7. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Правило f, которое каждой паре чисел $(x, y) \in D$ ставит в соответствие одно и только одно действительное число $z \in R$, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D и записывается в виде

$$z = f(x, y).$$

При этом переменные x, y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z – *зависимой* переменной (*функцией*).

Множество всех пар $(x, y) \in D$, для которых существует значение z, называется *областью определения функции* и обозначается $D = D(f)$. Множество значений, принимаемых функцией $z = f(x, y)$ в области определения, называется *множеством значений* этой функции и обозначается $E = E(f)$.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами x, y: $S = S(x, y)$.

Функция двух переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0, y_0) \in D$ в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ – аппликата точки M. Совокупность всех таких точек пространства представляет собой некоторую поверхность, которая геометрически изображает данную функцию $z = f(x, y)$, то есть является ее *графиком*.

Частные производные первого порядка

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Так как x, y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое постоянное значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y постоянным. Тогда переменная z получит приращение, которое называется *частным приращением z* по x и обозначается $\Delta_x z$: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Аналогично получаем *частное приращение z по y* $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Полное приращение Δz определяется равенством $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)$.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x,y\right)}{\Delta x} = z'_x$, то он называется *частной производной* функции $z = f\left(x,y\right)$ *в точке* $M\left(x,y\right)$ *по переменной* x и обозначается одним из следующих символов: $z'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x};\ f'_x,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная по другой независимой переменной: $z'_y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y};\ f'_y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f\left(x,y\right)$ находят по формулам и правилам дифференцирования функции одной переменной (при этом другая переменная считается постоянной).

Частные производные второго порядка есть частные производные от частных производных первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Они определяются и обозначаются следующим образом: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Частная производная второго порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Если частные производные второго порядка непрерывны, то смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой (теорема Шварца), то есть $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференциал функции $z = f(x,y)$ первого порядка является суммой частных дифференциалов $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Дифференциал функции $z = f(x,y)$ второго порядка – $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Частные производные сложной функции $z = f(u,v)$, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ могут быть выражены через элементарные частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$, полная производная функции $z = f(x,y)$, где $y = y(x)$ $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ и полная производная функции $z = f(x,y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

При решении задачи вводится функция двух переменных $z = f(x,y)$. В качестве значений x, y берутся исходные данные задачи, а за значения x_0, y_0 выбираются значения, близкие к целым. Тогда приращения $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ достаточно малы и имеет место приближенная формула

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Производная функции $y = f(x)$, заданной неявно в виде $F(x,y) = 0$, может быть найдена по формуле $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Частные производные функции $z = f(x,y)$, заданной неявно в виде $F(x,y,z) = 0$, могут быть найдены по формулам: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

Экстремум функции $z = f(x,y)$.

1. Необходимое условие экстремума функции в точке. Если функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю или не существуют

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0; \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

2. Достаточное условие экстремума функции в точке. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$ и можно вычислить коэффициенты $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Составим определитель вида $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Тогда функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

а) имеет максимум, если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

б) имеет минимум, если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

в) не имеет экстремума, если $\Delta < 0$;

г) если $\Delta = 0$, то необходимо дополнительное исследование.

Поверхность в пространстве

Если уравнением $F(x, y, z) = 0$ задана поверхность в пространстве и дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой поверхности, то:

1. Вектор нормали $\vec{n}$ к этой поверхности имеет координаты

$$\vec{n} = \left\{ \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \right\}.$$

2. Касательная плоскость определяется уравнением

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} (z - z_0) = 0.$$

3. Канонические уравнения нормали к поверхности имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Если поверхность задана явно, т. е. уравнением $z = f(x, y)$ и дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой поверхности, то:

1. Вектор нормали $\vec{n}$ к этой поверхности имеет координаты

$$\vec{n} = \left\{ -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, -\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}, 1 \right\}.$$

2. Касательная плоскость определяется уравнением

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0).$$

3. Канонические уравнения нормали к поверхности имеют вид

$$\frac{x - x_0}{-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Градиентом $grad\, z$ функции $z = f(x; y)$ называется вектор с координатами $z'_x;\ z'_y$, т.е. $grad\, z = \{z'_x;\ z'_y\}$.

Легко видеть, что производная по направлению z'_l равна скалярному произведению градиента функции z и единичного вектора, задающего направление вдоль некоторой прямой l, т.е. $\frac{\partial z}{\partial l} = grad\, z \cdot \vec{e} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$.

Градиент функции $z = f(x; y)$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Задача 7.1. Найдите область определения функции двух переменных $z(x; y) = \sqrt{4 + y - x^2} + \ln(x^2 - 1)$. Изобразите ее на чертеже.

Решение

Областью определения функции является множество точек плоскости Оху, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 + y - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x^2 - 4, \\ x^2 > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое неравенство. Ему будет соответствовать уравнение $y = x^2 - 4$, которое определяет параболу с вершиной в точке $(0; -4)$, ветви ее направлены вверх. Парабола делит координатную плоскость на две части: внешнюю и внутреннюю. Для одной из них $y > x^2 - 4$, для другой $y < x^2 - 4$ (на самой параболе $y = x^2 - 4$). Чтобы установить, какая из этих частей состоит из точек, для которых $y \geq x^2 - 4$, достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки. Возьмем, например, точку $A(0; 1)$. Подставив ее координаты в неравенство (1.1.), получим верное числовое неравенство $1 \geq 0 - 4$. Значит эта точка и подобные ей (т.е. внутренние, лежащие между ветвями параболы или на ней) дают геометрическое изображение области, определяемой неравенством (1.1).

Рассмотрим второе неравенство $x^2 > 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств $x < -1$ или $x > 1$.

Они определяют части плоскости, лежащие левее прямой $x = -1$ или правее прямой $x = 1$. Причем точки самих прямых в область определения не входят. В таком случае будем изображать соответствующие линии пунктиром.

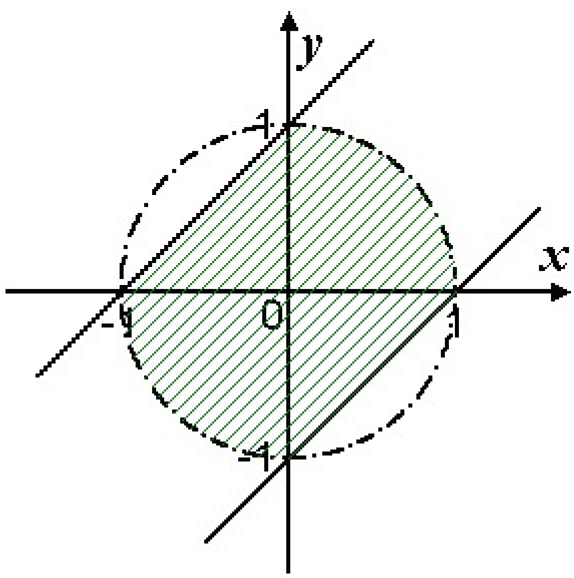
Областью определения функции будет множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе (1.1), (1.2). Это будет параболическая зона, из которой удалены точки лежащие между прямыми и на прямых $x = -1$, $x = 1$. Точки параболы принадлежат области. На рисунке область определения заштрихована.

Задача 7.2. Найдите область определения функции двух переменных $z(x; y) = \arcsin(y - x) + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Изобразите ее на чертеже.

Решение

Областью определения этой функции является множество точек плоскости *Oxy*, значения координат которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} -1 \le y - x \le 1, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} x - 1 \le y \le x + 1, & (1.3) \\ x^2 + y^2 < 1. & (1.4) \end{cases}$

Решения двойного неравенства (1.3) изображаются на координатной плоскости точками, лежащими на прямых $y = x + 1$; $y = x - 1$ и между ними. Решения неравенства (1.4) – точки внутренней части круга, с центром в начале координат и радиуса 1. Таким образом, область определения данной функции − множество точек полосы, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$. Границы полосы − прямые $y = x - 1$ и $y = x + 1$. На чертеже область определения заштрихована.



Задача 7.3. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z(x;y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

Решение

Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z(x;y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$:

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x+2\sqrt{xy}}.$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{xy}+2y}.$$

Задача 7.4. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)$.

Решение

Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)$.

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(y+x)^2}{x^2}}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-x^2y}{\left(x^2+y^2+2yx+x^2\right)x^2}=\frac{-y}{2x^2+2yx+y^2}.$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}+1\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2x^2+2yx+y^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{x}{2x^2+2yx+y^2}.$$

Задача 7.5. Найдите частные производные функции $z=f(x;y)$, заданной неявно уравнением $\sin z-z^2+2xy+y^2=0.$

Решение

Находим частные производные от выражения в левой части равенства и комбинируем из них ответ (с учетом необходимости изменения знака, предполагаемой соответствующей формулой). Получим

$$F'_x(x;y;z)=2y,\ F'_y(x;y;z)=2x+2y,\ F'_z(x;y;z)=\cos z-2z\ ,$$

$$z'_x = \frac{2y}{2z - \cos z}, \quad z'_y = \frac{2x + 2y}{2z - \cos z}.$$

Задача 7.6. Найдите частные производные функции $z = f(x, y)$, если она задана неявно уравнением $\frac{x + \ln z}{y} + e^{2x+z} - xy^2 = 0$.

Решение

Находим частные производные от выражения в левой части равенства и комбинируем из них ответ (с учетом необходимости изменения знака, предполагаемой соответствующей формулой). Получим

$$F'_x(x, y, z) = \frac{1}{y} + 2e^{2x+z} - y^2,\ F'_y(x, y, z) = -\frac{(x + \ln z)}{y^2} - 2xy,\ F'_z(x, y, z) = \frac{1}{yz} + e^{2x+z},$$

$$z'_x = \frac{\frac{1}{y} + 2e^{2x+z} - y^2}{\frac{1}{yz} + e^{2x+z}}, \quad z'_y = \frac{-\frac{(x + \ln z)}{y^2} - 2xy}{\frac{1}{yz} + e^{2x+z}}.$$

Задача 7.7. Найдите полный дифференциал dz функции двух переменных $z(x; y) = \frac{x \arcsin y}{y}$.

Решение

Полный дифференциал dz функции $z(x; y) = \frac{x \arcsin y}{y}$ равен:

$$dz = d\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right)dy =$$

$$= \frac{\arcsin y}{y} \cdot 1 \cdot dx + x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot y - \arcsin y \cdot 1}{y^2} dy =$$

$$= \frac{\arcsin y}{y} dx + \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} - \arcsin y\right) dy.$$

Задача 7.8. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2 - 1$ в точке $M_0(1; -2; 4)$.

Решение

Найдем значения частных производных z'_x и z'_y данной функции в точке $(1; -2)$: $z'_x = 2x, \quad z'_x(1; -2) = 2,\ z'_y = 2y, \quad z'_y(1; -2) = -4.$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z(x;y)=x^2+y^2-1$, в точке M_0 будет

$$z-4=2(x-1)-4(y+2) \text{ или}$$
$$2x-4y-z-6=0.$$

Получим канонические уравнения нормали: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-4}{-1}$.

Задача 7.9. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2-z^2=-1$ в точке $M_0(2;2;3)$.

Решение

Чтобы записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, определяемой заданной функцией, найдем значения частных производных от этой функции в точке M_0:

$F'_x=2x$, $F'_x(M_0)=2\cdot 2=4$;

$F'_y=2y$, $F'_y(M_0)=2\cdot 2=4$;

$F'_z=-2z$, $F'_z(M_0)=-2\cdot 3=-6$.

Запишем уравнение касательной плоскости $4(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0$ или после преобразований $2x+2y-3z+1=0$.

Канонические уравнения нормали будут иметь вид $\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.

Задача 7.10. Вычислите производную функции $z(x;y)=5x^4-3x-y-1$ в точке $M_0(2;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(5;5)$.

Решение

Нахождение производной $z'_l(x_0;y_0)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ согласно формуле $z'_l(x;y)=z'_x\cdot\cos\alpha+z'_y\cdot\cos\beta$ связано с определением частных производных z'_x, z'_y и направляющих косинусов cosα, cosβ.

Вычислим частные производные z'_x и z'_y в точке $M_0(2;1)$:

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^4-3x-y-1\right)=20x^3-3, \quad z'_x(2;1)=20\cdot 2^3-3=157,$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4-3x-y-1\right)=-1, \quad z'_y(2;1)=-1.$$

Направляющие косинусы cosα и cosβ можно найти, если использовать приведенные выше формулы. $\overrightarrow{M_0M_1} = \{5-2; 5-1\} = \{3; 4\}$,

$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$.

Значение производной функции z по направлению $\overrightarrow{M_0M_1}$ в точке $M_0(2;1)$ равно:

$$z'_l(2;1) = z'_x(2;1)\cdot\cos\alpha + z'_y(2;1)\cdot\cos\beta = 157\cdot\frac{3}{5} + (-1)\cdot\frac{4}{5} = 93,4.$$

Так как $z'_l(2;1)$ в точке $M_0(2;1)$ положительна, то можно сделать вывод, что функция $z(x;y)$ возрастает в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Задача 7.11. Найдите градиент $grad\, z$ функции $z = x\cdot\ln(x+y)$ и его модуль в точке $M_0(-1;2)$.

Решение

Координаты вектора $grad\, z$ можно найти, если вычислить значения частных производных z'_x и z'_y в точке $M_0(-1;2)$:

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\ln\left(x+y\right)\right) = 1\cdot\ln(x+y) + x\cdot(\ln(x+y))'_x = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y},$$

$$z'_x(-1;2) = \ln 1 - 1 = -1,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot\ln(x+y)\right) = x\cdot(\ln(x+y))'_y = \frac{x}{x+y},$$

$$z'_y(-1;2) = -1.$$

Тогда $grad\, z = \{-1;-1\}$.

Модуль градиента функции $\left|grad\, z\right|$ в точке $M_0(-1;2)$ – это длина этого вектора:

$$\left|grad\, z\right| = \sqrt{\left(z'_x(-1;2)\right)^2 + \left(z'_y(-1;2)\right)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Задача 7.12. Найдите частные производные второго порядка от функции $z(x,y) = x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y$.

Решение

Первоначально находим частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y\right) = 4x^3y^2 + 2xy - 3y,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y^2 + x^2y - 3xy - 2y\right) = 2x^4y + x^2 - 3x - 2.$$

Последовательно находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3y^2 + 2xy - 3y\right) = 12x^2y^2 + 2y,$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y^2 + 2xy - 3y\right) = 8x^3y + 2x - 3,$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4y + x^2 - 3x - 2\right) = 8x^3y + 2x - 3,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4y + x^2 - 3x - 2\right) = 2x^4.$$

Задача 7.13. Исследовать на экстремум функцию $z(x;y) = xy(1-x-y)$.

Решение

1. Находим *стационарные точки*.

Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x;y)$.

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy(1-x-y)\right) = y(1-x-y) + xy(-1) = y - 2xy - y^2.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy(1-x-y)\right) = x(1-x-y) + xy(-1) = x - x^2 - 2xy.$$

Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0; \\ x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-2x-y) = 0; \\ x(1-x-2y) = 0. \end{cases}$$

Эта система распадается на совокупность систем

$$1)\begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x = 1; \\ y = 0. \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x = 0; \\ y = 1. \end{cases} \quad 4)\begin{cases} 1-2x-y = 0; \\ 1-x-2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3; \\ y = 1/3. \end{cases}$$

В итоге получаем такой набор стационарных точек: $M_1(0;\,0)$, $M_2(1;\,0)$, $M_3(0;\,1)$ и $M_4(1/3;\,1/3)$.

2. *Проверим выполнение достаточного условия экстремума* для каждой из них.

Найдем частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} исследуемой функции $z=f(x;y)$.

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - 2xy - y^2\right) = -2y.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - x^2 - 2xy\right) = -2x.$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - x^2 - 2xy\right) = 1 - 2x - 2y.$$

Определим значения частных производных z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} исследуемой функции $z=f(x;\, y)$ в стационарных точках (0; 0), (1; 0), (0; 1) и (1/3; 1/3).

$$z''_{xx}(0;0) = 0; \quad z''_{xx}(1;0) = 0; \quad z''_{xx}(0;1) = -2; \quad z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$z''_{yy}(0;0) = 0; \quad z''_{yy}(1;0) = -2; \quad z''_{yy}(0;1) = 0; \quad z''_{yy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$z''_{xy}(0;0) = 1; \quad z''_{xy}(1;0) = -1; \quad z''_{xy}(0;1) = -1; \quad z''_{xy}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

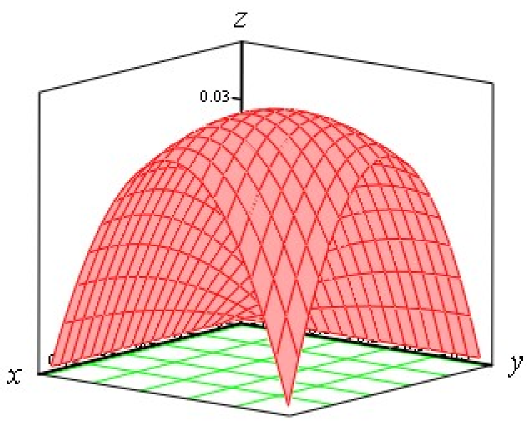
Вычислим определитель Δ в каждой из этих точек.

$\Delta(0;0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$, следовательно, в стационарной точке M_1(0; 0) экстремума нет.

$\Delta(1;0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$, следовательно, в стационарной точке M_2 (1; 0) экстремума нет.

$\Delta(0;1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$, следовательно, в стационарной точке M_3 (0; 1) экстремума нет.

$\Delta\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$, следовательно, в стационарной точке $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ экстремум есть. Так как $z''_{xx}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} < 0$, то точка $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – точка максимума.



Значение функции в точке максимума $z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$.

График исследуемой функции $z(x;y)=xy(1-x-y)$ представлен на рисунке.

Задача 7.14. Исследовать на экстремум функцию $z=3x+6y+x^2-xy+y^2$.

Решение

1. Находим стационарные точки.

Найдем частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x;y)$.

$$z'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x+6y+x^2-xy+y^2\right)=3+2x-y.$$

$$z'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x+6y+x^2-xy+y^2\right)=6-x+2y.$$

Для определения стационарных точек решим систему уравнений $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3+2x-y=0, \\ 6-x+2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6+4x-2y=0, \\ 6-x+2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+3x=0, \\ y=3+2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=-5. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка имеет координаты (–4;–5).

2. Проверим выполнение достаточного условия экстремума.

Найдем частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} функции $z=f(x;y)$.

$$z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z'_x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3+2x-y\right)=2. \qquad z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(6-x+2y\right)=2.$$

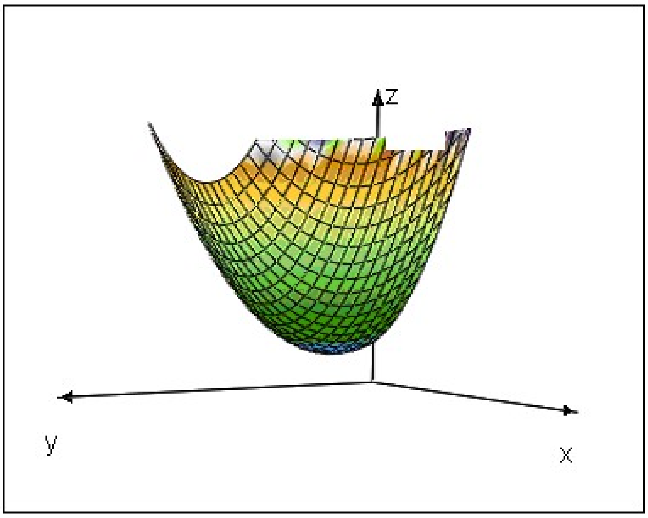
$$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z'_y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(6-x+2y\right)=-1.$$

Частные производные z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} имеют постоянные значения в любой точке плоскости Oxy.

Вычислим значение определителя Δ в точке (-4;-5).

$$\Delta(-4;-5)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3>0,$$

следовательно, в стационарной точке



(–4; –5) экстремум есть и, так как $z''_{xx}(-4;-5)=2>0$, то точка $(-4;-5)$ – это точка минимума. Найдем минимальное значение функции $z(-4;-5)=-21$.

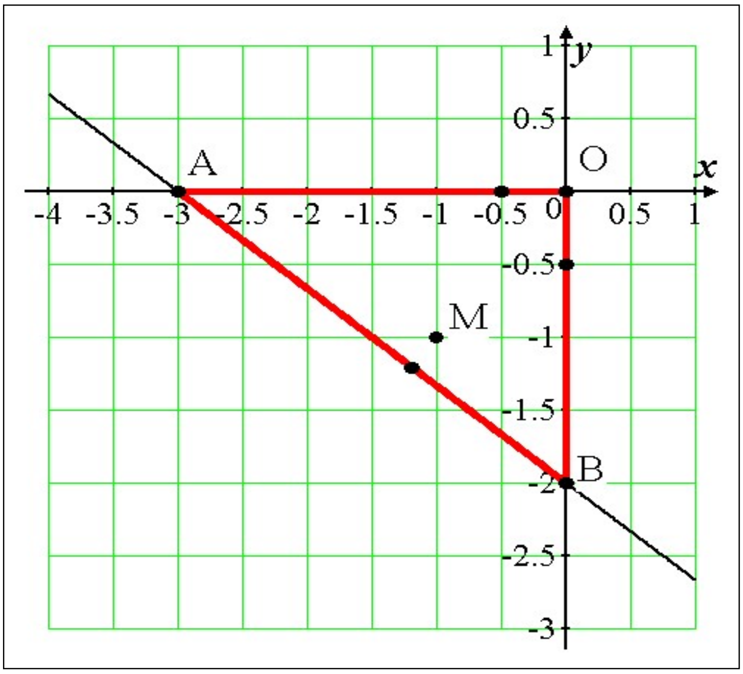
График исследуемой функции $z(x,y)=3x+6y+x^2-xy+y^2$ представлен на рисунке.

Задача 7.15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z(x;y)=x^2+y^2-xy+x+y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} x\le 0, \\ y\le 0, \\ 2x+3y+6\ge 0. \end{cases}$$

Решение

1. Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} z'_x=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-xy+x+y\right)=2x-y+1=0; \\ z'_y=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2-xy+x+y\right)=2y-x+1=0. \end{cases}$$



Система имеет единственное решение (-1;-1). Стационарная точка *M*(-1;-1) лежит внутри области (область *D* изображена на Рис.11.1). Найдем значение функции в ней: $z_1=f(-1;-1)=-1$.

2. Исследуем поведение функции на границе области. Для этого разобьем границу на три отрезка *AO, OB, AB*. На отрезке *AO* имеем: $y=0,\ -3\le x\le 0,\ z=x^2+x$. Найдем значения функции на концах отрезка $[-3;0]$ в точках $A(-3;0)$ и $O(0;0)$. Получим $z_2=f(-3;0)=6,\ z_3=f(0;0)=0$. Теперь попробуем найти стационарную точку на этом отрезке. Для этого найдем производную $z_x'=2x+1$ и приравняем ее к нулю, получим $x=-\dfrac{1}{2}$.

Точка $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ лежит внутри отрезка AO. Значение функции в этой точке будет $z_4 = f\left(-\frac{1}{2};0\right) = -\frac{1}{4}$. Перейдем к отрезку OB.

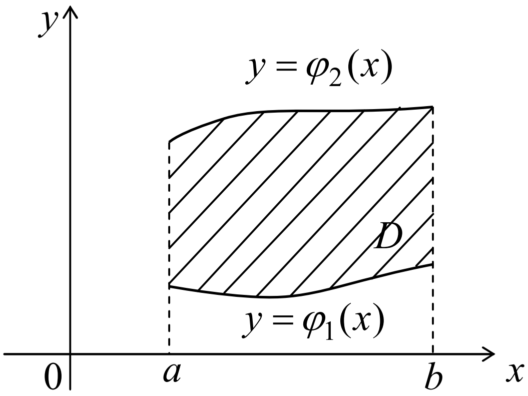
Здесь $x = 0,\ -2 \le y \le 0,\ z = y^2 + y$. Вычислим значение функции в точке $B(0;-2)$. Получим $z_5 = f(0;-2) = 2$. При $y = 0$ значение функции вычислено ранее.

Попробуем найти стационарную точку функции $z = y^2 + y$, лежащую внутри отрезка OB. Для этого найдем $z'_y = 2y + 1$ и приравняем ее к нулю, получим $y = -\frac{1}{2}$. Точка $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ лежит внутри отрезка OB. Значение функции в ней $z_6 = f\left(0;-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Рассмотрим поведение функции z на отрезке AB. Значение функции на концах отрезка (в точках A и B) вычислены ранее. Найдем стационарную точку, лежащую внутри этого отрезка. Для этого из уравнения прямой AB $2x + 3y + 6 = 0$ выразим y: $y = -\frac{2}{3}x - 2$. Подставим найденное выражение $y(x)$ в функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$. Получим $z = \frac{19}{9}x^2 + 5x + 2$ и найдем стационарную точку этой функции при условии, что $-3 \le x \le 0$. Имеем: $z'_x = \frac{38}{9}x + 5 = 0$, $x = -\frac{45}{38}$. Таким образом, стационарная точка, лежащая внутри отрезка AB, имеет координаты $\left(-\frac{45}{38};-\frac{46}{38}\right)$. Значение функции в ней $z_7 = f\left(-\frac{45}{38};-\frac{46}{38}\right) = -\frac{73}{76}$.

Сравнивая все найденные значения функции $z_1, z_2, ... z_7$, делаем вывод, что в заданной области функция z принимает наименьшее значение (-1) в точке $M(-1;-1)$. Наибольшее значение, равное 6, функция принимает в точке $A(-3;0)$.

Кратные интегралы



Если область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$ и линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, то такая область называется правильной в направлении оси Oy: луч, запущенный параллельно оси Oy и сонаправленный с ней, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Эта формула представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берется внутренний интеграл при постоянном x, затем берется внешний интеграл, то есть результат внутреннего интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y=c$, $y=d$ и линиями $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, причем функции $\psi_1(y),\psi_2(y)$ непрерывны и таковы, что $\psi_1(x)\le\psi_2(x)$ на отрезке $[c;d]$, то такая область называется правильной в направлении оси Ox: луч, запущенный параллельно оси Ox и сонаправленный с ней, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Эта формула также представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$ называется *внутренним* интегралом.

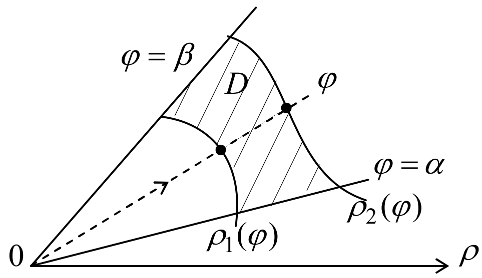
Для вычисления двукратного интеграла сначала берется внутренний интеграл при постоянном y, затем берется внешний интеграл, то есть результат внутреннего интегрирования интегрируем по y в пределах от c до d.

Замечания. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно считать по любой из формул.

Если область D не является правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy, то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy. Полезно помнить, что внешние пределы интегрирования в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Двойной интеграл в полярных координатах

Известна формула перехода от декартовых координат точки плоскости к полярным при вычислении двойного интеграла:



$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Если область D ограничена линиями $\begin{cases} \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi), \\ \alpha \le \varphi \le \beta, \end{cases}$ то

$$\iint\limits_{D} f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho.$$

Приложения двойного интеграла

1. Площадь плоской фигуры может быть вычислена в декартовой системе координат по формуле $S = \iint\limits_{D} dxdy$

или в полярной системе координат по формуле $S=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi$.

2. Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)\geq 0$ и построенного на основании D в плоскости Oxy, равен $V=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$.

3. Масса неоднородной пластинки D с переменной поверхностной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ равна: $m=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy$.

4. Статические моменты пластинки D относительно координатных осей могут быть вычислены по формулам:

$$S_x=\iint\limits_{D}y\cdot\gamma(x,y)dxdy,\qquad S_y=\iint\limits_{D}x\cdot\gamma(x,y)dxdy.$$

5. Координаты центра тяжести пластинки D могут быть найдены по формулам:

$$x_0=\frac{S_y}{m}=\frac{\iint\limits_{D}x\cdot\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy},\qquad y_0=\frac{S_x}{m}=\frac{\iint\limits_{D}y\cdot\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy}.$$

6. Моменты инерции пластинки D относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x=\iint\limits_{D}y^2\cdot\gamma(x,y)dxdy,\qquad I_y=\iint\limits_{D}x^2\cdot\gamma(x,y)dxdy.$$

7. Момент инерции пластинки D относительно начала координат равен $I_0=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\cdot\gamma(x,y)dxdy$.

Задача 7.16. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}xydxdy$, если область D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2$;

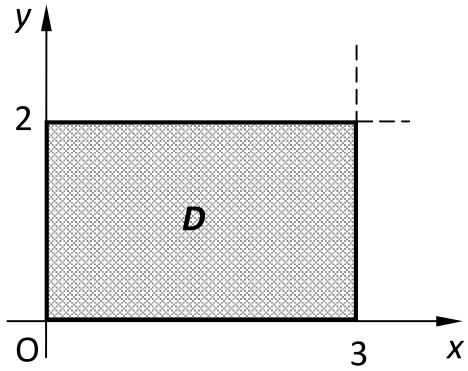


Рис. 7

Решение

Построим область интегрирования – прямоугольник. Границы области D определяются системой

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 2\,. \end{cases}$$

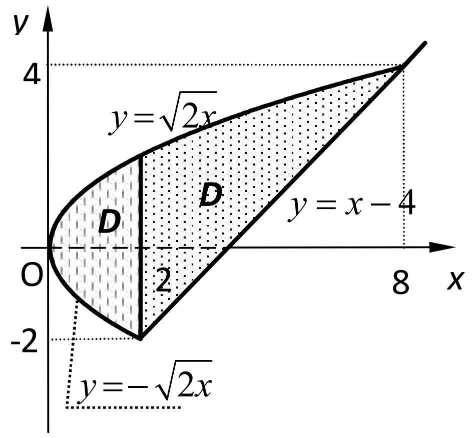
Составим выражение для вычисления двукратного интеграла

$$\iint_D xydxdy = \int_0^3 dx \int_0^2 xydy = \int_0^3 xdx \int_0^2 ydy\ .$$

Проведем интегрирование, для этого вычислим внутренний интеграл, а затем найденное решение подставим во внешний интеграл

$$\int_0^2 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = 2 \to \int_0^3 xdx \int_0^2 ydy = \int_0^3 x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2\right)dx = 2\int_0^3 xdx = 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = 9\ .$$

Задача 7.17. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xydxdy$ (выражение совпадает с предыдущим), а область D ограничена прямой $y = x - 4$ и параболой $y^2 = 2x$.



Решение

Область интегрирования показана на рисунке. Выберем порядок интегрирования: сначала по переменной *y*, а затем по переменной *x*. Тогда внешние постоянные пределы интегрирования будут расположены на оси О*x*.

В этом случае область интегрирования необходимо разбить на две части D_1 и D_2 прямой, параллельной оси О*y*, так как линия нижней границы состоит из двух частей: кривой $y = -\sqrt{2x}$ и прямой $y = x - 4$.

Найдем абсциссы точек пересечения, приравняв выражения линий

$2x = (x-4)^2 \to x_1 = 2; \quad x_2 = 8\,.$

Тогда область интегрирования

$$D = D_1 + D_2\text{, где}$$

$$D_1:\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}\ , \end{cases} \quad D_2:\begin{cases} 2 \le x \le 8, \\ x-4 \le y \le \sqrt{2x}\ . \end{cases}$$

Двойной интеграл в этом случае выражается двумя двукратными интегралами:

$$\iint_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \int_2^8 xdx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy = 90\,.$$

Заметим, что внешние постоянные пределы интегрирования можно выбрать на оси Оy. В этом случае интегрировать придется в другом порядке – сначала по переменной x, а затем по переменной y. Такой выбор постоянных пределов интегрирования является более удобным, поскольку разбивать область интегрирования не нужно (рис. 9). Найдем ординаты точек пересечения

$$\frac{1}{2}y^2 = y + 4 \to y_1 = -2, \quad y_2 = 4.$$

Тогда границы области D определяются системой

$$D:\begin{cases} -2 \le y \le 4, \\ \frac{1}{2}y^2 \le x \le y + 4. \end{cases}$$

В этом случае двойной интеграл по области интегрирования D выражается одним двукратным интегралом

$$\iint_D xydxdy = \int_{-2}^{4} ydy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx.$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} = \frac{1}{2}[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}],$$

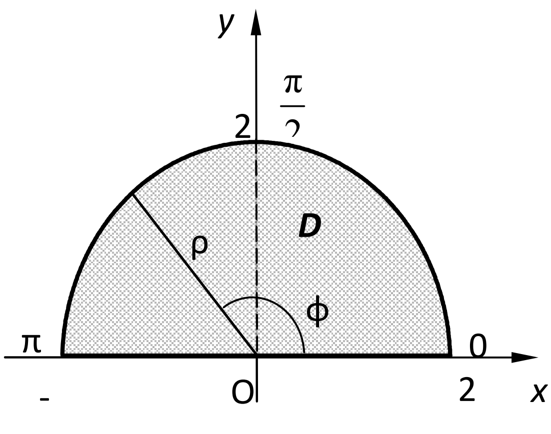
раскрыв скобки, подставим полученное выражение во внешний интеграл. Последовательное вычисление двукратных интегралов приводит к тому же результату

$$\iint_D xydxdy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}]dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

Задача 7.18. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xydxdy$ (выражение совпадает с предыдущими), а область D – верхняя часть круга $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение

Построим чертеж области D. Найдем уравнение границы области. Для этого заменим в выражении $x^2 + y^2 \le 4$ знак неравенства на «равно», получим уравнение



окружности (верхней границы области D) $x^2+y^2=4$.

Поскольку область интегрирования ограничена окружностью, то удобно перейти в полярную систему координат. Подставим в уравнение окружности соотношения $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$ и запишем уравнение линии верхней границы области в полярной системе координат

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4 \ \rightarrow \ \rho=2 \ .$$

Полюс расположен в точке $O(0;0)$, поэтому в качестве уравнения линии нижней границы области интегрирования в полярной системе координат следует взять $\rho=0$.

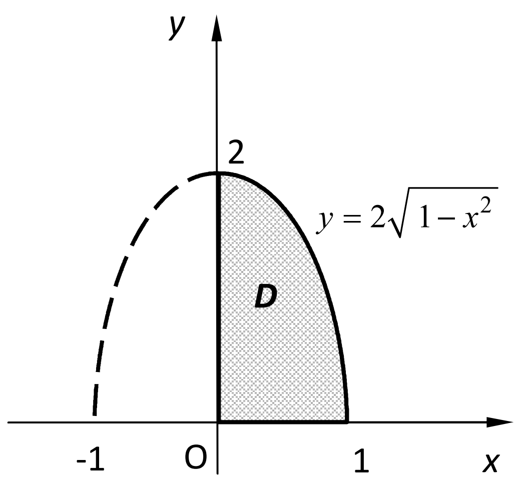
Из рисунка видно, что интервал изменения угла поворота луча составляет π радиан. Таким образом, границы области D определяются системой неравенств $D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\pi, \\ 0\le\rho\le 2\ . \end{cases}$. Двойной интеграл в полярной системе координат примет вид

$$\int\limits_D \rho^3\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^3 d\rho=4\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}\sin 2\varphi\, d\varphi=0\,.$$

Задача 7.19. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$ (выражение совпадает с предыдущими), а область D ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1$ и расположена в первой четверти координатной плоскости.

Решение

Область D показана на рисунке. Выберем внешние пределы интегрирования на оси Оx (абсциссы крайних точек области слева и справа: $x=0$, $x=1$). Найдем пределы интегрирования внутреннего интеграла, для этого выразим y из уравнения эллипса: $y=2\sqrt{1-x^2}$ – верхняя граница и $y=0$ – нижняя граница. Тогда система, определяющая границы области будет иметь вид



$$D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le 2\sqrt{1-x^2}\ . \end{cases}$$

Проведем двукратное интегрирование – внутренний интеграл по y, затем внешний интеграл по x

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{2\sqrt{1-x^2}} ydy = \int\limits_0^1 x\cdot 2\left(1-x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Замечание

При интегрировании по области, ограниченной эллипсом, также можно воспользоваться полярной системой координат, однако в этом случае удобно применить формулы перехода в *обобщенную* полярную систему координат с помощью соотношений

$$x = a\cdot\rho\cos\varphi,\ \ y = b\cdot\rho\sin\varphi,\qquad \text{где } a \text{ и } b \text{ – полуоси эллипса.}$$

Двойной интеграл в обобщенной полярной системе координат имеет вид

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho;\varphi)ab\rho d\rho d\varphi = ab\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho;\varphi)\rho d\rho\ .$$

В нашем случае $x = \rho\cdot\cos\varphi$, $y = 2\rho\cdot\sin\varphi$. Подставим соотношения в уравнение эллипса, проводя последовательные преобразования

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4} = 1 \to \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{1}+\frac{4\rho^2\sin^2\varphi}{4} = 1 \to (\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi) = 1,$$

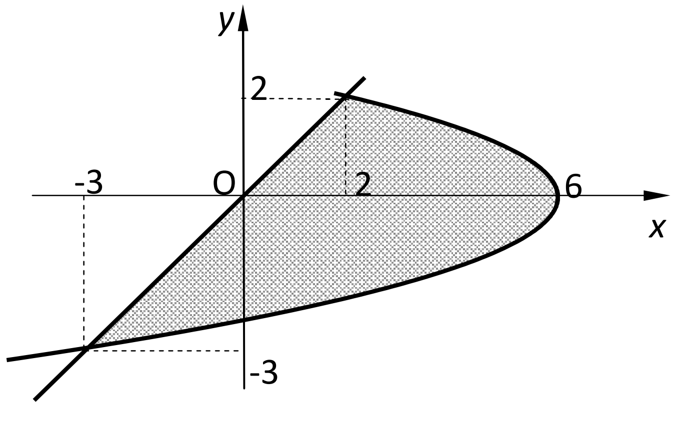
получим уравнение линии границы $\rho = 1$, тогда область интегрирования

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le\rho\le 1\,. \end{cases}$$

Окончательно двойной интеграл равен

$$\iint\limits_D 4\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho\, d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d2\varphi = \frac{1}{2}.$$

Задача 7.20. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 6-y^2$, $y = x$.



Решение

Построим область, ограниченную прямой и горизонтально расположенной параболой. Постоянные пределы интегрирования удобно выбрать вдоль оси Оy.

Найдем ординаты точек пересечения. Приравняем выражения линий и решим получившееся уравнение:

$$y = 6 - y^2 \to y^2 + y - 6 = 0 \to \quad y_1 = -3, \quad y_2 = 2.$$

Границы заштрихованной области $D: \begin{cases} -3 \le y \le 2, \\ y \le x \le 6 - y^2. \end{cases}$

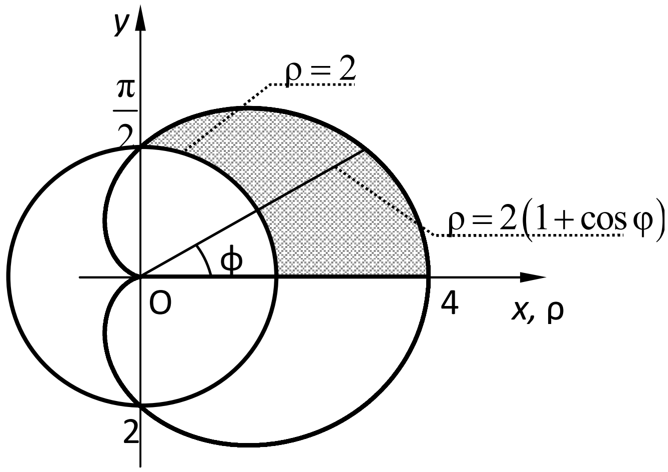
Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-3}^{2} dy \int_{y}^{6-y} dx = \int_{-3}^{2} \left(-y^2 - y + 6\right) dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 6y\right)\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{103}{6}.$$

Задача 7.21. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $\left(x^2 + y^2 - 2x\right) = 4\left(x^2 + y^2\right)$. Область выбрать вне окружности.

Решение

Для построения линий удобно перейти в полярную систему координат с помощью соотношений $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$.



Первое уравнение – это уравнение окружности с центром в т. O(0;0) и радиусом $R = 2$.

Для окружности $x^2 + y^2 = 4 \to \rho^2 = 4 \to \rho = 2$.

Для второй линии $\left(x^2 + y^2 - 2x\right) = 4\left(x^2 + y^2\right) \to$

$\left(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi\right)^2 = 4\rho^2 \to$

$\to \rho = 2 \cdot (1 + \cos\varphi)$. Это уравнение кардиоиды.

Поместим полюс в точку O(0;0) и построим линии (рис. 13).

Найдем значения полярного угла φ для точек пересечения линий. Для этого приравняем выражения линий: $2 = 2 \cdot (1 + \cos\varphi) \to \cos\varphi = 0;\ \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Поскольку фигура симметрична относительно полярной оси, то достаточно найти площадь верхней заштрихованной области, а результат удвоить. Тогда границы заштрихованной области интегрирования определяются системой $D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 2 \le \rho \le 2 \cdot (1 + \cos\varphi). \end{cases}$

Запишем формулу для вычисления площади верхней части фигуры и удвоим результат

$$S = 2\iint\limits_D \rho d\rho\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_2^{2(1+\cos\varphi)} \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_2^{2(1+\cos\varphi)} \right) = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi + \cos^2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= 8\sin\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = 8 + \left(2\varphi + \sin 2\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8 + \pi.$$

Задача 7.22. Найти площадь области, заданной неравенствами: $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 5$, $0 \le x$, $x \le y$.

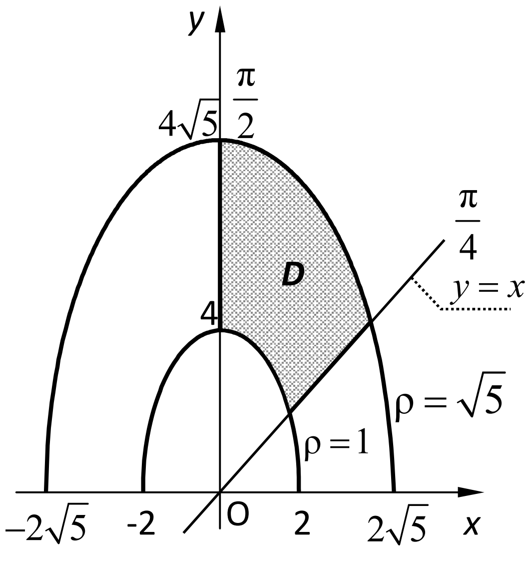
Решение

Из системы неравенств определим уравнения линий границы: из неравенств $0 \le x \to x = 0$, $x \le y \to y = x$ – уравнения прямых; из двойного неравенства $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 5 \to \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ \frac{x^2}{4\cdot 5} + \frac{y^2}{16\cdot 5} = 1. \end{array} \right.$ – уравнения эллипсов.

Построим чертеж данной области D. Для решения удобнее перейти к обобщенным полярным координатам $x = a\cdot\rho\cos\varphi$, $y = b\cdot\rho\sin\varphi$, где $a = 2$, $b = 4$. Подставим эти значения как в первое, так и во второе уравнения эллипсов. Получим уравнения линий границы

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \to \rho^2 = 1 \to \rho = 1,$$

$$\frac{x^2}{4\cdot 5} + \frac{y^2}{16\cdot 5} = 1 \to \rho^2 = 5 \to \rho = \sqrt{5}.$$



Из рисунка видно, что интервал изменения угла поворота луча на заштрихованной области составляет $\frac{\pi}{4}$ радиан.

Таким образом, границы области D в полярной системе координат определяются системой неравенств

$$D: \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \le \rho \le \sqrt{5}\ . \end{cases}$$

Тогда площадь фигуры равна

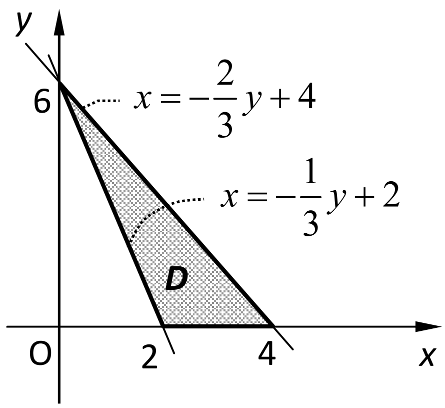
$$\iint\limits_D ab \cdot \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot 4 d\varphi \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \rho\, d\rho = 8 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_1^{\sqrt{5}} \right) = 16 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\pi\ .$$

Задача 7.23. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение

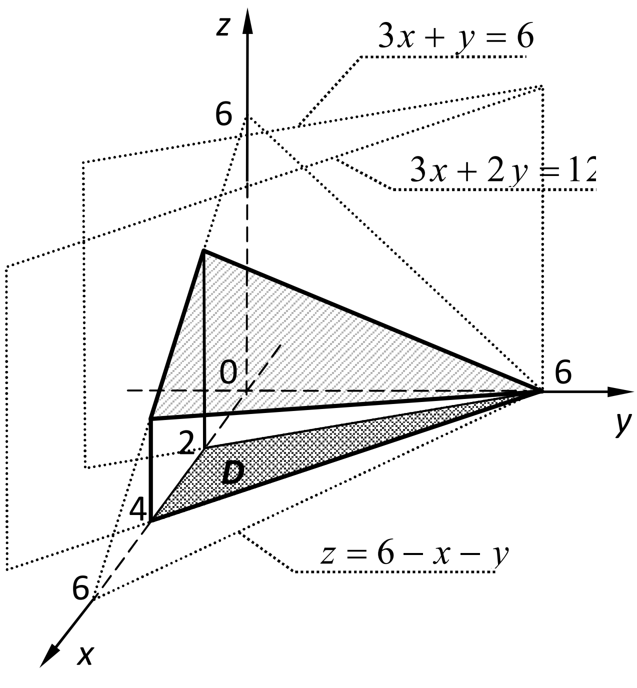
Все уравнения в условии задачи – это уравнения плоскостей. Построим пространственную область.

При пересечении плоскостей боковой поверхности с координатной плоскостью $z = 0$ образуется плоская область D в форме треугольника. Из рисунка видно, что постоянные пределы интегрирования удобно выбрать на оси Oy.



Выразив из уравнений плоскостей переменную x, получим уравнения для верхней и нижней границ области интегрирования D. Выражение для подынтегральной функции (уравнение верхней поверхности) получим, выразив переменную z из уравнения $x + y + z = 6$:

$$x + y + z = 6 \to z = 6 - x - y\ .$$



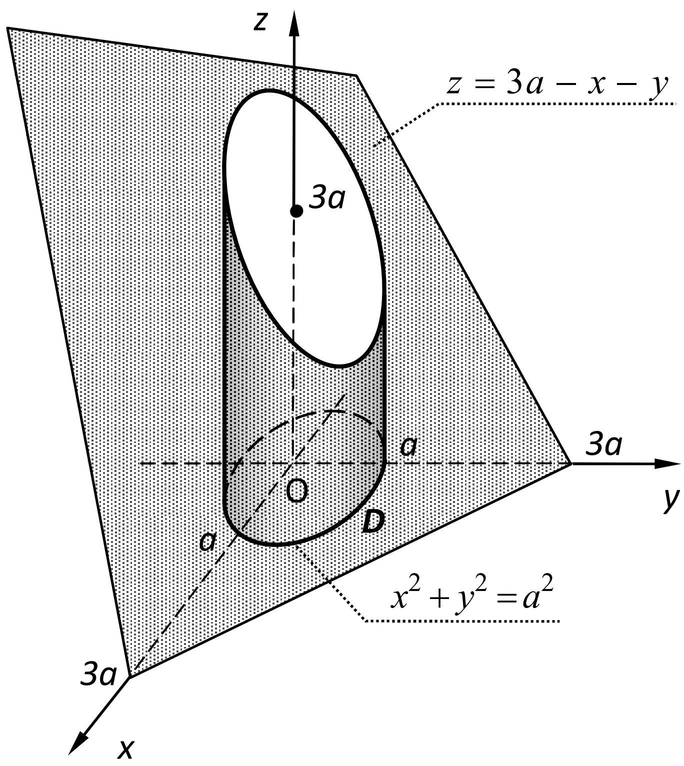
Тогда объем тела равен

$$V=\iint_D(6-x-y)dxdy=\int_0^6 dy\int_{-\frac{1}{3}y+2}^{-\frac{2}{3}y+4}(6-x-y)dx=\int_0^6 dy\left(6x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}y+2}^{-\frac{2}{3}y+4}=$$

$$=\int_0^6\left(\frac{1}{6}y^2-2y+6\right)dy=\left(\frac{1}{3}y^3-y^2+6y\right)\Bigg|_0^6=12\,.$$

Задача 7.24. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x+y+z=3a$, $x^2+y^2=a^2$

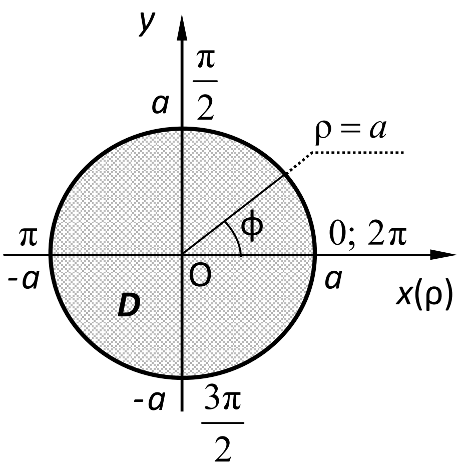
.



Решение

Построим пространственную область. Первые два уравнения – это уравнения плоскостей, третье – уравнение цилиндрической поверхности кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью Oz.

Из рисунка видно, что при пересечении цилиндрической поверхности с координатной плоскостью $z=0$ образуется плоская область D в форме круга радиусом $R=a$, поэтому удобно воспользоваться полярной системой координат.



Используя соотношения $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$, получим уравнение линии границы области D: $x^2+y^2=a^2\to\rho^2=a^2\to\rho=a$.

Поместим полярный полюс в точку O(0;0) и определим границы области интегрирования.

Тогда объем тела равен

$$V = \iint\limits_D \left(3a - \rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(3a\rho - \rho^2\cos\varphi - \rho^2\sin\varphi\right) d\rho =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3a\rho^2}{2} - \frac{\rho^3\cos\varphi}{3} - \frac{\rho^3\sin\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^a = a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{\cos\varphi}{3} - \frac{\sin\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= a^3 \left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi}{3} + \frac{\cos\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3a^3\pi .$$

Замечание

При нахождении объема тела с помощью двойного интеграла использовать свойство симметричности области интегрирования, как при нахождении площади плоской области, не всегда бывает возможным. Это объясняется тем, что вид или расположение поверхности, ограничивающей тело сверху, часто приводит к тому, что объемы отдельных частей тела оказываются неравными между собой, несмотря на равенство площадей их оснований.

В частности, в последнем рассмотренном примере вычислять объем тела, интегрируя по четверти круга в пределах $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, а затем полученный результат умножать на четыре нельзя, поскольку плоскость $z = 3a - x - y$ расположена наклонно так, что объемы частей цилиндра над первой и третьей четвертями круга не равны между собой.