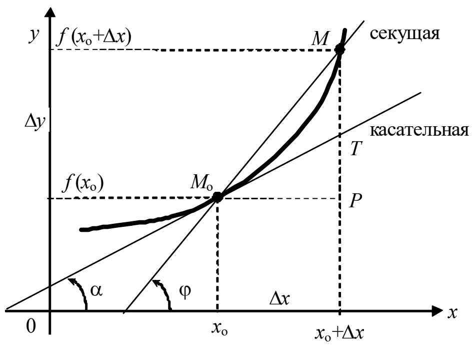
5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной



Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое значение x.

Приращением аргумента в точке x_0 называют разность $\Delta x=x-x_0$. Из равенства следует: $x=x_0+\Delta x$.

Аналогично, *приращением функции* $f(x)$ называется разность $\Delta y=f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$. В этом случае можно выразить $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y$.

Производной функции $y=f\left(x\right)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что Δx произвольным образом стремится к нулю. Производная функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 обозначается $f'\left(x_0\right)$. Итак, по определению

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. Функция $y=f(x)$, имеющая в точке x_0 производную, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции. Для одной и той же функции $y=f(x)$ производная в различных точках x может принимать различные значения, т. е. в свою очередь является функцией от x.

Приведем таблицу производных основных элементарных функций.

Основные формулы дифференцирования:

1. $\left(C\right)'=0$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$;
9. $(\cos x)'=-\sin x$;
10. $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\operatorname{ctg}x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

5. $(e^x)' = e^x$

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;

7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

8. $(\sin x)' = \cos x$;

13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$, в частности $\left(C \cdot u\right)' = C \cdot \left(u\right)'$.

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$.

Дадим определение сложной функции. Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = g(x)$ на множестве D_1, причем любому $x \in D_1$ соответствует значение $u=g(x)$, где $u \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(g(x))$, которая называется *сложной функцией от x*. Производная этой функции будет определяться по формуле

$y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Производная сложной функции равна производной внешней функции $f(u)$, вычисленной в точке $u = g(x)$, умноженной на производную внутренней функции $g(x)$ в точке x.

Задача 5.1. Найти производную $y = (x^2 + 3^x)^3$.

Решение

Здесь $y = u^3$, где $u = x^2 + 3^x$.

Тогда $y' = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2 + 3^x)^2 \cdot (x^2 + 3^x)' = 3(x^2 + 3^x)^2 (2x + 3^x \cdot \ln 3)$.

Задача 5.2. Найти производную $y = \dfrac{\cos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение

Производная равна $y' = \dfrac{3\cos^2 x(-\sin x)\sqrt{1-x^2} - (\cos^3 x - 1) \cdot \left(\dfrac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2}$.

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*. Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.* Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается $y'' = (y')'$. *Производной n-ого порядка* называется производная от производной *(n*-1*)* порядка $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Задача 5.3. Найти производную второго порядка функции $y = \dfrac{x}{\cos x}$.

Решение

$$y' = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}.$$

Тогда $y'' = (y')' = \dfrac{(\cos x + x\sin x)'\cos^2 x - (\cos x + x\sin x)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} =$

$$= \frac{(x\cos x)\cos^2 x - 2\cos x(-\sin x)(\cos x + x\sin x)}{\cos^4 x}.$$

Пусть зависимость между аргументом x функцией y задана параметрически в виде двух уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t – вспомогательная переменная, *называемая параметром.* Причем, в области изменения параметра t функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$. Найдем производную y'_x. Так как производная равна отношению дифференциалов y и x, то $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t dt}{x'_t dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Таким образом, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Задача 5.4. Пусть $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t\sin t \end{cases}$. Найти y'_x.

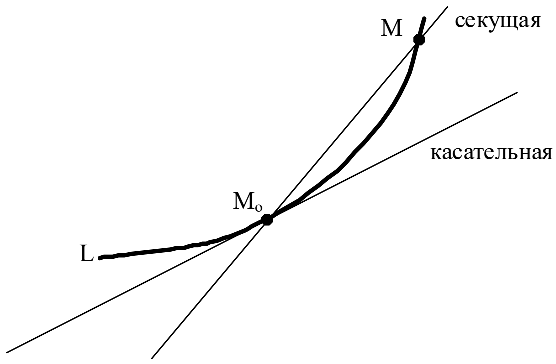
Решение

Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = \sin t + t\cos t$.

Тогда $y'_x = \dfrac{\sin t + t\cos t}{3t^2}$.

Приложения производной

Выясним геометрический смысл производной. С этой целью введем определение касательной к кривой в данной точке. Пусть на кривой L выбрана точка M_0. Рассмотрим другую точку M кривой, и проведем секущую M_0M.



Определение. Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, перемещаясь по кривой L, неограниченно приближается к точке M_0

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке M_0 с абсциссой x_0 невертикальную касательную. Дадим x_0 приращение Δx. По чертежу видно, что $\Delta x = M_0P$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = MP$.

Точка M графика функции имеет координаты $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Пусть секущая M_0M образует с осью OX угол φ. Тогда $tg\varphi = \dfrac{MP}{M_0P} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При стремлении Δx к нулю приращение функции Δy также стремится к нулю, и точка M, перемещаясь по графику функции, неограниченно приближается к точке M_0. При этом секущая M_0M, поворачиваясь около точки M_0, стремится занять положение M_0T – касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Поэтому

$$k_{кас} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Значит, значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Используя уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с заданным угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0)$, можно написать уравнение *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0. Оно будет иметь вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Отметим также механический смысл производной. Пусть материальная точка движется по прямой по закону $s = s(t)$. Тогда производная $s(t)$ по t

характеризует скорость точки в момент времени t $v(t) = s'(t)$. Эту скорость называют иногда мгновенной скоростью точки.

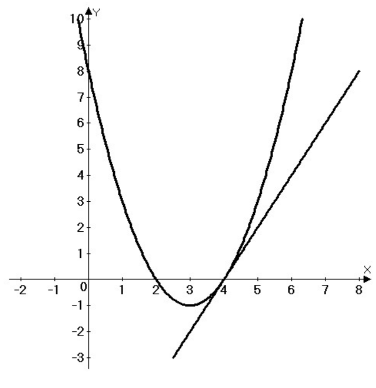
Приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ иногда удобно заменять приближенной величиной $f'(x_0)(x - x_0)$. Геометрически это равносильно замене дуги M_0M на участке графика функции отрезком прямой M_0T: $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$. Выражение $f'(x_0)\Delta x$, линейное относительно Δx, называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначается dy. Значит, $dy = f'(x_0)\Delta x$. Пусть $y = x$, тогда $dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, т. е. $dx = \Delta x$. Поэтому окончательно имеем $dy = f'(x_0)dx$. Геометрически $dy = \Delta x \cdot tg\alpha = PT$. Отрезок PT выражает приращение ординаты касательной при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной в точке с абсциссой x_0. Окончательно имеем $dy = f'(x)dx$. Отсюда в частности вытекает, что производную можно рассматривать, как отношение дифференциалов dy и dx: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Задача 5.5. Дана функция y=$x^2 - 6x + 8$. Найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат. Построить график функции. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = 4$. Построить касательную на чертеже.

Решение

Найдем точки пересечения графика с осями координат: $x = 0$; $y = 8$. Точка пересечения с осью OY имеет координаты $M(0;8)$. Для нахождения абсцисс точек пересечения с осью OX решим уравнение: $x^2 - 6x + 8 = 0$. Получим $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Таким образом, точки пересечения с осью OX будут $M_1(2;0)$ и $M_2(4;0)$. Для определения координат вершины O_1 параболы выделим полный квадрат

$y = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$. Тогда $O_1(3;-1)$.



Составим уравнение касательной в точке (4;0).

$y' = 2x - 6$. $y'(4) = 2$. Уравнение касательной будет $y - 0 = 2(x - 4)$ или $y = 2x - 8$. Изобразим параболу и касательную к ней на чертеже.

Задача 5.6. Тело движется по закону $s(t) = 4 + 8t + 5t^2$. Найти скорость тела в начальный момент времени (t=0) и через t = 6 с.

Решение

Найдем скорость тела в произвольный момент времени t. $v(t) = s'(t) = 8 + 10t$. Теперь вычислим значение этой скорости в конкретные моменты времени.

$v(0) = 8 + 10 \cdot 0 = 8$; $v(6) = 8 + 10 \cdot 6 = 68$.

Рассмотрим метод раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, который основан на применении производной, т. е. «правила Лопиталя». Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности этой точки. Если существует предел отношения производных этих функций, то он равен пределу отношения самих функций $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Это правило справедливо также и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$. Тогда оно дает возможность раскрывать неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Если отношение производных опять представляет собой неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то можно правило Лопиталя применить повторно, то есть перейти к пределу отношения вторых производных.

Задача 5.7. Вычислить пределы.

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x\ln x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1.$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2cos2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x \cdot \sin x}{\cos x \cdot \sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x \cdot \sin x}{2\sin x \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\{\infty\cdot 0\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})=1.$$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Важное применение производная находит при построении графиков функций. Введем некоторые понятия.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на интервале $(a;b)$, если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$ таких, что $x_1<x_2$, справедливо $f(x_1)<f(x_2)$ (если $f(x_1)>f(x_2)$, то функция *убывает*) на интервале $(a;b)$.

Интервал, на котором функция убывает или возрастает, называется *интервалом монотонности* функции. Причем, если $f'(x)>0$ на интервале, то функция возрастает; если $f'(x)<0$ – убывает.

Если в точке x_0 производная функции равна нулю или не существует, то эта точка называется *критической*. Критическими являются все точки экстремума (точки максимума и минимума). Точка x_0 называется *точкой максимума*, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, справедливо неравенство $f(x)<f(x_0)$. Если $f(x)>f(x_0)$, то x_0 – *точка минимума*. При переходе через точку максимума знак первой производной меняется с плюса на минус, а через точку минимума – с минуса на плюс.

Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции определяются с помощью второй производной. Если на интервале $f''(x)>0$, то график функции на этом интервале – выпуклый вниз (вогнутый), если $f''(x)<0$ – выпуклый вверх (выпуклый). *Точкой перегиба* называется точка, при переходе через которую, график функции меняет направление выпуклости. В этих точках вторая производная равна нулю или не существует.

Построение графика функции значительно упрощается, если найти его асимптоты. Прямая называется а*симптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки, удаляющейся по графику в бесконечность, до этой прямой стремится к нулю. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или бесконечности равен один из односторонних пределов.

Уравнение *наклонной асимптоты* графика функции $y=f(x)$ имеет вид $y= kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Если $к=0$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ существует, то уравнение $y = b$ определяет *горизонтальную асимптоту*.

Приведем *план полного исследования функции с помощью производной*:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства; четность, нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции; исследовать поведение функции в точках разрыва.
4. Найти критические точки и исследовать функцию на монотонность.
5. Найти точки перегиба и промежутки выпуклости.

Задача 5.8. Построить график функции $y = (x+1)^3 - 3x - 3$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-4; 1]$.

Решение

Область определения функции – вся числовая ось, т. е. $D(f): (-\infty;+\infty)$.

Точки пересечения графика с координатными осями будут: с осью Oy – (0;–2); с осью Ox :$y = 0$, тогда

$$(x+1)(x^2 + 2x + 1 - 3) = 0,$$

$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$ при $x=-1$, $x \approx -2{,}7$, $x \approx 0{,}7$.

График функции асимптот не имеет, так как $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

Найдем критические точки:

$y' = 3(x+1)^2 - 3 = 3(x^2 + 2x)$ Производная равна нулю при x=0 и x=–2. Результаты исследования функции на монотонность сведем в таблицу

x	$(-\infty, -2)$	–2	(–2; 0)	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↑	2	↓	–2	↑

Таким образом, $x = -2$ – точка максимума, $y_{\max} = y(-2) = 2$, точка x=0 – точка минимума, $y_{\min} = y(0) = -2$.

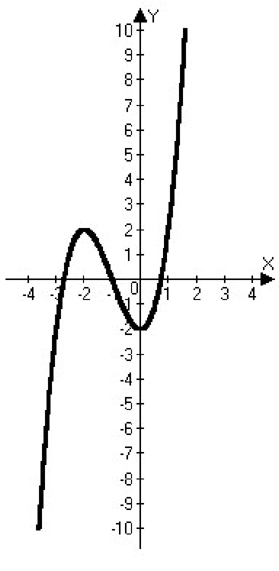
5. Исследуем график функции на выпуклость и вогнутость. Найдем y'': $y'' = 3(2x+2)$.

$3(2x+2) = 0$ при $x = -1$. Результаты исследования отразим в таблице

x	$(-\infty, -1)$	–1	$(-1, +\infty)$
y''	–	0	+
y	∩	0 Т.п.	∪

Точка с абсциссой $x = -1$ – точка перегиба.

6.Строим график функции.



7. Найдем наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-4; 1]$. Для этого найдем значение функции на концах отрезка: $y(-4) = -18$; $y(1)$=2. Сравним их со значениями функции в точках максимума и минимума: $y(-2) = 2$ и $y(0) = -2$ (точки x= –2 и x= 0 попадают в данный отрезок). Тогда $y_{наиб} = y(1) = y(-2) = 2$ и $y_{наим} = y(-4) = -18$.

Задача 5.9. Построить график функции $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

Решение

1. Знаменатель дроби обращается в нуль при $x=\pm 1$, поэтому область определения будет иметь вид $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Так как y = 0 при x=0, то график функции проходит через начало координат. Функция принимает положительные значения в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, и отрицательные значения в интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$.

Функция является нечетной, так как $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=-y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

3. Так как $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x}{1-x^2}=\mp\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x}{1-x^2}=\mp\infty$, то прямые x=1, x=–1 являются вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонных асимптот: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(1-x^2)x}=0$. Тогда $b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1-x^2}-0\cdot x)=0$. Следовательно, прямая y = 0 (ось Ox) является горизонтальной асимптотой.

4. Найдем интервалы возрастания и убывания. $y'=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)'=\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как $y'>0$ при любом x из области определения функции, то функция не имеет экстремумов и монотонно возрастает в каждом из интервалов $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

5. Найдем интервалы выпуклости и точку перегиба.

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю при x=0.

Результаты исследования графика на выпуклость и вогнутость занесем в таблицу

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1 ;0)	0	(0; 1)	1	$(1;+\infty)$
y''	+	Не сущ	–	0	+	Не сущ.	–
y	$\cup$	Не сущ	$\cap$	0	$\cup$	Не сущ.	$\cap$

Точка с координатами $O(0;0)$ – точка перегиба.

6. На основании результатов исследования строим график функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$