10. Операционное исчисление[2]

10.1. Преобразование Лапласа и его основные свойства. Таблица оригиналов и изображений

Рассмотрим функцию $f(t)$ действительного переменного, определенную на полуоси $t \geq 0$, значения которой могут быть как действительными, так и комплексными.

Функцией-оригиналом будем называть любую комплекснозначную функцию $f(t)$, заданную на всей действительной оси t, удовлетворяющую следующим условиям:

1. На любом конечном интервале оси t функция непрерывна кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;
2. $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3. Существуют постоянные M и $\sigma_0 > 0$ такие, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$.

Наименьшее число σ_0, при котором выполняется третье условие, называется показателем роста $f(t)$. Для ограниченных оригиналов можно считать $\sigma_0 = 0$.

Часто используется другое определение функции – оригинала: Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$, непрерывная на интервале $0 \leq t < \infty$, если существует действительное число σ_0 (показатель роста функции $f(t)$) такое, что интеграл $I = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} |f(t)| dt$ сходится при $\sigma > \sigma_0$ и расходится при $\sigma < \sigma_0$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$, удовлетворяющей названным выше условиям, называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$, где $p = \sigma + i\omega$ – комплексная переменная, $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Im} p = \omega$. Интеграл в правой части этого равенства называют интегралом Лапласа, а функцию $F(p)$ – изображением функции $f(t)$.

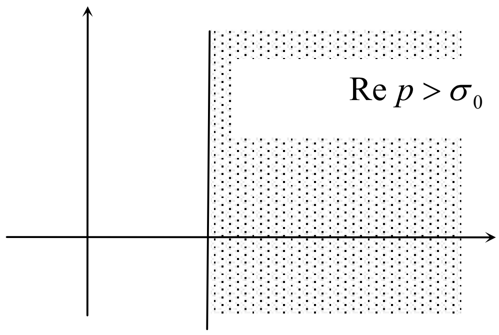
---

[2] Для понимания теоретического аппарата этого раздела предполагается предварительное знакомство с материалом раздела 4. «Основы теории функций комплексного переменного», но представленной вычислительной техникой зачастую можно пользоваться без этого.

Связь между изображением и соответствующим оригиналом обозначается $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$ и называется операционным (операторным) равенством. Для сохранения справедливости, изменения в любой части этого равенства должны адекватно и однозначно (но не всегда идентично) отражаться в другой его части.

Справедлива следующая теорема существования и аналитичности изображения. Для всякой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Доказательство. Действительно, при $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ интеграл $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ абсолютно сходится, так как в силу неравенства $|f(t)| \le M e^{\sigma_0 t}$, а также с учётом того, что $\left| e^{-pt} \right| = e^{-pt}$, он мажорируется



сходящимся интегралом $\left| \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\,dt \right| \le \int\limits_0^\infty M e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,dt = \dfrac{M}{\sigma - \sigma_0}$ при $\sigma > \sigma_0$.

(Так как интеграл $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ сходится равномерно при $\sigma > \sigma_0$, и $F(p)$– непрерывна, так как $f(t)$ – кусочно-непрерывная и непрерывна функция e^{-pt}).

Интеграл $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ после дифференцирования его по переменной *p* также сходится равномерно, ибо он мажорируется сходящимся интегралом

$$\left| \int\limits_0^\infty f(t) t e^{-pt}\,dt \right| \le \int\limits_0^\infty M t\, e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,dt = \frac{M}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2}, \text{ где } \sigma_1 > \sigma_0.$$

Окончательно заключаем, что функция комплексного переменного $F(p)$ обладает производной, т.е. является аналитической функцией.

Найдём преобразования Лапласа, часто встречающихся функций – оригиналов, используя формулу $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$

Пример. Найти изображение единичной функции Хевисайда $h(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1,\ t\geq 0.\end{cases}$ по определению преобразования Лапласа

Решение

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$F(p)=\int_0^{\infty}h(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-pt}\,dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty}=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}.$$

Таким образом, $h(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p}$ или $1\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p}$.

Аналогично для любой постоянной: $a\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{a}{p}$.

Пример. Найти изображение функции e^{at}, где $a\in Z$; $a=\alpha+\beta i$, $\{\alpha;\beta\}\in R$.

Решение

Применяя преобразование Лапласа получим:

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{at}e^{-pt}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=\lim_{R\to\infty}\left(-\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^R\right)=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p-a)R}}{p-a}+\frac{1}{p-a}\right)=\begin{bmatrix}e^{-(p-a)\cdot\infty}+\frac{1}{p-a}=\frac{1}{e^{\infty}}+\frac{1}{p-a}\\ \mathrm{Re}(p-a)>0\end{bmatrix}=\frac{1}{p-a}.$$

Таким образом, получаем $e^{at}\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p-a}$ (при $\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a$)

Линейность. Если $f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)$ и $g(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}G(p)$ с показателями роста σ_1 и σ_2, то для произвольных (комплексных) коэффициентов α и β имеет место операторное равенство $\alpha f(t)+\beta g(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\alpha F(p)+\beta G(p)$.

Доказательство следует из определения преобразования Лапласа и свойства линейности интеграла:

$$\int_0^{\infty}(\alpha f(t)+\beta g(t))e^{-pt}dt=\alpha\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt+\beta\int_0^{\infty}g(t)e^{-pt}dt=\alpha F(p)+\beta G(p).$$

Так как интегралы $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ и $\int\limits_0^\infty g(t)e^{-pt}dt$ сходятся: первый при $\operatorname{Re} p > \sigma_1$, второй – при $\operatorname{Re} p > \sigma_2$. Тогда интеграл $\int\limits_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-pt}dt$ будет сходится при $\operatorname{Re} p > \sigma_0 = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Пример. Найти изображение функций sin*t*, cos*t*.

Решение

Выразим заданные функции через показательные функции по формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, φ – аргумент.

Тогда $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$.

На основании результата предыдущего примера

$$e^{it} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{p-i},\ e^{-it} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{p+i}$$

Пользуясь свойством линейности, получаем

$$\sin t = \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{p+i} = \frac{1}{p^2+1},$$

$$\cos t = \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{2}\frac{1}{p-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2+1}$$

Окончательно: $\sin t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p^2+1}$ и $\cos t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{p}{p^2+1}$.

Подобие. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то для любого числа λ>0 справедливо операторное равенство $f(\lambda t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$

Доказательство. Введем новое переменное $\xi = \lambda t$. Тогда $t = \dfrac{\xi}{\lambda}$, $dt = \dfrac{1}{\lambda}d\xi$.

Согласно определению изображения находим

$$\int\limits_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{p\xi}{\lambda}}\frac{1}{\lambda}d\xi = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{p\xi}{\lambda}}d\xi = \frac{1}{\lambda}F(\frac{p}{\lambda}).$$

Окончательно:

$f(\lambda t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$, что и т.д.

Пример. Найти изображение функций $\sin\omega t, \cos\omega t$.

Решение.

Используя решение одного из предыдущих примеров и теорему подобия, получим

$$\sin t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \sin\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(p/\omega\right)^2+1} = \frac{1}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow \cos\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{\omega}\frac{p/\omega}{\left(p/\omega\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Получаем формулы $\sin\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p^2+\omega^2}$ и $\cos\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

Смещение (затухание). $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ и a – произвольное комплексное число, то умножение оригинала на величину e^{at} соответствует изменению (смещению) аргумента изображения на величину a: $e^{at}f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p-a)$.

Доказательство. Непосредственно из определения преобразования Лапласа получаем $e^{at}f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \int\limits_0^\infty e^{at}e^{-pt}f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-a)t}f(t)\,dt = F(p-a)$,

Что и требовалось доказать.

Пример. Найти изображения функций $e^{at}\sin\omega t, e^{at}\cos\omega t$.

Решение

Возьмем $f(t) = \sin\omega t$. Согласно теоремы смещения для отыскания изображения функции $e^{at}f(t)$ следует в выражение для $F(p)$ подставить $p-a$ вместо p. Получаем: $e^{at}\sin\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$

Аналогично: $e^{at}\cos\omega t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$.

Примечания.

Формула смещения означает, что горизонтальный сдвиг графика изображения сопровождается умножением оригинала на показательную функцию.

Она справедлива при любом, как положительном, так и отрицательном значении a и если заменить в теореме смещения величину a на $-a$, получим: $e^{-at}f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p+a)$. Этот частный случай теоремы смещения в операционном исчислении называют теоремой затухания, имея в виду, что при a > 0 для функций–оригиналов имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-at}f(t)=0$ (если значение p – σ_0 > 0 входит в область определения функции $F(p)$. Теорема смещения, выражающая свойство затухания, часто применяется при исследовании затухающих колебаний физических систем.

Запаздывание. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то запаздывание аргумента оригинала на положительное число $\tau > 0$ приводит к умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$, то есть $f(t-\tau) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} e^{-p\tau}F(p)$.

Доказательство. Так как $f(t-\tau)=0$ при t < τ, то, используя замену переменной $t-\tau=\xi$ => $t=\xi+\tau, dt=d\xi$, при применении определенного интеграла надо учитывать изменения в пределах интегрирования. Для изображения находим

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=\int\limits_{-\tau}^\infty f(\xi)e^{-p(\xi+\tau)}d\xi=\left[т.к. f(t)=0 при \xi \prec -\tau\right]=e^{-p\tau}\int\limits_0^\infty f(\xi)e^{-p\xi}d\xi=e^{-p\tau}F(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти изображение $\cos(\omega t-\alpha)$.

Решение. Используя результат одного из предыдущих примеров и теорему запаздывания, получим:

$$\cos(\omega t-\alpha)=\cos\left(\omega\left(t-\frac{\alpha}{\omega}\right)\right) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} e^{-p\frac{\alpha}{\omega}}\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Примечания.

Теорема запаздывания применяется при решении задач с периодическими импульсами, сигналами, где τ является временем запаздывания сигнала, что и объясняет её название.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что кривая $f(t-\tau)$ – сдвинутая вправо кривая $f(t)$. Такому сдвигу соответствует переход изображения $F(p)$ в $e^{-pt}F(p)$, то есть умножение изображения на показательную функцию.

Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то

$$f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$

……………………………………………………………

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где под значением $f^{(n)}(0)$ понимается правый предел $\lim\limits_{t \to 0+0} f^{(n)}(t)$.

Доказательство. Используя определение преобразования Лапласа и интегрируя по частям (что возможно в силу равномерной сходимости несобственного интеграла при $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$), получаем

$$f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ u = e^{-pt},\ v = f(t) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \cdot \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \left[\lim_{t \to \infty} e^{-pt} f(t) = 0 \right] = p \cdot F(p) - f(0).$$

Аналогично устанавливается справедливость равенств для производных $f''(t)$, $f'''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$. ■

В частности, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то формулы принимают вид:

$$f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p),$$

$$f''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^2 \cdot F(p),$$

………………………….,

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^n \cdot F(p).$$

Таким образом, действию дифференцирования функции–оригинала $f(t)$ отвечает алгебраическое действие умножения изображения $F(p)$ на величину *p*, возведённую в соответствующую степень *n*, то есть величина приобретает свойство оператора.

Пример. Найти изображение функции $f(t)=\sin^3 t$ с помощью дифференцирования оригинала.

Решение

Пусть $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала $f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p) - f(0)$. Так как $f(0)=0$, то $f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p)$.

Дифференцируем: $f'(t)=3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t = \dfrac{3}{2} \cdot \sin t \cdot \sin 2t = \dfrac{3}{4} \cdot (\cos t - \cos 3t)$.

Перейдём к изображениям: $f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+9} \right)$.

Получаем равенство: $p \cdot F(p) = \dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+9} \right) = \dfrac{6p}{(p^2+1) \cdot (p^2+9)}$.

Таким образом, $\sin^3 t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{6}{(p^2+1) \cdot (p^2+9)}$.

Интегрирование оригинала. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ также является оригиналом некоторой функции и $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p} \cdot F(p)$.

Дифференцирование изображения. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то $-t \cdot f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F'(p)$ и для натуральных n справедливо $(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F^{(n)}(p)$

Интегрирование изображения. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, а также сходится интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$, то $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p} \cdot F(p)$

Умножение изображений. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, $g(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} G(p)$ и «свертка функций» (по определению) $f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$, то $f(t) * g(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p) \cdot G(p)$, то есть свертка функций–оригиналов соответствует умножению функций–изображений.

С использованием определения преобразования Лапласа и его свойств установлено взаимное соответствие следующих оригиналов и изображений.

№	**Оригинал $f(t)$**	**Изображение $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$**
1	Единичная функция Хевисайда $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	Гиперболический синус $\mathrm{sh}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	Гиперболический косинус $\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at} \cdot \mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at} \cdot \mathrm{ch}(\omega t)$	$\frac{p}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n, *n* – целое неотрицательное	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t \cdot \mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t \cdot \mathrm{ch}(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$t \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$t \cdot e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)}{2\omega^3}$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{\mathrm{ch}(\omega t) - \omega t\mathrm{sh}(\omega t)}{2\omega^3}$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

10.2. Восстановление оригинала по изображению. Решение дифференциальных уравнений и их систем операционным методом

1. Общая (но зачастую, не самая удобная в применении) формула для решения обратной задачи, указывающая возможность по известной функции $F(p)$ найти $f(t)$, то есть функцию–оригинал, называется формулой обращения преобразования Лапласа, или обратным преобразованием Лапласа (формула Римана-Меллина). Если $f(t)$ – функция – оригинал с показателем роста σ_0, непрерывная точке t и имеющая в этой точке конечные односторонние производные, а $F(p)$ – ее изображение, то $f(t)=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-ib}^{\sigma+ib}e^{pt}F(p)dt=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}F(p)dt$ (интеграл вычисляется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p>\sigma_0$, где σ_0 – показатель роста функции $f(t)$).

2. Если функция $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, и её удается представить в виде суммы простейших дробей (для этого применяется метод неопределенных коэффициентов) – находим по таблице и суммируем оригиналы для каждой простой дроби.

3. Если функция $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, знаменатель которой имеет лишь простые корни p_1, p_2, … p_n, то, согласно теореме, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} \;\bullet\!\!\longrightarrow\; \dfrac{A(p)}{B(p)}$.

4. Сложное для анализа изображение предварительно подвергается специальному преобразованию[3], после которого применяются вышеописанные приемы.

5. В некоторых случаях, для восстановления оригинала полезным оказывается непосредственное применение теорем о свойствах преобразования Лапласа (запаздывания, смещения, об интегрировании изображения и другие).

Пример. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

---

[3] О разложении в ряд Лорана, см. следующие разделы «3. Теория рядов» и «4. Основы теории функций комплексного переменного»

Решение.

Разлагаем $F(p)$ на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами: $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4}$

Используя «частные положения», находим коэффициенты A, B, C и D из равенства $A(p-2)(p^2+4)+B(p+1)(p^2+4)+(Cp+D)(p+1)(p-2)=p+2$

При $p=2$: $24B=4 \Rightarrow B=\dfrac{1}{6}$;

При $p=-1$: $-15A=1 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{15}$;

При $p=0$: $-8A+4B-2D=2 \Rightarrow \dfrac{8}{15}+\dfrac{2}{3}-2D=2 \Rightarrow D=-\dfrac{2}{5}$;

При $p=1$: $-5A+10B-2\left(C-\dfrac{2}{5}\right)=3 \Rightarrow C=-\dfrac{1}{10}$.

Окончательно:

$$F(p)=\left(-\frac{1}{15}\right)\frac{1}{p+1}+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{p-2}-\left(\frac{1}{10}\right)\frac{p}{p^2+4}-\left(\frac{2}{5}\right)\frac{1}{p^2+4}$$

Используя таблицу, получим искомую функцию – оригинал:

$$f(t)=\left(-\frac{1}{15}\right)e^{-t}+\left(\frac{1}{6}\right)e^{2t}-\left(\frac{1}{10}\right)\cos(2t)-\left(\frac{2}{5}\right)\frac{\sin(2t)}{2}$$

Операционный метод позволяет свести дифференциальное уравнение или их систему к алгебраическим аналогам. Решение алгебраического уравнения (или системы) дает изображение решения исходного уравнения, а по изображению находится само решение.

Пример. Найти решение уравнения $y''+5y'+6y=e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

Решение

По свойству дифференцирования оригиналов,

$$y(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}Y(p)\Rightarrow\begin{cases}y'(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}pY(p)-y(0)=pY-1\\ y''(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y-p+2\end{cases}$$

При этом (по таблице оригиналов и изображений) $e^t\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\dfrac{1}{p-1}$

Заменяя последовательно элементы в исходном дифференциальном уравнении, перейдем к операторному уравнению, разрешим его относительно изображения Y и представим (применение метода неопределенных коэффициентов опущено) в виде суммы простейших дробей:

$$p^2Y - p + 2 + 5pY - 5 + 6Y = \frac{1}{p-1}$$

$$\left(p^2 + 5p + 6\right)Y - p - 3 = \frac{1}{p-1}$$

$$Y = \frac{1/\left(p-1\right) + p + 3}{\left(p^2 + 5p + 6\right)} = \frac{p^2 + 2p - 2}{\left(p-1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)} = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{1}{p-1} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{p+2} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{p+3}$$

Переходя к оригиналам, получим решение задачи Коши.

$$y = \left(\frac{1}{12}\right)e^t + \left(\frac{2}{3}\right)e^{-2t} + \left(\frac{1}{4}\right)e^{-3t}$$ – ответ.

Пример. При начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$ найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

Решение

По свойству дифференцирования оригиналов,

$$x(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} X(p) \Rightarrow x'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} pX(p) - x(0) = pX;$$

$$y(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} Y(p) \Rightarrow y'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} pY(p) - y(0) = pY.$$

При этом (по таблице оригиналов и изображений)

$$\cos t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{p}{p^2+1} \text{ и } \sin t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{p^2+1}.$$

Система в изображениях (искомые X и Y перенесены в левые части равенств и выделены как общие множители) примет вид

$$\begin{cases} (p-2)X - 4Y = \dfrac{p}{p^2+1} \\ X + (p+2)Y = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

Определим X и Y и представим в виде суммы простейших дробей (применение формул Крамера и метода неопределенных коэффициентов опущено):

$$X = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2\left(p^2 + 1\right)} = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1}$$

$$Y = \frac{2}{p^2\left(p^2 + 1\right)} = \frac{-2}{p^2} + \frac{2}{p^2 + 1}$$

Возвращаясь к функциям–оригиналам, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t \\ y(t) = -2t + 2\sin t \end{cases}$$ – ответ.