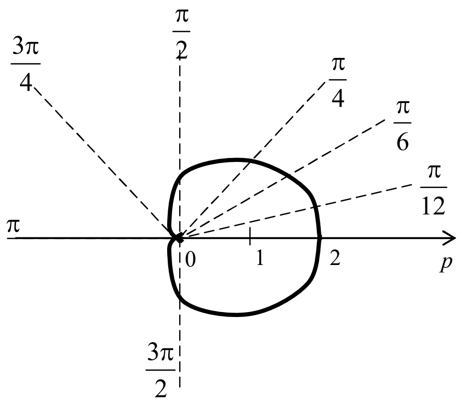
Задача 3.7. Построить кривую $\rho = 1 + \cos\varphi$ в полярной системе координат.

Решение

Составим таблицу значений.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	2	1,97	1,87	1,7	1,5	1,26	1	0,3	0	1

По полученным координатам строим точки и соединяем их плавной кривой (см. рис. 6). Полученная кривая называется *кардиоидой*.



Задача 3.8. Перейти из декартовых координат к полярным и построить кривую $(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ в полярной системе координат.

Решение

Воспользуемся формулами перехода к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

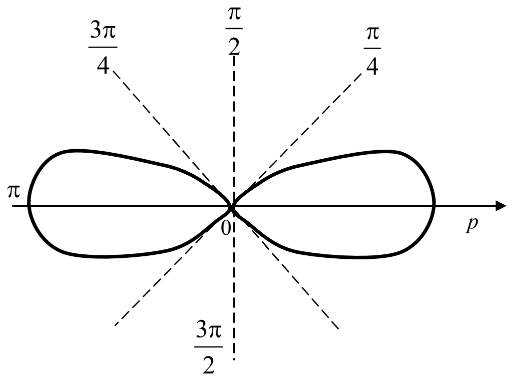
Получим равенство: $(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 25(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$.

После его преобразования с использованием формул тригонометрии, получим:

$$\rho^4 = 25\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),\ \rho^4 = 25\rho^2\cos 2\varphi,\ \rho = 5\sqrt{\cos 2\varphi}, \cos 2\varphi \geq 0.$$

Построим эту линию по точкам. Для этого составим таблицу, учитывая, что $\cos 2\varphi \geq 0$ при $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Полученная кривая (см. рис. 7) называется *лемнискатой Бернулли*.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	5	3,5	0	0	5	3,5	0	0	3,5	5



Задача 3.9. Выделяя полные квадраты, привести к каноническому виду уравнение линии, заданной уравнением $4x^2 + 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$, и построить ее.

Решение

Сгруппируем по отдельности слагаемые, содержащие x и y, и в каждой группе вынесем общий множитель $4(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$.

В каждой скобке дополним первые два слагаемых до полного квадрата:

$$4((x^2 + 2x + 1) - 1) + 9((y^2 - 4y + 4) - 4) + 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 \cdot 1 + 9(y-2)^2 + 9 \cdot (-4) + 4 = 0.$$

$$4(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Разделим обе части уравнения на 36, получим $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$

Это уравнение определяет эллипс с центром в точке $O_1(-1; 2)$ и полуосями $a = 3$ и $b = 2$. Построим эту линию: