4. Введение в математический анализ

Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению x, взятому из некоторого множества, по определенному правилу (закону) f ставится в соответствие единственное значение y. При этом x называют независимой переменной, или аргументом, y – зависимой переменной, или функцией. Функциональную зависимость переменных x и y в общем виде записывают $y = f(x)$. Множество допустимых для x значений называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Множество значений, принимаемых переменной y, называется областью значений функции $y = f(x)$ и обозначается $E(f)$.

Чтобы задать функцию, можно использовать способы: аналитический, табличный и графический. Если функция задана аналитически, т. е. с помощью формулы вида $y = f(x)$, то область определения функции – это множество значений независимой переменной x, при которых функция имеет смысл $f(x)$.

Задача 4.1. Найти область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-16}$.

Решение

Функция имеет смысл, если одновременно выполнены условия: подкоренное выражение квадратного корня, стоящего в числителе, неотрицательно; знаменатель дроби не должен быть равен нулю. Поэтому чтобы найти область определения функции, составим систему $\begin{cases} x-3\ge 0, \\ x^2-16\ne 0. \end{cases}$

Решение системы $\begin{cases} x\ge 3, \\ x\ne \pm 4. \end{cases}$

Ответ: $x\in\left[3\,;4\right)\cup\left(4\,;+\infty\right)$.

Задача 4.2. Дана функция $f(x)=2^x$. Найти $f\left(0\right), f\left(2x+1\right), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f\left(\log_2 5\right)$. Решить уравнение $2\left(f(x)\right)^4-17\left(f(x)\right)^2+8=0$.

Решение

$f\left(0\right)=2^0=1$, $f\left(2x+1\right)=2^{2x+1}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2^{\frac{1}{x}}$, $f\left(\log_2 5\right)=2^{\log_2 5}=5$.

Составим заданное уравнение $2 \cdot 2^{4x} - 17 \cdot 2^{2x} + 8 = 0$ – показательное уравнение, которое можно решить с помощью замены.

Пусть $t = 2^{2x}, t > 0$, тогда уравнение примет вид: $2t^2 - 17t + 8 = 0$. Найдем корни квадратного уравнения $t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} = \left[\begin{array}{l} t_1 = 8, \\ t_2 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$.

Выполним обратную замену и найдем значения x

$2^{2x} = 2^3, 2x = 3, x = 1{,}5$; $2^{2x} = 2^{-1}, 2x = -1, x = -0{,}5.$

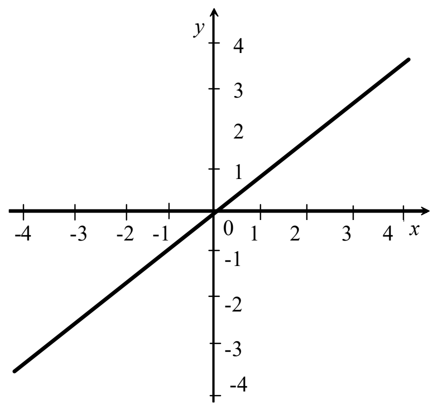
Графиком функции называется множество точек плоскости *Oxy*, координаты которых имеют вид $M\left(x; f\left(x\right)\right)$, где абсцисса x принадлежит области определения функции $D(f)$, а ордината y – равна соответствующему значению функции *f(x)*.

Элементарной называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

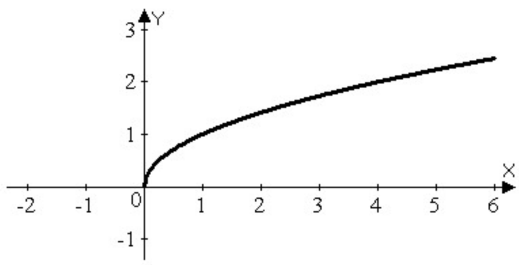
Основные элементарные функции:

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α – действительное число.

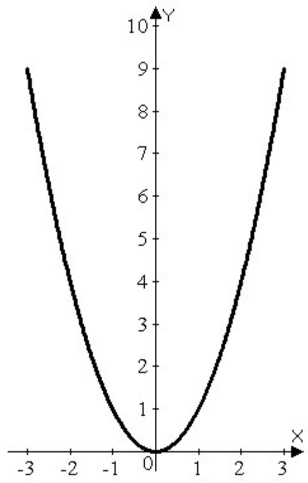
Приведем графики некоторых степенных функций:



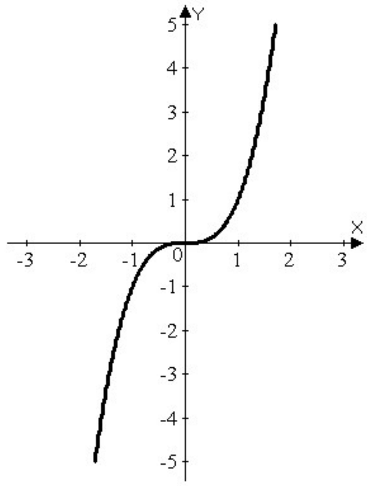
$y = x$ $\left(\alpha = 1\right)$ прямая, являющаяся биссектрисой I и II координатного углов



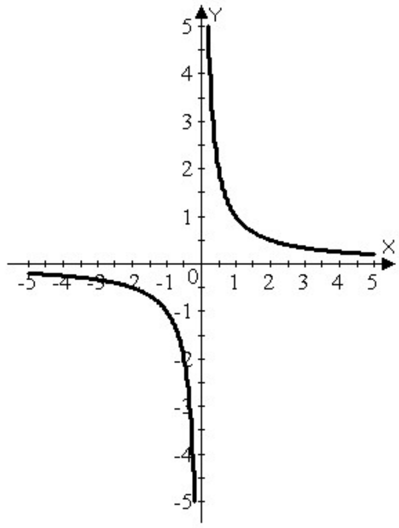
$y = \sqrt{x}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ верхняя ветка параболы, направленная вдоль оси *Ox*.



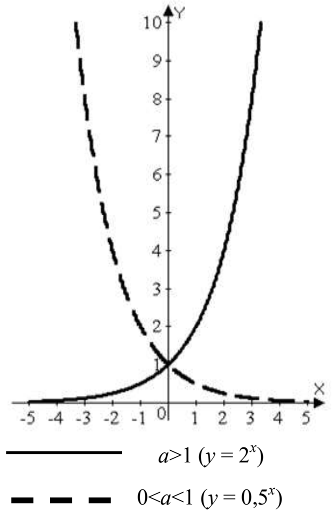
$y = x^2$ $\left(\alpha = 2\right)$ парабола
с вершиной в точке O,
ветви которой
направлены вверх



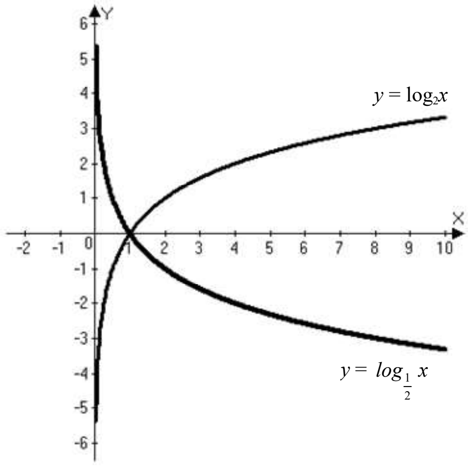
$y = x^3$ $\left(\alpha = 3\right)$
кубическая парабола



$y = \dfrac{1}{x}$ $\left(\alpha = -1\right)$ гипербола

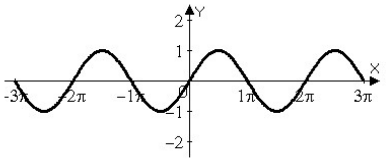


2. Показательная функция $y = a^x$ где
$\grave{a} > 0, \grave{a} \neq 1$

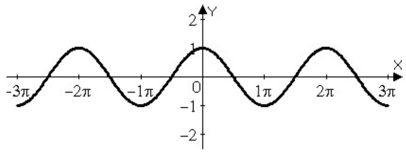


3. Логарифмическая функция y=
$y = \log_a x$, где $\grave{a} > 0, \grave{a} \neq 1$

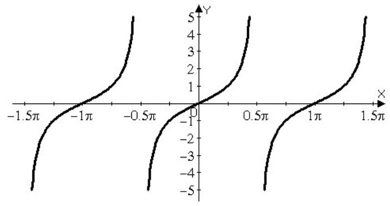
4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

При построении графиков функций часто используются следующие правила преобразования графиков:

1. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём сдвига вдоль оси *Oy* на *b* единиц вверх при $b > 0$ или $|b|$ единиц вниз при $b < 0$.

2. График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём сдвига вдоль оси *Ox* на *a* единиц влево при $a > 0$ или $|a|$ единиц вправо при $a < 0$.

3. График функции $y = A \cdot f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем растяжения вдоль оси *Oy* в *A* раз ($A > 1$) или сжатия в $\frac{1}{A}$ раз $(0 < A < 1)$. Если $A < 0$, то к растяжению (сжатию) добавляется еще симметричное отображение относительно оси *Ox*.

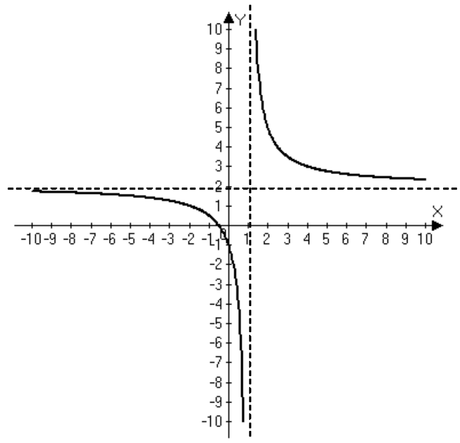
4. График функции $y = f(k \cdot x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путём сжатия вдоль оси *Ox* в *k* раз ($k > 1$) или растяжения в $\frac{1}{k}$ раз $(0 < k < 1)$.

5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем симметричного отображения относительно оси *Ox*, а график функции $y = f(-x)$ – симметричным отображением относительно оси *Oy*.

С помощью преобразований можно построить графики более сложных функций. Рассмотрим несколько примеров таких преобразований.

Задача 4.3. Построить графики функций: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; $y = \sin 2x$; $y = \sin^2 x$.

Решение

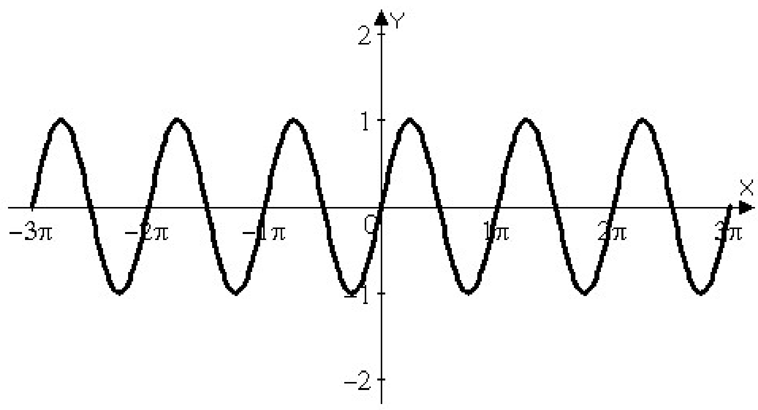


1. Построим график функции $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Для этого преобразуем функцию следующим образом: $y = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2x-2+3}{x-1} = \dfrac{3}{x-1} + 2$.

График этой функции получается из графика функции $y = \dfrac{3}{x}$ путем его сдвига на 1 единицу вправо вдоль оси Ox (см. п. 2, $|\, a \,| = 1$) и сдвигом полученного графика вверх вдоль оси Oy на 2 единицы вверх.

2. Построим график функции $y = \sin 2x$.

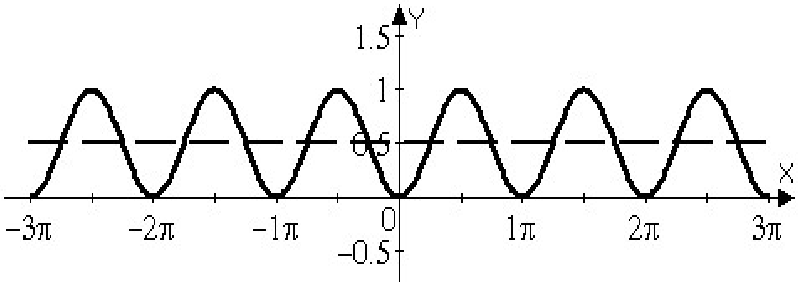
Для этого строим график функции $y = \sin x$, далее сжимаем график по оси абсцисс в два раза, т. е. уменьшаем абсциссы точек графика в два раза, оставляя ординаты без изменения. При этом заметим, что период функции $y = \sin 2x$ равен $T = \pi$. Сжатие удобно проводить в характерных точках графика функции $y = \sin x$ $\left(x = 0; \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$.



y=sin 2x

3. Построим график функции $y = \sin^2 x$. Для этого преобразуем функцию следующим образом: $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$.

График этой функции можно получить из графика функции $y = \cos x$, выполнив последовательно такие преобразования: сжатие по оси абсцисс в 2 раза; сжатие по оси ординат в 2 раза; симметричное отображение относительно оси абсцисс; параллельный перенос вдоль оси ординат вверх на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба. График функции $y = \sin^2 x$ представлен на рис. 10.



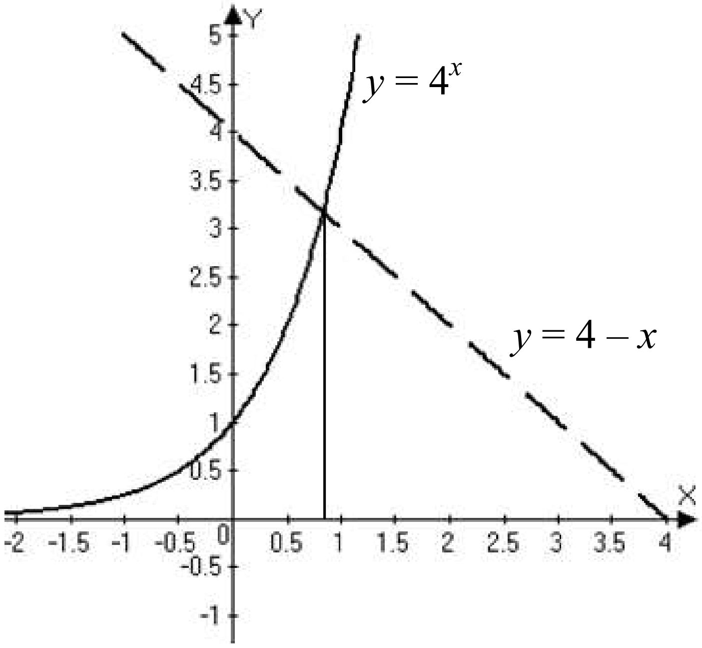
Задача 4.4. Решить графически уравнение $4^x - 4 + x = 0$.

Решение

Запишем уравнение в виде $4^x = 4 - x$. Корнем этого уравнения будет значение $x = x_0$, подстановка которого обращает данное уравнение в верное числовое равенство $4^{x_0} = 4 - x_0$. Геометрически x_0 – это абсцисса общей точки (т. е. точки пересечения) графиков функций $y_1 = 4^x$ и $y_2 = 4 - x$.

Построим в системе координат графики функций y_1 и y_2 по точкам:

1. $y_1 = 4^x$: $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 4$; $x = -1$, $y = 0,5$.
2. $y_2 = 4 - x$: $x = 0$, $y = 4$; $x = 1$, $y = 3$.



Точка пересечения этих кривых имеет абсциссу $x_0 \approx 0,8$. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x_0 \approx 0,8$.

Теория пределов

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Если значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу *A*, когда значения аргумента *x* неограниченно приближаются к числу a, при этом $x \neq a$, то число *A* называется пределом функции $f(x)$ при стремлении аргумента *x* к значению *a*. Кратко это записывается так $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Задача 4.5. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Найдем предел этой функции при *x*, стремящемся к 1. Рассмотрим несколько значений аргумента, близкие к 1, и соответствующие им значения функции

x	0	2	0,5	1,4	0,8	1,1	0,9	0,99	1,001
y	1	3	1,5	2,4	1,8	2,1	1,9	1,99	2,001

Можно заметить, что при неограниченном приближении *x* к числу 1, значения функции неограниченно приближаются к числу 2. Значит $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. Этот же результат можно получить, преобразовав функцию: так как $x \to 1$, но $x \neq 1$, то $x - 1 \neq 0$ и $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$. Тогда $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$. Например, функция $f(x) = (x-1)^2$ при $x \to 1$ бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$.

Если при $x \to a$ абсолютные значения функции неограниченно возрастают, то функция называется бесконечно большой при $x \to a$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Например, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Аналогичные ситуации могут возникнуть при неограниченном увеличении значения *x* (по модулю). Например, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 2}{x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(5 + \dfrac{2}{x}\right) = 5$.

Если при неограниченном увеличении x значения функции неограниченно возрастают, то функция называется бесконечно большой при $x \to \infty$. Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+2x\right)=+\infty$.

При нахождении пределов используются следующие теоремы о пределах:

1. Если C – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$, $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$.

Замечание: теоремы о пределах справедливы и при $x \to \infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ – второй замечательный предел.

Задача 4.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}$.

Решение

Вычислим его $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 7}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 7}(x-5)} = \dfrac{3\cdot\lim\limits_{x\to 7} x+5}{\lim\limits_{x\to 7} x-5} = 13$

Задача 4.7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}$.

Решение

Так как при $x \to 1$ предел числителя и знаменателя равен нулю, то непосредственное применение теоремы о пределе дроби невозможно. Вычисление предела сводится к раскрытию неопределенности вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3} = \dfrac{2(x-1)(x+0{,}5)}{(x-1)(x+3)}$. Разделим числитель и знаменатель на $(x-1)$. Это сокращение допустимо, так как $x \to 1$, но $x \neq 1$. Поэтому для всех $x \neq 1$ имеем

$\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{2x+1}{x+3}$, и пределы этих функций равны между собой. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x+3} = 0{,}75$.

Задача 4.8. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{15x^2 + 7x - 4}{3x^2 - 2x + 3}$.

Решение

Здесь применить непосредственно теорему о пределе дроби тоже нельзя, так как числитель и знаменатель дроби не имеют предела при $x \to +\infty$, одновременно стремясь к $+\infty$. В этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы найти предел дроби, преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2. После такого преобразования уже легко найти предел:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{15x^2 + 7x - 4}{3x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{15 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(15 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{15}{3} = 5.$$

Задача 4.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{tg^2 2x}$.

Решение

Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Поэтому имеет место неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Преобразуем дробь, используя формулы тригонометрии:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 6x}{tg^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 3x}{tg^2 2x} = \lim_{x\to 0}\left[2 \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot 9 \cdot \frac{\cos^2 2x}{4 \cdot \left(\frac{\sin\ 2x}{2x}\right)^2}\right] =$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

Задача 4.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$.

Решение

При $x\to\infty$ основание $\frac{x-3}{x+1}$ стремится к единице, а показатель степени – к бесконечности. Поэтому имеем неопределенность вида $\left\{1^{\infty}\right\}$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$\frac{x-3}{x+1}=1+\frac{x-3}{x+1}-1=1+\frac{-4}{x+1}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4(x-1)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x-1)}{x+1}}=e^{-4}.$$

Непрерывность

Пусть x_0– некоторое действительное число(точка на числовой оси). Окрестностью точки x_0 называется всякий интервал вида $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, где $\delta>0$. Число x_0 называется центром окрестности, а число δ– ее радиусом.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если значения функции $y=f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A_1 при $x\to x_0$, но при этом x принимает значения, строго меньшие x_0 ($x_0<x$), то число A_1 называют пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 *слев*а и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$. Аналогично введем понятие предела функции $y=f(x)$ *справа* в точке x_0 при $x\to x_0$ и $x>x_0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$. Число A_2 называется пределом функции справа. Такие пределы называются односторонними пределами.

Сформулируем второе определение непрерывности функции в точке. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и не является непрерывной в точке $x = x_0$, то функция называется разрывной в этой точке, а точка $x = x_0$ называется точкой разрыва. Точки разрыва можно разделить на два рода.

1. Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют оба односторонних предела.

2. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Имеет место утверждение: всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.

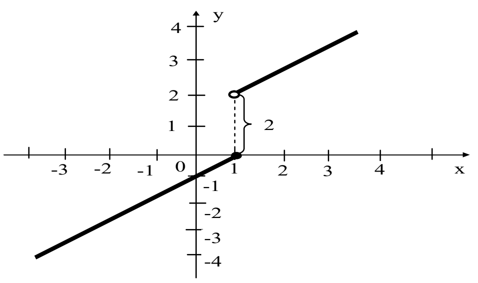
Задача 4.11. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график $y = \begin{cases} x-1, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$.

Решение

Везде, кроме точки $x_0 = 1$, функция непрерывна. Найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (x-1) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (x+1) = 2$. Следовательно, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода. При переходе через нее функция совершает скачок, величина которого равна $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2$. Приведем график данной функции.



Задача 4.12. Исследовать на непрерывность функцию $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$ в точке $x_0 = 2$. Построить схематичный график функции.

Решение

Данная функция определена и непрерывна во всех точках, кроме точки $x_0 = 2$. Исследуем характер разрыва функции в этой точке. Для этого найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$. Следовательно, в данной точке функция имеет разрыв второго рода.

Для построения графика исследуем поведение функции на бесконечности.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{1}{x-2}} = 1$. На основе полученных данных строим график функции.