6. Интегральное исчисление функции одной переменной

6.1. Неопределенный интеграл: основные приемы интегрирования

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.
2. $\int dF(x)=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.
3. $\int k\cdot f(x)dx=k\int f(x)dx$, где $k-\text{const}$.
4. $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C;\ (\alpha\neq-1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$

3. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$

4. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

5. $\int \sin xdx=-\cos x+C$

6. $\int \cos xdx=\sin x+C$

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}x+C$

8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{ctg}x+C$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

Задача 6.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x-5}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{d(x-5)}{x-5} = \ln|x-5| + C.$$

Задача 6.2. Найти интеграл $\int \mathrm{tg} x dx$.

Решение

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Задача 6.3. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^3 x}}{\sin^2 x} dx$.

Решение

$$\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^3 x}}{\sin^2 x} dx = -\int \sqrt{\mathrm{ctg}^3 x}\, d(ctgx) = |u = \mathrm{ctg} x| =$$

$$= -\int \sqrt{u^3}\, du = -\frac{2}{5}\sqrt{u^5} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{ctg}^5 x} + C.$$

Задача 6.4. Найти интеграл $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$.

Решение

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+a^2) = 2xdx, \\ xdx = \dfrac{d(x^2+a^2)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

Задача 6.5. Найти интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$.

Решение

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+a^2) = 2xdx, \\ xdx = \dfrac{d(x^2+a^2)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле (подстановка, подведение под знак дифференциала)

Если в подынтегральной функции $f(x)$ сделать подстановку $x=\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то $dx=\varphi'(t)dt$ и неопределенный интеграл можно вычислить по формуле

$$\int f(x)dx=\left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right|=\int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt.$$

При этом функция $\varphi(t)$ подбирается так, чтобы интеграл, полученный по переменной *t*, был бы проще исходного.

Задача 6.6. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx$.

Решение

$$\int\frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x \\ du=\dfrac{dx}{x} \end{matrix}\right|=\int\sqrt{u^3}du=\frac{2}{5}\sqrt{u^5}+C=\frac{2}{5}\sqrt{\ln^5 x}+C.$$

Задача 6.7. Найти интеграл $\int\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx$.

Решение

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx=\left|\begin{matrix} u=2+\sin x, \\ du=\cos x dx \end{matrix}\right|=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{2+\sin x}+C.$$

Задача 6.8. Найти интеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t\,dt, \\ t = \arcsin\dfrac{x}{2} \end{array} \right| = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt = 4\int\cos^2 t\,dt = 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int dt + 2\int\cos 2t\,dt =$$

$$= 2t + \sin 2t + C = \left| \begin{array}{c} \text{обратная подстановка} \\ t = \arcsin\dfrac{t}{2} \end{array} \right| = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \text{ где } u = u(x),\ v = v(x).$$

Основные типы интегралов, которые находятся методом интегрирования по частям

1	$\int x^k e^{ax}dx$	Во всех этих случаях функцию $u(x)$ полагают равной x^k, то есть $u = x^k$
2	$\int x^k \sin ax\,dx$	
3	$\int x^k \cos ax\,dx$	
4	$\int x^k \ln x\,dx$	$u = \ln x$
5	$\int x^k \arcsin x\,dx$	$u = \arcsin x$
6	$\int x^k \arccos x\,dx$	$u = \arccos x$
7	$\int x^k \operatorname{arctg} x\,dx$	$u = \operatorname{arctg} x$
8	$\int x^k \operatorname{arcctg} x\,dx$	$u = \operatorname{arcctg} x$

Задача 6.9. Найти интеграл $\int x\cdot\cos x\,dx$.

Решение

$$\int x\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=x,\quad du=dx\\ dv=\cos xdx,\quad v=\int\cos xdx=\sin x\end{array}\right|=x\cdot\sin x-\int\sin xdx=$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+C.$$

Задача 6.10. Найти интеграл $\int\left(3x+5\right)\cdot e^{-2x}dx$.

Решение

$$\int\left(3x+5\right)\cdot e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{l}u=3x+5,\quad du=(3x+5)'dx=3dx,\\ dv=e^{-2x}dx,\quad v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\end{array}\right|=$$

$$=(3x+5)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-3\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=-\frac{3}{2}e^{-2x}\cdot x-\frac{5}{2}e^{-2x}-\frac{3}{4}\cdot e^{-2x}+C=$$

$$=-\frac{3}{2}e^{-2x}\cdot x-\frac{13}{4}e^{-2x}+C.$$

Задача 6.11. Найти интеграл $\int\ln\left(x+1\right)dx$.

Решение

$$\int\ln\left(x+1\right)dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln(x+1),\ du=(\ln(x+1))'dx=\frac{1}{x+1}dx,\\ dv=dx,\ \ v(x)=\int dx=x\end{array}\right|=\ln(x+1)\cdot x-$$

$$-\int x\cdot\frac{1}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=x\cdot\ln(x+1)-\int dx+\int\frac{1}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-x+\int\frac{d(x+1)}{x+1}=$$

$$=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C=\left(x+1\right)\cdot\ln(x+1)-x+C.$$

Задача 6.12. Найти интеграл $\int\mathrm{arctg}2x\,dx$.

Решение

$$\int\mathrm{arctg}2x\,dx=\left|\begin{array}{l}u=\mathrm{arctg}2x,\quad du=(\mathrm{arctg}2x)'dx=\frac{2dx}{4x^2+1},\\ dv=dx,\ \ v(x)=\int dx=x\end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\mathrm{arctg}2x-\int\frac{2xdx}{4x^2+1}=x\cdot\mathrm{arctg}2x-\frac{1}{4}\int\frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1}=$$

$$=x\cdot\mathrm{arctg}2x-\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)+C.$$

6.2. Неопределенный интеграл: некоторые классы интегрируемых функций

Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (*рациональной дробью*) называется выражение вида $\frac{P_m(x)}{R_n(x)}$, где в числителе $P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$ – многочлен степени m, в знаменателе $R_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$ – многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если $m<n$; *неправильной*, если $m\geq n$.

Правильные простейшие дроби и методы их интегрирования

Простейшая дробь *первого типа* ($a=\text{const}$, $A=\text{const}$)

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\left|d(x-a)=dx\right|=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

Простейшая дробь *второго типа* ($a=\text{const}$, $A=\text{const}$, $k\in N$)

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\left|dx=d(x-a)\right|=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{(-k+1)(x-a)^{k-1}}+C,$$

Простейшая дробь *третьего типа* ($p,q,M,N=\text{const}$, x^2+px+q – квадратный трехчлен кратности $k=1$, причем $p^2-4q<0$)

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\left|\begin{array}{l}x+\frac{p}{2}=t\\ x=t-\frac{p}{2}\\ dx=dt\\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{array}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=$$

$$=M\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+\left(N-\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+\frac{1}{a}\left(N-\frac{p}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right| + \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\left(N-\frac{p}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{N-\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Простейшая дробь *четвертого типа*

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \underbrace{\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx}_{I_a} + \underbrace{\int\frac{\left(N-M\frac{p}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx}_{I_b}$$

$$I_a = \frac{M}{2}\int\frac{du}{u^k} = \frac{M}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{(1-k)} + C = -\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C$$

$$I_b = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \left\{\begin{array}{c} t = x+\frac{p}{2}, \\ a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{array}\right\} = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k,$$

где интегралы $I_k = \int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ находятся по рекуррентной формуле

$$I_{k+1} = \frac{t}{2k\,a^2(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2k\,a^2}I_k.$$

По интегралу

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

находится интеграл I_2, затем по интегралу I_2 находится I_3 и т. д.

Общая схема интегрирования рациональной дроби

1. Если дробь *неправильная*, то нужно выделить в ней целую часть путем деления «столбиком» числителя на знаменатель.

2. При разложении правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{R_n(x)}$ на простейшие дроби существенное значение имеет разложение знаменателя дроби на произведение линейных и квадратичных сомножителей.

Пусть для определенности знаменатель $R_n(x)$ раскладывается на множители следующим образом:

$$R_n(x) = (x - x_1)^k (x - x_2)^l \left(x^2 + px + q\right)^m, \quad k + l + 2m = n,$$

причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней и коэффициент $b_n = 1$.

3. Тогда правильная дробь единственным образом может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{P_m(x)}{R_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{B_l}{(x - x_2)^l} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{M_m x + N_m}{\left(x^2 + px + q\right)^m}.$$

При наличии в разложении многочлена $R_n(x)$ большего числа линейных и квадратичных множителей схема остается прежней.

4. Найти неопределенные коэффициенты разложения.

5. Найти интегралы от каждого слагаемого.

Задача 6.13. Выделить целую часть дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^3+4x^2-3x+5}{x^2+x}$.

Решение

Дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная. Разделим многочлен-числитель на многочлен-знаменатель по правилу деления многочленов («столбиком»). Получим

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^3+4x^2-3x+5 & \underline{x^2+x} \\
-\underline{x^3+x^2} & x+3 \\
\quad 3x^2-3x & \\
\quad -\underline{3x^2+3x} & \\
\qquad -6x+5 &
\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^3+4x^2-3x+5}{x^2+x} = x+3+\frac{-6x+5}{x^2+x}$$

Целая часть дроби равна $M(x) = x+3$, дробная часть частного $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{-6x+5}{x^2+x}$ − правильная дробь.

Задача 6.14. Определить кратность корней многочлена $Q(x) = (x+2)(x-1)^2(x-4)^3(x^2+x+1)$.

Решение

Этот многочлен имеет простой корень $x_1 = -2$, его кратность $k_1 = 1$. Корень $x_2 = 1$ имеет кратность $k_2 = 2$. Корень $x_3 = 4$ имеет кратность $k_3 = 3$. А квадратный трехчлен x^2+x+1 $(D = -3 < 0)$ действительных корней не имеет и на действительные множители не раскладывается.

Задача 6.15. Написать разложение дроби $\dfrac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}$ на простейшие дроби.

Решение

Знаменатель x^3-4x имеет три простых корня $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$.

Поэтому $\dfrac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-2} + \dfrac{A_3}{x+2}$.

Задача 6.16. Написать разложение дроби $\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x-4)^3}$ на простейшие дроби.

Решение

Знаменатель дроби имеет корень $x_1=-2$ кратности $k_1=2$ и корень $x_2=4$ кратности $k_2=3$. Тогда, следуя схеме, получим такое разложение

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x-4)^3}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{B_1}{x-4}+\frac{B_2}{(x-4)^2}+\frac{B_3}{(x-4)^3}.$$

Задача 6.17. Написать разложение дроби $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ на простейшие.

Решение

В этом случае знаменатель имеет один простой действительный корень $x=2$. Ему будет соответствовать дробь *I*-го типа, а множителю x^2+2x+4 $(D=-3<0)$ − дробь *III*-го типа. Таким образом, разложение будет иметь вид $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+2x+4}$.

Задача 6.18. Написать разложение дроби $\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-1)^3(x^2+9)}$ на простейшие.

Решение

Следуя схеме, получаем

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-1)^3(x^2+9)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}+\frac{Mx+N}{x^2+9}.$$

В этом и предыдущих примерах коэффициенты, стоящие в числителях дробей, подлежат определению.

Задача 6.19. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

Решение

Под знаком интеграла стоит правильная дробь. Знаменатель дроби имеет один простой корень $\left(x_1=0\right)$ и корень $x_2=-1$ кратности $k=3$. Первому корню будет соответствовать дробь вида $\dfrac{A}{x}$, а множителю $\left(x+1\right)^3$ будет соответствовать сумма дробей вида $\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$. Таким образом, разложение подынтегральной функции на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}.$$

Приведем дроби, стоящие в правой части, к общему знаменателю. Получим равенство

$$3x+2=A(x+1)^3+B_1x(x+1)^2+B_2x(x+1)+B_3x.$$

Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов при соответствующих степенях x, найдем

$x=0 \quad \big|\ 2=A.$

$x=-1 \quad \big|\ -1=-B_3;\ B_3=1.$

При x^3 $\big|\ 0=A+B_1;\ B_1=-A;\ B_1=-2.$

При x^2 $\big|\ 0=3A+2B_1+B_2;\ B_2=-3A-2B_1=-6+4=-2.$

Поэтому $\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$. Следовательно,

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}+\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^3}=$$

$$=2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{\left(x+1\right)^2}+C.$$

Задача 6.20. Найти интеграл $\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx$.

Решение

Подынтегральная функция − правильная дробь. Ее знаменатель раскладывается на множители по формуле суммы кубов: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Разложение дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{5x^2+1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Откуда $5x^2+1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$.

Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов, получим

$x=-1 \;\big|\; 6=3A;\quad A=2.$

$x=-1 \;\big|\; -1=-B_3;\; B_3=1.$

При $x^2 \;\big|\; 5=A+M;\; M=5-A=3.$

При $x^0 \;\big|\; 1=A+N;\; N=1-A=-1.$

Поэтому

$$\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx=2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=2\ln|x+1|+\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1}.$$

Рассмотрим оставшийся интеграл

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\left|\begin{array}{l} x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}, \\ x-\dfrac{1}{2}=u,\;\; x=u+\dfrac{1}{2},\;\; dx=du \end{array}\right|=\int\frac{3u+\frac{3}{2}-1}{u^2+\frac{3}{4}}du=$$

$$=\int\frac{3u+\frac{1}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du=3\int\frac{u\,du}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{5x^2+1}{x^3+1}dx=2\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x;\cos x)dx$, где $R(\sin x;\cos x)$ – рациональная функция, находятся с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом $x=2\operatorname{arctg}t$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, где m, n – целые числа, находятся в зависимости от вида показателей степеней (четные или нечетные) синуса и косинуса.

Возможны следующие четыре случая:

А. Если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное целое положительное* число, то для нахождения интеграла надо отделить от нечетной степени один сомножитель и внести его под знак дифференциала, а оставшуюся часть преобразовать при помощи формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. В результате все подынтегральное выражение будет выражено через синусы или косинусы и сведено к табличным интегралам.

Б. Если m и n – *четные неотрицательные* числа, то для нахождения интеграла необходимо применить формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Также могут быть полезны и такие формулы:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha,\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

В. Если $m+n$ является *четным отрицательным* числом, то в этом случае применяются формулы

$$\operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

или

$$\operatorname{ctg} x = t,\ x = \operatorname{arcctg} t,\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Далее применяются тригонометрические преобразования по формулам

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Г. Если n и m – *отрицательные* числа и при этом одно из них нечетно, то для нахождения интеграла нужно подынтегральное выражение умножить и разделить на функцию с нечетным показателем.

Например, для интеграла $\int \sin^{-2} x \cos^{-3} x\, dx$ подынтегральное выражение умножается и делится на функцию $\cos x$

$$\int \sin^{-2} x \cos^{-3} x\, dx = \int \frac{\sin^{-2} x \cos^{-3} x \cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^4 x} dx$$

и после применения приемов, рассмотренных ранее, интеграл приводится к табличному.

Интегралы вида $\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx$ находятся с использованием тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Задача 6.21. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$ учитывая, что

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, получим $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Задача 6.22. Найти интеграл $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$.

Решение

Отделим множитель в нечетной степени и замечая, что $\sin x dx = -d(\cos x)$, получим

$$\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \int \sin^2 x\cos^4 x\cdot\sin x dx = -\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x d(\cos x) =$$

$$= -\int\left(\cos^4 x - \cos^6 x\right) d\cos x = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Задача 6.23. Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} dx$.

Решение

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}\cos x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} - \int (\sin x)^{\frac{9}{7}} dx =$$

$$= \frac{7}{2}(\sin x)^{\frac{2}{7}} - \frac{7}{16}(\sin x)^{\frac{16}{7}} + C.$$

Задача 6.24. Найти интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Решение

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + C.$$

Задача 6.25. Найти интеграл $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.

Решение

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \left(1 + \mathrm{ctg}^2 x\right) d\mathrm{ctg} x = -\,\mathrm{ctg} x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C.$$

Задача 6.26. Найти интеграл $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1-\mathrm{tg}^2 x} dx$.

Решение

$$\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1-\mathrm{tg}^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg} x, \quad x = \mathrm{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg} x}{1-\mathrm{tg} x}\right| + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx,$$

где R – рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_k, n_k$ – целые числа, преобразуются к интегралам от рациональной дроби подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где s – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ преобразуются к табличным интегралам путем выделения полного квадрата под радикалом и введения замены $x+\frac{b}{a}=t$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$; $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ сводятся к интегралам, рационально зависящим от тригонометрических функций, с помощью соответствующих *тригонометрических подстановок*:

$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, используется подстановка $x=a\sin t\ (x=a\cos t)$;

$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, используется подстановка $x=a\,\mathrm{tg}\,t\ (x=a\,\mathrm{ctg}\,t)$;

$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, используется подстановка $x=\frac{a}{\cos t}\left(x=\frac{a}{\sin t}\right)$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ находятся методом выделения полного квадрата под радикалом и введения замены $x+\frac{b}{a}=t$. В результате приходят к интегралам, рассмотренным в предыдущем пункте.

Задача 6.27. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$.

Решение

Применим подстановку $x=2\sin t$, получим $dx=2\cos t\,dt$, при этом $t=\arcsin\frac{x}{2}$; $\sqrt{(4-x^2)^3}=\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}=\cos^3 t$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\int \frac{8\cos^3 t}{64\sin^6 t}\cdot 2\cos t dt=\frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int \mathrm{ctg}^4 t\, d(\mathrm{ctg} t)=-\frac{1}{20}\mathrm{ctg}^5 t+C=-\frac{1}{20}\mathrm{ctg}^5\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

Ответ допускает упрощение. Так как $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$, а

$\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$, то $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}{\dfrac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Таким образом,

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = -\frac{1}{20}\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{x^5} + C.$$

Задача 6.28. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}}$.

Решение

Применим подстановку $x = 4\operatorname{tg} t$, тогда $dx = \dfrac{4}{\cos^2 t}dt,\ t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}} = \int \frac{\dfrac{4dt}{\cos^2 t}}{16\operatorname{tg}^2 t\sqrt{(16+16\operatorname{tg}^2 t)}} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{16}\frac{1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}\right)} + C.$$

Ответ можно упростить, используя формулы тригонометрии:

$\sin t = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ и $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$.

Окончательно получим

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(16+x^2)}} = -\frac{1}{16}\frac{\sqrt{16+x^2}}{x} + C.$$

Задача 6.29. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}dx}{x}$.

Решение

Применяя подстановку $x=\frac{4}{\sin t}$, получим $dx=-\frac{4\cos t}{\sin^2 t}dt$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx=-\int \frac{\sqrt{\frac{16}{\sin^2 t}-16}}{\frac{4}{\sin t}}\cdot\frac{4}{\sin^2 t}\cos t dt=-4\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=-4\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=-4\int \frac{dt}{\sin^2 t}+4\int dt=4\mathrm{ctg}t+4t+C.$$

Теперь вернемся к переменной x. Получим

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx=4\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{x}\right)+4\arcsin\frac{4}{x}+C.$$

Упростим полученный ответ. Так как $\mathrm{ctg}t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$ и $\sin\left(\arcsin\frac{4}{x}\right)=\frac{4}{x}$, то окончательно имеем

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-16)}}{x}dx=\sqrt{x^2-16}+4\arcsin\frac{4}{x}+C.$$

Задача 6.30. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+9}dx$.

Решение

Подынтегральная функция содержит $x^{\frac{1}{2}}$ и $x^{\frac{1}{4}}$. Поэтому вводим замену $x=t^4$. Тогда $\sqrt{x}=t^2$, $\sqrt[4]{x^3}=t^3$, $t=\sqrt[4]{x}$, $dx=4t^3dt$. В итоге получим

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+9}dx=\int \frac{t^2}{t^3+9}\cdot 4t^3dt=4\int \frac{t^5}{t^3+9}dt=4\int \frac{t^2\left(t^3+9-9\right)}{t^3+9}dt=$$

$$=4\int\left(t^2-\frac{9t^2}{t^3+9}\right)dt=\frac{4}{3}t^3-12\cdot\ln\left|t^3+9\right|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-12\cdot\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+9\right|+C.$$

Задача 6.31. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

Решение

Подынтегральная функция содержит степени $(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ и $(2x+1)^{\frac{2}{3}}$. Поэтому вводим замену $2x+1=t^6$. Тогда

$$x=\frac{t^6-1}{2},\ dx=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot t^5dt=3t^5,\ t=\sqrt[6]{2x+1}.$$

В итоге имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=3\int \frac{t^5dt}{t^3+t^4}=3\int \frac{t^2dt}{1+t}=3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=$$

$$=3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}-3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right)+C.$$

В следующих примерах показаны общие подходы к интегрированию функций, содержащих квадратные трехчлены:

Задача 6.32. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}=\left|\begin{matrix}x^2+6x+10=(x+3)^2+1,\\ dx=d(x+3)\end{matrix}\right|=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=$$

$$=\int \frac{du}{u^2+1}=\mathrm{arctg}\,u+C=\mathrm{arctg}(x+3)+C.$$

Задача 6.33. Найти интеграл $\int \frac{dx}{8+2x-x^2}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{8+2x-x^2}=-\int \frac{dx}{x^2-2x-8}=\left|\begin{matrix}x^2-2x-8=(x-1)^2-9,\\ dx=d(x-1)\end{matrix}\right|=-\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-9}=$$

$$=-\int \frac{du}{u^2-9}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C.$$

Задача 6.34. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+9x+18}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{3x^2+9x+18} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3x+6} = \left| \begin{array}{l} x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+6=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{15}{4}, \\ dx = d(x+\frac{3}{2}) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C = \frac{2}{3\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C.$$

Перейдем к интегралу вида $I_2 = \int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$. Тождественными преобразованиями этот интеграл можно разбить на два интеграла, причем первый интегрируется по формуле (2) основной табл. 1, а второй − есть интеграл I_1, рассмотренный в примерах 1, 2 и 3.

Задача 6.35. Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+7}$.

Решение

$$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+8x+7} = \left| \begin{array}{l} x^2+8x+7=(x+4)^2-9, \\ u=x+4,\ x=u-4,\ dx=du \end{array} \right| = \int \frac{u-4-3}{u^2-9}du = \int \frac{u-7}{u^2-9}du =$$

$$= \int \frac{u\,du}{u^2-9} - 7\int \frac{du}{u^2-9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2-9)}{u^2-9} - 7\int \frac{du}{u^2-9} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u^2-9\right| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+7\right| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C.$$

Задача 6.36. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\left|\begin{aligned}&-(x^2+2x-8)=-(x^2+2x+1-9)=\\&=9-(x+1)^2;\quad dx=d(x+1)\end{aligned}\right|=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Задача 6.37. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+30x+20}}$.

Решение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+30x+20}}=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+4}}=\left|\begin{aligned}&(x^2+6x+9-5)=(x+3)^2-5\\&dx=d(x+3)\end{aligned}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-5}}=\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+4}\right|+C.$$

Задача 6.38. Найти интеграл $\int\frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}$.

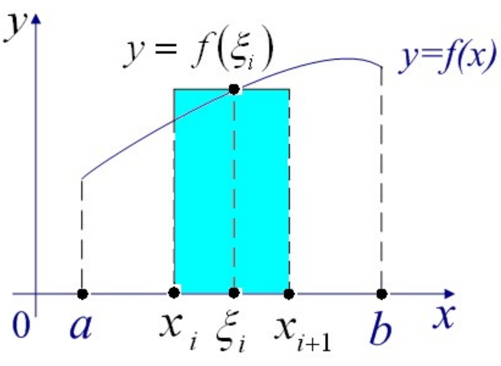
Решение

$$\int\frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}=\left|\begin{aligned}&x^2+4x-7=(x+2)^2-11,\\&d(x^2+4x-7)=(2x+4)dx,\\&2x-7=2x+4-11;\ dx=d(x+2)\end{aligned}\right|=$$

$$=\int\frac{[(2x+4)-11]dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}=\int\frac{d\left(x^2+4x-7\right)}{\sqrt{x^2+4x-7}}-11\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-11}}=$$

$$=2\sqrt{x^2+4x-7}-11\cdot\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-7}\right|+C.$$

6.3. Определенный интеграл



Пусть дана функция $y=f(x),\quad x\in[a,b]$.

Область под графиком функции $y=f(x)$ назовем *криволинейной трапецией* и поставим задачу вычислить площадь криволинейной трапеции.

Сначала задачу будем решать приближенно.

Для этого произвольным образом разобьем отрезок $[a,b]$ на n участков точками $x_0, x_1 \ldots x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b .$$

На каждом участке выберем точку ξ_i и построим прямоугольник, в котором $f(\xi_i)$ – высота, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина основания. Площадь такого прямоугольника будет равна $S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$. Тогда площадь всей криволинейной трапеции описывается приближенным равенством

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Вычислить площадь трапеции точнее можно с помощью увеличения числа участков и уменьшения длины каждого участка соответственно. Введем величину $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$, тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Определение. Сумма вида $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой.

Определение. Предел $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется ***определенным интегралом***, если он конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на участки, ни от выбора точек ξ_i в них.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Свойства определенного интеграла

Свойство 1. Если функция $f(x)$ тождественно равна единице на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = b - a$.

Свойство 2 (*об интеграле суммы*). Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций: $\int_a^b [u+v]dx = \int_a^b udx + \int_a^b vdx$, где u, v – функции независимой переменной x.

Свойство 3 (*о вынесении постоянного множителя*). Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b \lambda u dx = \lambda \int_a^b u dx \text{, где } u \text{ – функция аргумента } x\text{; } \lambda \text{ – константа.}$$

Свойство 4 (*о перестановке пределов*). Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит знак: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Свойство 5 (*о разбиении интервала интегрирования*). Если интервал интегрирования $[a,b]$ разбит на две части $[a,c]$ и $[c,b]$ произвольной точкой $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Это свойство справедливо и в том случае, когда точка c лежит вне интервала $[a,b]$, справа от него ($a < b < c$) или слева от него ($c < a < b$) (при условии, что функция $f(x)$ непрерывна в $[a,c]$ или в $[c,b]$).

Свойство 6 (*о знаке интеграла*). Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Следствие. Если $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Это следствие из свойства 6 говорит о том, что неравенство между функциями влечет неравенство того же смысла между их определенными интегралами или, иначе говоря, неравенства можно интегрировать.

Свойство 7 (*об оценке определенного интеграла*). Значение определенного интеграла заключено между произведениями наибольшего и наименьшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, $a < b$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$.

Свойство 8 (*о среднем*). Внутри интервала интегрирования $[a,b]$ существует хотя бы одно значение $x=c$, для которого $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Свойство 9 (Аналитический способ вычисления определенного интеграла, формула Ньютона-Лейбница) указывает возможность применения техник поиска первообразных для решения задач вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \text{ где } F'(x)=f(x).$$

Свойство 10 (Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах) позволяет получать точные результаты без нахождения первообразной, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, симметричном относительно точки $x=0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \text{ если } f(x) \text{ – четная функция}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \text{ если } f(x) \text{ – нечетная функция.}$$

«Основные приемы интегрирования» в определенном интеграле

1. *Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.* Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые на отрезке $[a;b]$ функции, то $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

2. *Замена переменной в определенном интеграле*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Несобственные интегралы

1. *Несобственные интегралы I рода* (с неограниченной областью интегрирования). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $\left[a;+\infty\right)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $\left[-\infty;b\right)$, то $\int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, то можно рассматривать несобственный интеграл в интервале $\left(-\infty;+\infty\right)$. По определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)dx$.

2. *Несобственные интегралы II рода* (от неограниченных функций). Если функция $f\left(x\right)$ непрерывна при $a \le x < b$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f\left(x\right) = \infty$, то $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f\left(x\right)dx$. Если функция $f\left(x\right)$ непрерывна при $a < x \le b$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right) = \infty$, то $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{c\to a+0}\int\limits_c^b f\left(x\right)dx$.

Если предел, записанный в правой части выражений, определяющих несобственные интегралы I и II рода, существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Задача 6.39. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b x^n dx.$

Решение $\int\limits_a^b x^n dx = \left.\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ $(n \ne -1).$

Задача 6.40. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{x^2+4}dx.$

Решение $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{x^2+4}dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 \dfrac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \left.\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)\right|_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) = \dfrac{\ln 1{,}6}{2}.$

Задача 6.41. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

Решение

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t;\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = 2\cos t dt;\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 4\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Задача 6.42. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^5 x}\cdot\cos x dx.$

Решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^5 x}\cdot\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x;\ u = \sin 0 = 0 \\ du = \cos x dx;\ u = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \sqrt[3]{u^5}\,du = \frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Задача 6.43. Вычислить интеграл $\int_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

Решение

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\left(\ln x\right)\Big|_1^e = \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 6.44. Вычислить интеграл $\int_1^e x\cdot\ln x dx.$

Решение

$$\int_1^e x\cdot\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2})\Bigg|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Задача 6.45. Вычислить интеграл $\int_a^\infty \dfrac{1}{1+x^2}dx$ или установить его расходимость.

Решение

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: данный интеграл сходится, и его численное значение равно $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 6.46. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ или установить его расходимость.

Решение

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{1+x}=\lim_{b\to+\infty}\ln(1+x)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln(1+b)-\ln 2)=+\infty.$$

Ответ: данный интеграл расходится.

Задача 6.47. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{-1})=+\infty.$

Ответ: интеграл расходится.

Задача 6.48. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ или установить его расходимость.

Решение $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{1-x}\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}2(\sqrt{\varepsilon}-1)=2.$

Ответ: интеграл сходится, и площадь криволинейной трапеции равна 2.

Задача 6.49. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ или установить его расходимость.

Решение

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}3\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{1+\delta}^{2}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon}-\sqrt[3]{-2}\right)+3\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\delta}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Ответ: интеграл сходится, и его численное значение равно $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$.

Приложения определенного интеграла

1. *Площадь плоской фигуры.*

А. Если фигура ограничена графиком функции $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Б. Если фигура ограничена графиками двух функций $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, то площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$.

В. Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \left| \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, x'(t) dt \right|$, где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

Г. Площадь криволинейного сектора, ограниченного графиком непрерывной функции $\rho = \rho(\varphi)$, лучами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, где φ и ρ – полярные координаты, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi$.

2. *Длина дуги кривой.*

А. Если кривая задана явно уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то длина ее дуги вычисляется по формуле $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x) \right)^2} dx$.

Б. Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то длина ее дуги вычисляется по формуле $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left[x'(t) \right]^2 + \left[y'(t) \right]^2} dt$.

В. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$,то длина ее дуги вычисляется по формуле $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$.

3. *Площадь поверхности вращения*, образованной вращением дуги кривой вокруг оси Ox, находится:

А. Для функции, заданной явно уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, по формуле $S_x=2\pi\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)\right|\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx$.

Б. Для функции, заданной параметрически как $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, по формуле $S_x=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|y(t)\right|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$.

В. Для функции, заданной в полярных координатах как $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, по формуле $S_x=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$.

4. *Объем тела*

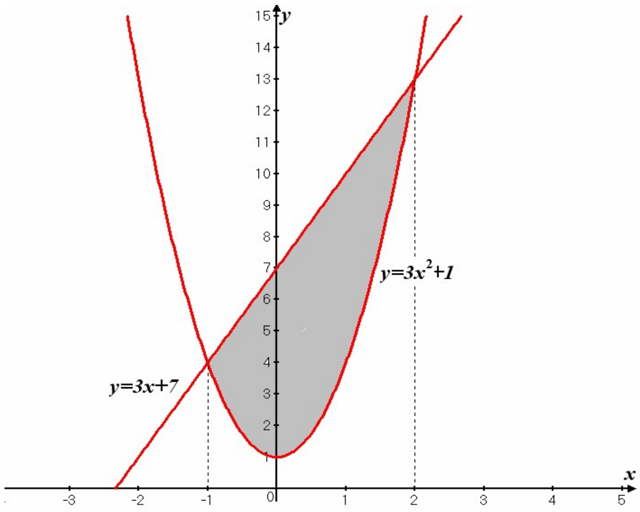
А. Если тело заключено между плоскостями $x=a$ и $x=b$, а площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox – известная функция $S=S(x)\ge 0$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, то его объем вычисляется по формуле $V=\int\limits_{a}^{b}S(x)\,dx$.

Б. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)\ge 0$, $a\le x\le b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вычисляется по формуле $V_x=\pi\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)\right]^2dx$.

В. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x=g(y)\ge 0$, $c\le y\le d$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вычисляется по формуле $V_y=\pi\int\limits_{c}^{d}\left[g(y)\right]^2dy$.

Задача 6.50. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + 1$; $y = 3x + 7$. Построить чертеж.

Решение



Найдем точки пересечения параболы и прямой. Приравняем правые части уравнений, задающих функции, и решим полученное уравнение

$$3x^2 + 1 = 3x + 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0;\quad x_1 = -1;\quad x_2 = 2.$$

Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рисунке.

Используя приведенную формулу, получим

$$S = \int_{-1}^{2} (3x + 7 - 3x^2 - 1)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (3x + 6 - 3x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 6x - x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} = (6 + 12 - 8) - \left(\frac{3}{2} - 6 + 1\right) = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: площадь фигуры равна 13,5 кв. ед.

Задача 6.51. Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = 3 + \sin\varphi$.

Решение

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + \sin\varphi)^2 d\varphi = (9\varphi - 6\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 9\pi + \frac{1}{2}\pi = 9,5\pi.$$

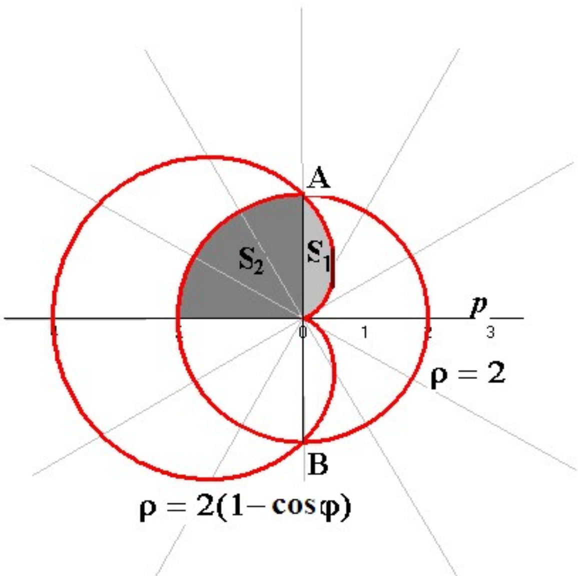
Ответ: площадь данной фигуры $9,5\pi$ кв. ед.

Задача 6.52. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$; $\rho = 2$.

Решение

Фигура, площадь которой требуется найти, показана на рисунке.

Найдем точки пересечения окружности и кардиоиды. Решая



совместно данные уравнения, получим точки $A\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{2}\right)$.

По рисунку видно, что фигура симметрична. Вычислим площадь половины фигуры, учитывая, что она в свою очередь разделена на части S_1 и S_2 (см. рисунок).

$$\frac{1}{2}S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2(1-\cos\varphi))^2d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2)^2d\varphi=\frac{1}{2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=2(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2(\frac{3\pi}{4}-2)+2(\pi-\frac{\pi}{2})=\left(\frac{5}{2}\pi-4\right).$$

Ответ: площадь фигуры $S=5\pi-8$.

Задача 6.53. Найти длину кривой $y=\ln(2x)$, где $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

Решение

$$f'(x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x};\ 1+[f'(x)]^2=1+\frac{1}{x^2}=\frac{1+x^2}{x^2};$$

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{1+x^2};\ \ x=\sqrt{t^2-1};\ \ dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} \\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2;\ \ x=\sqrt{8}\Rightarrow t=3 \end{array}\right|=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=$$

$$=\int_2^3(1+\frac{1}{t^2-1})dt=(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|)\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Ответ: длина дуги $L=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$ ед.

Задача 6.54. Найти длину кривой $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ (первая арка циклоиды).

Решение

$$x'_t=a(1-\cos t);\ y'_t=a\sin t;\ \left[x'_t\right]^2+\left[y'_t\right]^2=a^2(1-2\cos t+\cos^2t+\sin^2t)=2a^2(1-\cos t).$$

Тогда

$$L=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

Ответ: длина дуги $L=8a$ ед.

Задача 6.55. Найти длину кривой $\rho=a(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$ (кардиоида).

Решение

Данная кривая симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды.

$$\frac{1}{2}L=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2(\sin\varphi)^2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot2\cdot\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=$$

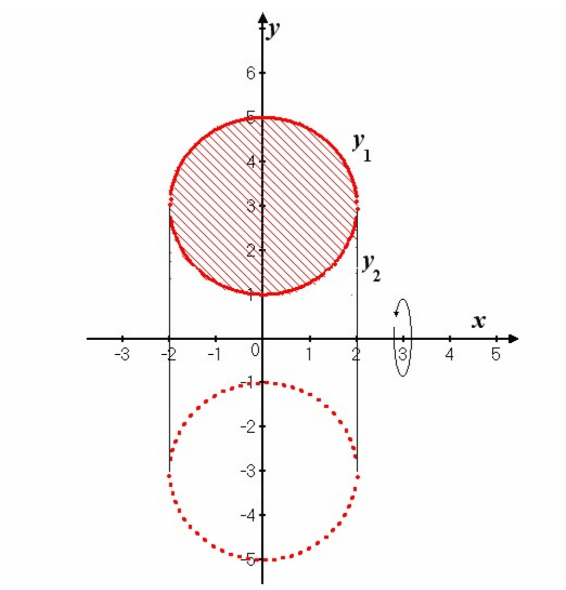
$$=4a(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right))\Big|_0^{\pi}=4a(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0)=4a.$$

Ответ: длина кардиоиды равна $L=8a$ ед.

Задача 6.56. Найти объем тела (тора), полученного при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линией $x^2+(y-3)^2=4$.

Решение

Плоская фигура ограничена сверху кривой $y_1=3+\sqrt{4-x^2}$, снизу — кривой $y_2=3-\sqrt{4-x^2}$. Тогда



$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}(y_1(x))^2dx-\pi\int_{x_1}^{x_2}(y_2(x))^2dx=$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}[(3+\sqrt{4-x^2})^2-(3-\sqrt{4-x^2})^2]dx=$$

$$=12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=2\sin t;\ x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}\\ dx=2\cos t\,dt;\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot2\cos t\,dt=48\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=24\pi^2.$$

Ответ: объем тора равен $24\pi^2$ куб. ед.

Задача 6.58. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линией $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипсоид вращения).

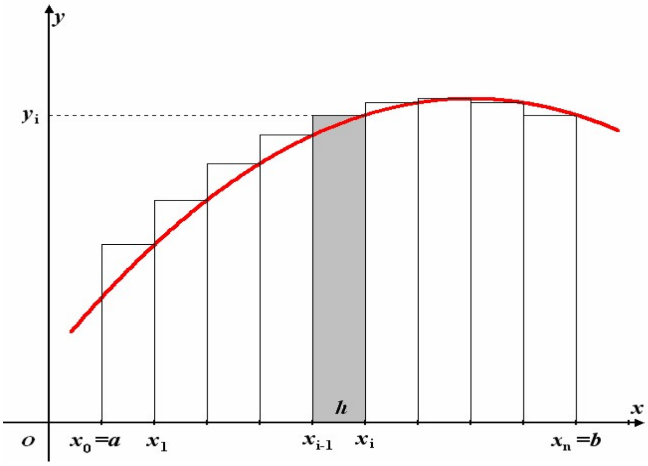
Решение

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_{-b}^{b}a^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy=2\pi a^2(y-\frac{y^3}{3b^2})\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

Ответ объем эллипсоида равен $\frac{4}{3}\pi a^2b$ куб. ед.

Приближенное вычисление определенного интеграла

В основе приближенного вычисления определенного интеграла лежит построение интегральной суммы и тот факт, что данная сумма приближенно равна интегралу, и тем точнее, чем больше *n*. Рассмотрим простейший из численных методов − ***метод прямоугольников***.

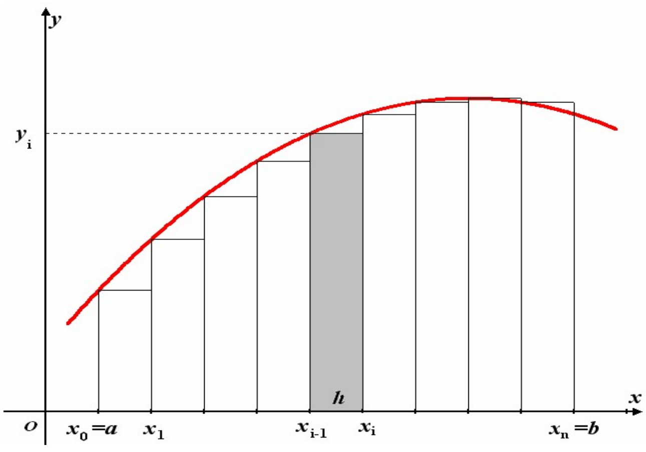


Разобьем интервал интегрирования $[a,b]$ на n ***равных*** интервалов точками $a=x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n=b$, так, что $x_i-x_{i-1}=h=\frac{b-a}{n}$; $(i=1,2,....,n)$ и найдем значения подынтегральной функции в точках разбиения:

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),...,y_n=f(x_n).$$

Построим ступенчатую фигуру, выбирая точки x_i на правых концах интервалов разбиения.

Площадь ступенчатой фигуры и, следовательно, приближенное значение определенного интеграла, равно $I_1\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+...+y_n)$.



Построим ступенчатую фигуру другим способом. Выбирая точки на левых концах интервалов, найдем площадь фигуры по формуле

$$I_2\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+...+y_{n-1}).$$

За приближенное значение определенного интеграла обычно принимают значение $I\approx\frac{I_1+I_2}{2}$.

Задача 6.59. Найти точное значение интеграла $\int_1^2 \sqrt{x^3}\,dx$ по формуле Ньютона-Лейбница. По формулам прямоугольников найти его приближенное значение. Вычислить абсолютную и относительную погрешность приближенного значения. В расчетах использовать разбиение отрезка интегрирования на 10 равных частей. Промежуточные вычисления вести, сохраняя три знака после запятой.

Решение

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Получим

$$\int_1^2 \sqrt{x^3}\,dx = \frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1) = 1{,}862\,.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения. Результаты запишем в таблицу.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$f(x)$	1	1,154	1,315	1,482	1,657	1,837	2,024	2,217	2,415	2.619	2,828

По первой формуле прямоугольников получим $I_1 = 0{,}1 \cdot \sum_{k=1}^{10} y_k = 1{,}954$.

Вторая формула дает $I_2 = 0{,}1 \cdot \sum_{k=0}^{9} y_k = 1{,}772$.

За приближенное значение интеграла можно взять $\frac{I_1 + I_2}{2} = 1{,}863$.

Найдем абсолютную погрешность вычисления $\Delta = |1{,}863 - 1{,}862| = 0{,}001$.

Относительная погрешность равна $\delta = \frac{\Delta}{I} \cdot 100\% = \frac{0{,}001}{1{,}863} 100\% = 0{,}054\%$.