8. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения 1 порядка

Соотношение $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если это уравнение можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, то такое уравнение называется *уравнением в нормальной форме*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение. Например, уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ или в нормальной форме $y' = f(x, y)$ по определению есть дифференциальное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке вместе с производной в исходное уравнение обращает его в тождество.

Общим решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая двум условиям:

1. Обращает исходное уравнение в тождество.

2. Для любых значений x_0, y_0 существует единственное значение произвольной постоянной $C = C_0$, такое, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Под общим решением также понимается решение *в неявной форме* вида $\Phi(x, y, C) = 0$, которое иначе еще называют *общим интегралом*.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной интегрирования $C = C_0$.

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его нужно подчинить некоторым дополнительным условиям. Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу $y = y_0$, называется *начальным условием* и записывается как $y(x_0) = y_0$. Задача отыскания решения дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной и удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши:* $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Если функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны по обеим переменным в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, то задача Коши имеет единственное решение.

Типы дифференциальных уравнений первого порядка

1. Дифференциальное уравнение первого порядка *с разделяющимися переменными* в дифференциалах имеет вид $P(x)dx+Q(y)dy=0$. Более общий случай дифференциального уравнения с разделяющимися переменными такой:

$$P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(x)Q_2(y)dy=0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка *с разделяющимися переменными*, записанное в нормальной форме, имеет вид $y'=f(x)g(y)$.

Это уравнение решается *методом разделения переменных*, а затем непосредственным интегрированием полученных выражений. При этом решение получается, как правило, в виде общего интеграла $\Phi(x,y,C)=0$.

2. *Однородное* дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в нормальной форме $y'=f(x,y)$ или $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка относительно переменных x и y, решается *методом замены переменной* $u(x)=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y=u\cdot x,\quad y'=u'x+u$.

3. *Линейное* дифференциальное уравнение первого порядка *относительно* $y(x)$ имеет вид $y'+P(x)y=Q(x)$ и решается *подстановкой* $y=u\cdot v$ (метод Бернулли) где $u=u(x)$, $v=v(x)$. Тогда $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

4. *Линейное* дифференциальное уравнение первого порядка *относительно* $x(y)$ имеет вид $x'+P(y)x=Q(y)$ и решается *подстановкой* $x=u\cdot v$, где $u=u(y)$, $v=v(y)$. Тогда $x'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

5. Дифференциальное уравнение называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид $y'+P(x)y=Q(x)y^n,\quad n\neq 0, n\neq 1$. Оно сводится к линейному дифференциальному уравнению *подстановкой* $y^{1-n}=z,\quad z=z(x)$ и в результате такой подстановки уравнение принимает вид $\dfrac{1}{1-n}z'+P(x)z=Q(x)$.

6. Дифференциальное *уравнение в полных дифференциалах* имеет вид $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. В этом случае левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$.

Для этого должны быть выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Уравнение решается с помощью *интегрирования системы* $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases}$

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями *высших порядков*. Например, дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде $F(x, y, y', y'') = 0$ или в нормальной форме $y'' = f(x, y, y')$.

Решением дифференциального уравнения второго порядка называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. *Общим решением* дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения констант C_1, C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, существуют единственные значения произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка и удовлетворяет данным начальным условиям.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача отыскания решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши* и имеет вид:
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Типы уравнений, допускающие понижение порядка

1. Дифференциальное уравнение второго порядка, *разрешенное относительно старшей производной* имеет вид $y'' = f(x)$ и решается методом последовательного интегрирования.

2. Дифференциальное уравнение второго порядка, *не содержащее явно искомую функцию* $y = f(x)$, имеет вид $F(x, y', y'') = 0$ и решается методом замены $y' = p$, где $p = p(x)$., тогда $y'' = p'$.

3. Дифференциальное уравнение второго порядка, *не содержащее явно независимую переменную* x, имеет вид $F(y, y', y'') = 0$ и решается методом замены $y' = p$, где $p = p(y)$. Тогда $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$.

Задача 8.1. Найти частное решение уравнения $(1+e^x) \cdot y \dfrac{dy}{dx} = e^x$ при начальном условии $y(0) = 1$.

Решение

Имеем: $(1+e^x) \cdot y\, dy = e^x\, dx$. Разделяя переменные и интегрируя обе части, найдём общий интеграл $\int y\, dy = \int \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx$, $\dfrac{1}{2} y^2 = \ln(1+e^x) + C$.

Полагая $x = 0, \quad y = 1$ в общем интеграле, получим $0{,}5 = \ln 2 + C$, откуда находим $C = 0{,}5 - \ln 2$. Подставляя C в общий интеграл, окончательно имеем:

$$0{,}5 y^2 = \ln(1+e^x) + 0{,}5 - \ln 2.$$

Задача 8.2. Решить уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение

Запишем уравнение в виде $y' = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$. Так как уравнение однородное, то положим $u = \dfrac{y}{x}$ или $y = u \cdot x$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получим:

$$x \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1-u^2}.$$

Разделяем переменные: $\pm \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{x}$.

Отсюда интегрированием находим: $\pm \arcsin u = \ln|x| + C$.

Заменяя u на $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл $\pm \arcsin \dfrac{y}{x} = \ln|x| + C$.

Преобразуя выражение, мы делили обе части уравнения на произведение $x\cdot\sqrt{1-u^2}$, и поэтому могли потерять решения, которые обращают в нуль его сомножители. Поэтому исследуем следствия из равенств $x=0$ и $\sqrt{1-u^2}=0$.

Но $x=0$ не является решением уравнения, а из второго равенстваполучаем, что $1-\dfrac{y^2}{x^2}=0$, откуда $y=\pm x$. Непосредственной подстановкой проверяем, что функции $y=x$, $y=-x$ являются решениями данного уравнения. Эти решения не получить из общего интеграла и, следовательно, они являются особыми решениями.

Задача 8.3. Решить уравнение $y'+2xy=2x\cdot e^{-x^2}$.

Решение

1. Уравнение является линейным по $y(x)$. Полагаем $y=u\cdot v$ и $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$. После подстановки уравнение примет вид:

$$u'\cdot v+u\cdot(v'+2x\cdot v)=2x\cdot e^{-x^2}.$$

2. Решаем вспомогательное уравнение $v'+2x\cdot v=0$, обращающее второе слагаемое в нуль независимо от значения u, т. е. $\dfrac{dv}{dx}=-2x\cdot v$, откуда $\int\dfrac{dv}{v}=-\int 2x\cdot dx$ или $\ln|v|=-x^2+C_1$. Так как на данном этапе нас интересует любое решение вспомогательного уравнения, для упрощения положим $C_1=0$ и получим $v=e^{-x^2}$.

3. Вернемся на один шаг назад и подставим полученную функцию в преобразованное подстановкой исходное уравнение. Второе слагаемое в нем обращается в нуль и имеем $u'\cdot e^{-x^2}=2x\cdot e^{-x^2}$, отсюда найдём функцию u: $du=2x\cdot dx$, проинтегрировав обе части, получим $u=x^2+C$.

4. Составим решение исходного уравнения в соответствии со сделанной подстановкой: $y=u\cdot v=(x^2+C)\cdot e^{-x^2}$.

Задача 8.4. Найти общее решение уравнения $y''=\sin x+\cos x$.

Решение

Интегрируя последовательно данное уравнение, имеем:

$$y'=-\cos x+\sin x+C_1,$$

$$y=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2.$$

Задача 8.5. Проинтегрировать уравнение $(1+e^x)y'' = y'e^x$.

Решение

Сделаем подстановку $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Тогда имеем:

$$(1+e^x)p' = pe^x, \qquad \frac{dp}{dx} = p\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln|p| = \ln(1+e^x) + \ln|C_1|, \qquad p = C_1(1+e^x).$$

Возвращаясь к переменной y, получим дифференциальное уравнение первого порядка $y' = C_1(1+e^x)$. Отсюда интегрированием находим общее решение исходного уравнения

$$y = C_1x + C_1e^x + C_2.$$

Задача 8.6. Решить уравнение $y'' = 2y^3$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$.

Решение

Сделаем замену $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$. Имеем $pp' = 2y^3$. Разделяя переменные, получим уравнение $pdp = 2y^3dy$, откуда $p^2 = y^4 + C_1$ или $y' = \pm\sqrt{y^4 + C_1}$.

Используя начальные условия, находим C_1:

$y'(0) = \pm\sqrt{y^4(0) + C_1}, \qquad 1 = \pm\sqrt{1 + C_1} \;\Rightarrow\; C_1 = 0$ (дополнительно замечаем, что начальному условию соответствует положительный вариант зависимости).

Таким образом, $\dfrac{dy}{dx} = y^2$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int\frac{dy}{y^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{y} = x + C_2, \qquad y = -\frac{1}{x + C_2}.$$

Учитывая начальные условия, находим C_2: $y(0) = -\dfrac{1}{C_2}, \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1.$

В итоге, искомое частное решение имеет вид $y = -\dfrac{1}{x-1}$.