11. Теория рядов

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1,\, a_2,\, a_3 ,\dots\, a_n ,\dots$ Сумма бесконечного числа слагаемых $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. называется числовым рядом, числа $a_i\,(i = 1,2,3\dots)-$ членами ряда. Если слагаемыми ряда являются функции $u_n(x)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *функциональным.* Пример функционального ряда: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

3.1. Числовые ряды

Если все члены числового ряда имеют положительный знак, то ряд называется *знакоположительным*. Если знаки слагаемых различны, то ряд называется *знакопеременным.* В частности, если знаки чередуются, то ряд называется *знакочередующимся*.

Примеры

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ является знакоположительным,

ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ – знакочередующимся.

Знакоположительные ряды

Будем рассматривать суммы конечных числа членов числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n ;\dots$

Частичной суммой S_n называется сумма n первых членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Рассмотрим числовую последовательность частичных сумм $\{S_n\}$. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то числовой ряд называется сходящимся, а число S называется суммой ряда.

Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то ряд называется расходящимся.

Пример. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ найти a_4, S_1, S_2, S_3.

Решение. $S_1 = \frac{5^1}{1!} = 5$, $S_2 = 5 + \frac{5^2}{2!} = 17{,}5$, $S_3 = 5 + 12{,}5 + \frac{5^3}{3!} = 38{,}3$. Найдем a_4: $a_4 = \frac{5^4}{4!} = 26{,}04$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии: $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,\ a \neq 0$.

Решение

Если $|q| \neq 1$, то для n-й частичной суммы имеем известное выражение $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$. В случае $|q| < 1$ существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^n\right) = \frac{a}{1-q}$, т.е. данный ряд сходится и его сумма есть число S, равное $\frac{a}{1-q}$. Получили, что $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$ при $|q| < 1$. Если $|q| > 1$, то при $n \to \infty$ $\left|q^n\right| \to \infty$ и последовательность частичных сумм предела не имеет. Геометрическая прогрессия в этом случае является расходящимся рядом.

При $q = 1$ геометрическая прогрессия имеет вид $a + a + ... + a + ...$, поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad a > 0, \\ -\infty, & \text{если} \quad a < 0 \end{cases}$, т.е. ряд является расходящимся.

При $q = -1$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a = a - a + a - a + ...(-1)^{n-1}a + ...$. Образуем частичные суммы $S_1 = a$, $S_2 = a - a = 0$, $S_3 = S_2 + a = a$,..., то есть $S_n = \begin{cases} a, & \text{при} \quad n \text{ нечетном}, \\ 0, & \text{при} \quad n \text{ четном} \end{cases}$. Такая последовательность частичных сумм при $n \to \infty$ предела не имеет, ряд расходится.

Итак, геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Найти сумму n первых членов ряда, доказать сходимость ряда, пользуясь определением, и найти сумму ряда.

Решение

Рассмотрим n -й член ряда и представим его в более удобном виде $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Составим сумму n первых членов ряда: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ...$

$... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, т.е. данный ряд сходится и его сумма равна 1, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Некоторые свойства сходящихся рядов

Если в ряду (1) $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+N} + ...$ отбросить n первых членов ряда, то получится ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+N} + ...$, называемый *остатком ряда* после n-го члена ряда или n-ым *остатком ряда.* В случае сходимости остатка ряда его сумму называют остаточной суммой и обозначают r_n: $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+N} + ...$.

Теорема. Если какой-либо ряд сходится, то сходится и любой из его остатков и наоборот

Следствие. Если ряд сходится, то его остаточные суммы r_n при $n \to \infty$ стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Теорема. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать. Получившиеся ряды тоже будут сходящимися.

Теорема. Если все члены сходящегося ряда почленно умножить на число $C \neq 0$, то полученный ряд также сходится.

Теорема (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$ сходится и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2} = 0$. Но этот признак не является *достаточным* для сходимости ряда. Так, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (будет доказано далее), хотя $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Теорема (Достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+3}$.

Решение. Используем достаточный признак расходимости. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}\neq 0$, и поэтому ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n^2-5}{n^2-n+6}$.

Решение. Для этого ряда удобно использовать достаточный признак расходимости. Найдем предел *n*-го члена ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5}{n^2-n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2\neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n+2}{3n-1}$.

Решение

Общий член ряда имеет вид $a_n=\ln\frac{3n+2}{3n-1}$. Найдем предел n -ого члена ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{3n+2}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)=\ln(1+0)=\ln 1=0$.

Следовательно, требуется дополнительное исследование. Воспользуемся определением сходимости ряда. Найдем выражение для частичных сумм ряда.

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{8}{5}+\ldots+\ln\left(\frac{3n-1}{3n-4}\right)+\ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{11}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n-4}\cdot\frac{3n+2}{3n-1}\right)=\ln\left(\frac{3n+2}{2}\right)=\infty.$$

Следовательно наш ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признаки сравнения

Рассмотрим далее признаки сравнения для знакоположительных рядов. Будем считать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – эталонный, т.е. с известной сходимостью (расходимостью). В качестве эталонных рядов часто берут следующие ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ - бесконечная геометрическая прогрессия, которая сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

2. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

3. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Он сходится при s > 1 и расходится при s < 1. (О сходимости и расходимости второго и третьего эталонных рядов будет сказано позднее.)

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, и, начиная с некоторого номера *n*: $0\leq a_n \leq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+2)}$.

Решение

Возьмем в качестве эталонного ряда бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, $q=\frac{1}{3}<1$ – этот эталонный ряд сходится. Сравним члены исходного и эталонного рядов:

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{3\cdot 3},\qquad \frac{1}{3^2}>\frac{1}{3^2\cdot 4},\ \ldots\qquad \frac{1}{3^n}>\frac{1}{3^n(n+2)},\ \ldots$$

По предыдущей теореме, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+2)}$ сходится.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1} b_n$ – расходится, $b_n\geq 0$, и, начиная с некоторого номера *n,* выполняется неравенство $a_n\geq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$.

Решение

Возьмем в качестве эталонного ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n}$. Он расходится, так как это геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|=\frac{5}{2}>1$. Сравним члены исходного и эталонного рядов:

$\frac{6}{2}>\frac{5}{2}$, $\frac{26}{4}>\frac{25}{4}$, $\frac{126}{8}>\frac{125}{8}$... $\frac{5^n+1}{2^n}>\frac{5^n}{2^n}$. Следовательно, по предыдущей теореме исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$ расходится.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится (расходится), $b_n \geq 0$, и $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, где k – конечное число, отличное от нуля, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n \geq 0$, соответственно тоже сходится (расходится).

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5}{4n^4-8n-5}$.

Решение

Общий член ряда равен $a_n=\frac{n^2+5}{4n^4-8n-5}$. Возьмем за эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Он сходится ($s = 2 > 1$).

Рассмотрим $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+5)n^2}{(4n^4-8n-5)}=\frac{1}{4}\neq 0$. Следовательно, исходный ряд тоже сходится.

Замечание

Для подбора эталонных рядов используются эквивалентные бесконечно большие величины. Как известно, многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ степени n

при $n \to \infty$ эквивалентен своему старшему члену $a_n x^n$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{a_n x^n} = 1$.

При решении предыдущей задачи $n^2 + 5$ заменяем эквивалентной бесконечно большой функцией n^2, а многочлен $4n^4 - 8n - 5$ эквивалентен $4n^4$. Получаем, что ряд для сравнения имеет общее слагаемое вида $\dfrac{n^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4n^2}$, поэтому для сравнения выбран эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Признак Даламбера

Теорема. Пусть задан знакоположительный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Тогда, если $L < 1$, то ряд сходится, а если $L > 1$, то ряд расходится. Если $L = 1$, то неизвестно, сходится или расходится ряд, и вопрос о сходимости ряда надо решать другими методами.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{(n+1)!}$.

Решение

Будем использовать признак Даламбера. Имеем

$a_n = \dfrac{5^n}{(n+1)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+2)!}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+2} = 0,$$

$L = 0 < 1$ и по признаку Даламбера наш ряд сходится. Здесь было использовано свойство факториала $(n+2)! = (n+1)!(n+2)$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3+3}$.

Решение

Применим опять признак Даламбера.

$$a_n=\frac{2^n}{n^3+3}, a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3+3}\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}((n+1)^3+3)}{2^n(n^3+3)}=2\ ,$$

$L=2>1.$ По признаку Даламбера ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Решение

Применим опять признак Даламбера. $a_n=\frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot n\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot ...\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

Интегральный признак сходимости рядов

Теорема. Пусть задан числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которого монотонно убывают, то есть $a_{n+1}\le a_n$. Подберем функцию *f(x)* так, что $a_n=f(n)$. Эта функция должна быть положительна, непрерывна и монотонно убывать в области $[1,\infty)$. Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, то и исходный ряд сходится; если интеграл расходится, то и ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, s – любое положительное число.

Решение

Имеем $a_n = f(n) = \frac{1}{n^s}$. Функция $f(x) = \frac{1}{x^s}$ удовлетворяет (так же как и исследуемый ряд) всем условиям предыдущей теоремы. Исследуем сходимость несобственного интеграла при $s \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & s>1; \\ +\infty, & s<1; \end{cases}.$$

При $s=1$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = +\infty$. Следовательно, данный ряд сходится при степени $s>1$ и расходится при $s \le 1$.

Пример. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^\infty \frac{arctg(n)}{1+n^2}$.

Решение

Рассмотрим общий член ряда $a_n = \frac{arctg(n)}{n^2+1}$ и функцию *f(x)*=$\frac{arctgx}{1+x^2}$. Вычислим несобственный интеграл[4]

$$\int_1^\infty \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b arctgx d(arctgx) = \lim_{b\to\infty} \frac{(arctgx)^2}{2}\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(arctgb)^2 - (arctg1)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{3\pi^2}{16}.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ сходится. Следовательно, и исследуемый ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{(n+5)\ln(n+5)}$.

Решение

Применим при исследовании сходимости данного ряда интегральный признак[5]: $a_n = \frac{2}{(n+5)\ln(n+5)} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{(x+5)\ln(x+5)}$,

---

[4] Напомним, что $d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{2dx}{(x+5)\ln(x+5)}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{2dx}{(x+5)\ln(x+5)}=\lim_{b\to\infty}2\int\limits_1^{b}\frac{d(\ln(x+5))}{\ln(x+5)}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}2\ln\left|\ln(x+5)\right|\Big|_1^b=2\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln(b+5)\right|-2\ln\ln 6=\infty.$$

Интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$, то при $L<1$ ряд сходится, если $L>1$, то ряд расходится. Если $L=1$, то неизвестно, сходится ли ряд, и требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n=\frac{1}{n^n}$. Применим признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$. Следовательно, наш ряд сходится.

Знакопеременные ряды

Рассмотрим ряды, члены которых могут быть числами положительными, отрицательными, и равными нулю. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где u_n имеет произвольный знак. Тогда, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходится и исходный ряд. При этом говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно.

Если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то ряд называется условно сходящимся.

---

[5] Здесь мы использовали свойство дифференциала $d(\ln(x+5))=\ln'(x+5)dx=\frac{dx}{x+5}$

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2+1}$.

Решение

Общий член ряда равен $u_n=\frac{\sin n\alpha}{n^2+1}$ и имеет знак, соответствующий знаку $\sin n\alpha$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2+1}$. Этот ряд имеет только положительные знаки. Используем признак сравнения: $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как эталонный. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится. Следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2+1}$ сходится. Согласно определению, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2+1}$ сходится абсолютно.

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Частным случаем знакопеременного ряда является ***знакочередующийся ряд***: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$, где $u_n>0$.

Теорема. Если ряд знакочередующийся $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ и его члены убывают по абсолютной величине $u_1>u_2>...>u_n>...$, при этом абсолютная величина n-го члена ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то данный ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+5n+9}$.

Решение

Выделим $u_n=\frac{n+2}{n^2+5n+9}$, а $u_{n+1}=\frac{n+3}{(n+1)^2+5(n+1)+9}=\frac{n+3}{n^2+7n+15}$.

Проверим, что $u_n>u_{n+1}$ для всех n: $n\ge 1$ $\frac{n+2}{n^2+5n+9}>\frac{n+3}{n^2+7n+15}$. Решая это неравенство, мы получим более простое неравенство: $n^2+5n+3>0$. Последнее неравенство справедливо для всех n: $n\ge 1$, значит, исходное неравенство также справедливо. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}$ сходится по признаку Лейбница. Следует продолжить исследование и ответить на вопрос о характере сходимости данного ряда. Для этого надо изучить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}$, составленного из абсолютных величин.

Применим теорему признака сравнения. За эталонный ряд следует взять ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Тогда $u_n=\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}$, $v_n=\dfrac{1}{n}$.

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)n}{n^2+5n+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$.

Предел существует и не равен нулю, а эталонный ряд расходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}$ расходится, и, следовательно, наш знакочередующийся ряд сходится условно.

Большое практическое значение имеет свойство знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница.

Теорема (об оценке остатка знакочередующегося ряда). Пусть S – сумма знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, сходящегося по признаку Лейбница, а r_n – сумма его остатка после n-го члена, так что $r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+...)$, тогда $|r_n|<u_{n+1}$.

Таким образом, для сходящегося *знакочередующегося ряда* его сумма не превышает по абсолютной величине первого члена ряда $|S|\le u_1$, а остаток ряда – первого из отброшенных членов ряда.

Правило исследования знакочередующегося ряда

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $u_n>0$ исследуется по признаку Лейбница.

2) Если ряд сходится, то следует уточнить характер сходимости ряда (сходится абсолютно или условно). Для этого исследуется на сходимость ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

а) если этот вспомогательный ряд сходится, то исходный знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится абсолютно;

б) если этот вспомогательный ряд расходится, то исходный знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится условно.

3) Если $\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$, то исходный знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ расходится по достаточному признаку расходимости.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$.

Решение

Этот ряд знакочередующийся, поэтому начнем с признака Лейбница:

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{2n-1}} > u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}},\ \lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}} = 0.$$

Следовательно, наш ряд сходится. Далее решим вопрос, как он сходится: абсолютно или условно. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$.

Возьмем эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Он сходится, так как степень s, в которую возводится n, равна 1,5 > 1. Сравним ряды: ряд из модулей и выбранный эталонный ряд. Тогда $u_n = \frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$ и $v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Найдем $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$.

Значит, наш ряд из модулей сходится. Но тогда исходный ряд сходится абсолютно.

Замечание

В некоторых задачах проверка одного из условий сходимости ряда по признаку Лейбница может представлять существенные сложности. Тогда следует попробовать сразу исследовать ряд из абсолютных величин на сходимость с помощью изученных ранее признаков сходимости знакоположительных рядов. Если окажется, что полученный ряд сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Решение

Ряд знакочередующийся, но вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{n!}$ является довольно сложной задачей, так как применение правила Лопиталя невозможно.

Переходим к исследованию ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n!}$. Применяем признак Даламбера и находим отношение последующего члена к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0.$$

Так как предел меньше 1, то ряд из модулей сходится и, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{(n+1)(2n)!}$ с точностью до 0,00001.

Решение

У данного ряда $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(2n)!}$. Члены этого ряда удовлетворяют условиям признака Лейбница: члены ряда убывают: $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{72} < \dfrac{1}{2880} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n)!} = 0$. Следовательно данный ряд сходится. Для того чтобы определить количество членов ряда в его сумме с заданной точностью, найдем его члены и будем вычислять до тех пор, пока не найдем член, по модулю меньший, чем $0{,}0001 = \dfrac{1}{10000}$:

$u_1 = \frac{1}{4} > \frac{1}{10000}$, $u_2 = \frac{1}{72} > \frac{1}{10000}$, $u_3 = \frac{1}{2880} > \frac{1}{10000}$, $u_4 = \frac{1}{201600} < \frac{1}{10000}$,

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно вычислить S_3: $|S - S_3| < u_4 < 0{,}0001$, т.е. достаточно взять 3 первых члена ряда: $S \approx S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} = -\frac{681}{2880} \approx -0{,}2365 \pm 10^{-4}$.

11.2. Степенные ряды

Область сходимости степенного ряда

Если $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ – постоянные коэффициенты, то функциональный ряд вида $a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (*) называется степенным рядом. В частности, если $x_0 = 0$, то степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ (**).

При исследовании сходимости функционального ряда определяют область сходимости данного ряда, то есть находят те значения *x*, при которых ряд сходится. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример. Частный случай степенного ряда – геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ Она сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Здесь области сходимости – интервал $(-1; 1)$, а сумма ряда $S(x) = \frac{1}{1 - x}$ определена на этом интервале.

Пример. Ряд с общим членом $a_n(x) = \frac{1}{x^n}$ – также геометрическая прогрессия. Если ее знаменатель $q = \frac{1}{x}$ по модулю меньше единицы $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, то прогрессия будет сходиться, а при $\left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ – расходиться, т.е. область сходимости этого ряда – объединение двух интервалов: $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{2n}$ является знакоположительным при любом значении x. Область сходимости данного ряда содержит только точку $x=0$, так как при $x \neq 0$ не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Надо отметить, что в точке $x=0$ всякий степенной ряд (**) сходится. Сходимость степенного ряда в остальных точках определяется с помощью основной теоремы (теоремы Абеля) в теории степенных рядов.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (**) сходится при $x = x_0$, то он будет сходиться для всех x таких, что $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд (**) расходится при $x = x_0$, то он будет расходиться при любом x: $|x| > |x_0|$.

Симметричный относительно начала координат интервал $(-R,\ R)$, в каждой точке которого ряд сходится, называют интервалом сходимости степенного ряда, R – радиусом сходимости.

Теорема (об интервале сходимости) Для любого степенного ряда вида (**) существует интервал $(-R,\ R)$, такой, что во всех точках этого интервала ряд сходится (для ЗЧР – сходится абсолютно), а в точках, для которых $|x| > R$, ряд расходится.

Радиус сходимости степенного ряда можно найти с помощью признака Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Действительно, по признаку Даламбера ряд сходится (а для ЗЧР – вспомогательный знакопостоянный ряд, составленный из абсолютных значений членов ЗЧР) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Т.е. ряд сходится при тех значениях x, для которых $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (в предположении, что такие пределы существуют).

Радиус сходимости степенного ряда можно найти и с помощью радикального признака Коши $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

В точках $x=R$, $x=-R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Поэтому, чтобы уточнить область сходимости степенного ряда, следует дополнительно исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

Пример. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ найти интервал сходимости и исследовать сходимость на концах.

Решение

Пользуясь признаком Даламбера, находим $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right| = |x|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|$. Ряд абсолютно сходится при условии $|x|<1$.

Подставим в исходный ряд $x=1$ и получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходимость которого была установлена ранее[6]. Следовательно, точка $x=1$ входит в область сходимости.

Подставим $x=-1$ и получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, абсолютная сходимость которого вытекает из сходимости аналогичного знакоположительного ряда. Тогда и точка $x=-1$ входит в область сходимости. Итак, область сходимости степенного ряда – отрезок $-1\le x\le 1$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

Решение

Этот ряд является знакоположительным при любом значении x. Найдем его область сходимости (модуль опускаем, так как ряд знакоположительный).

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}n!}{(n+1)!x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n+1} = 0<1$ при любом x. Это значит, что область сходимости данного степенного ряда – вся числовая ось.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{n}(x-2)^n$.

[6] См. раздел «3.1. Числовые ряды».

Решение

Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\sin^2\frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}\sin^2\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\sin^2\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=1.$$

Тогда $|x-2|<1$, или $-1<x-2<1$, т.е. $1<x<3$.

Выясним поведение ряда на концах интервала сходимости.

Если $x=1$, то ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{n}(-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$.

Так как при любом $n\ge 1$ $\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$, $\sin^2\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ есть сходящийся гармонический ряд, то признаку сравнения данный ряд сходится.

На правом конце $x=3$ степенной ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{n}$, т.е. является знакочередующимся рядом и по достаточному признаку сходимости знакопеременного ряда сходится, т.к. сходится ряд из модулей. Итак, область сходимости исходного ряда $1\le x\le 3$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{(2n+1)^4\cdot\sqrt{5^n}}$.

Решение

Сделаем замену $t=x^2$, тогда ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n t^n}{(2n+1)^4\cdot\sqrt{5^n}}$. Найдем интервал сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|t|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n+3)^4\sqrt{5^{n+1}}}\cdot\frac{(2n+1)^4\sqrt{5^n}}{3^n}=|t|\frac{3}{\sqrt{5}}<1.$$

Тогда интервал сходимости $-\frac{\sqrt{5}}{3}<t<\frac{\sqrt{5}}{3}$. На концах интервала: при $t=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^4}$ и сходится по признаку Лейбница; при $t=\frac{\sqrt{5}}{3}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ и он сходится как гармонический ряд. Итак область сходимости – отрезок $-\frac{\sqrt{5}}{3}\le t\le\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Возвращаясь к переменной x получим $-\frac{\sqrt{5}}{3}\le x^2\le\frac{\sqrt{5}}{3}$, откуда $-\frac{\sqrt[4]{45}}{3}\le x\le\frac{\sqrt[4]{45}}{3}$.

Область сходимости произвольного степенного ряда

Область сходимости степенного ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (*), представляющего сумму степеней $(x - x_0)$, это интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке $x = x_0$ и радиусом сходимости R, где радиус сходимости определяется по приведенным выше формулам, как при $x_0 = 0$.

Нахождение области сходимости ряда (*), как правило, проводят с помощью признака Даламбера, для исследования сходимости на концах интервала используют другие признаки сходимости числовых рядов (признаки сравнения, интегральный признак, признак Лейбница). Использование признака Даламбера или радикального признака Коши на концах интервала сходимости не дает информации о сходимости ряда, так как всегда получается 1.

Пример. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n \cdot n}{3^n (n^3 - 2)}$, исследовать сходимость на концах интервала.

Решение

Обозначим $u_n = \frac{\left|(x-1)^n\right| \cdot n}{3^n \cdot (n^3 - 2)}$, $u_{n+1} = \frac{\left|(x-1)^{n+1}\right|(n+1)}{3^{n+1}\left((n+1)^3 - 2\right)}$. Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x-1|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 - 2)\cdot(n+1)}{n \cdot \left((n+1)^3 - 2\right)} = \frac{|x-1|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4} = \frac{|x-1|}{3} < 1, \qquad |x-1| < 3,$$

$-3 < x - 1 < 3$, тогда $-2 < x < 4$.

Исследуем сходимость на концах найденного интервала: $x = -2$, подставим это значение x в наш степенной ряд и получим следующий числовой ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n n}{3^n (n^3 - 2)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 - 2}$.

Этот ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница для исследования его сходимости. $u_n = \frac{n}{n^3 - 2}$ и $u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^3 - 2}$. Имеем

$$u_n = \frac{n}{n^3 - 2} > u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^3 - 2} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0.$$

Следовательно, наш ряд сходится.

Определим, как сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3-2}$. Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^3-2}$. Эталонный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Применим теорему признака сравнения: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3-2}=1\neq 0$. Следовательно, ряд из модулей сходится. Тогда исходный ряд сходится абсолютно.

Возьмем x = 4. При подстановке в степенной ряд получим знакоположительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^3-2}$, сходимость которого была доказана ранее.

Ответ: Область сходимости степенного ряда: $[-2;\,4]$.

Пример. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$ и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}5^n\cdot n}{(x+1)^n 5^{n+1}\cdot(n+1)}\right| = \frac{|x+1|}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится в промежутке $|x+1|<5$, т.е. $-6<x<4$. Исследуем сходимость на концах. Подставим в исходный ряд $x=-6$, получим числовой ряд с общим членом $u_n=\frac{(-5)^n}{n\cdot 5^n}=\frac{(-1)^n}{n}$; по признаку Лейбница ряд сходится (условно). При $x=4$ получаем гармонический ряд с общим членом $u_n=\frac{1}{n}$, а следовательно, расходящийся.

Итак, на левом конце интервала сходимости наш ряд сходится условно, во всех внутренних точках интервала (–6, 4) сходимость абсолютная, на правом конце ряд расходится. Таким образом, область сходимости степенного ряда есть множество [–6, 4).

Пример. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n-2}\right)^n x^n$.

Решение. $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+3}{3n-2}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+3}=\frac{3}{4}$.

Пример. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2} x^n$.

Решение. $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$.

Свойства степенного ряда

Далее сформулируем ряд свойств степенного ряда. Обозначим через $S(x)$ сумму степенного ряда: $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$. (***)

Пусть радиус сходимости этого ряда известен и равен R.

Свойство 1 Сумма $S(x)$ степенного ряда (***) непрерывна в каждой точке области сходимости, в частности, для всех x из интервала $(-R;\,R)$.

Свойство 2

Ряд $a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...$, полученный из ряда (***) почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R и сумму, равную производной функции $S(x)$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=S'(x)$ при $x\in(-R;R)$.

Свойство 3

Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_1,x_2]$, принадлежащем области сходимости исходного ряда, то есть при условии выполнения неравенства - $R<x_1<x_2<R$.

В частности при $0<x<R$ выполняется равенство $\int_0^x S(t)dt=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+...+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$.

Пример. Найти сумму ряда $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-...(-1)^n(2n)x^{2n-1}$ при $x\in(-1;1)$

.

Решение

Почленно проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0;x]$:

$$\int_0^x(-2t+4t^3-6t^5+8t^7-...(-1)^{2n-1}(2n)t^{2n-1})dt=-x^2+x^4-x^6+x^8-...+(-1)^{2n-1}x^{2n}.$$

Это геометрический ряд, сумма которого равна $S(x)=\dfrac{b_1}{1-q}$, где $b_1=-x^2$, $q=-x^2$. Тогда $S(x)=\dfrac{-x^2}{1+x^2}$. Возвращаясь к исходному ряду, находим его сумму дифференцированием $S(x)$. Итак, сумма исходного ряда равна $S'(x)=\left(\dfrac{-x^2}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Пример. Найти сумму ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...$при $x\in(-1;1)$.

Решение

Почленно продифференцируем ряд в интервале сходимости

$(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...)'=1+x+x^2+...$. Найдем сумму данного геометрического ряда: $S'(x)=\dfrac{b_1}{1-q}$, где $b_1=1$, $q=x$. Тогда $S'(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Сумму исходного ряда находим интегрированием на отрезке $[0;x]$:

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dt=-\ln|1-x|\Big|_0^x=-\ln|1-x|.$$

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Если функция $y=f(x)$ имеет производные любого порядка в точке x_0 и в ее окрестности, то для этой функции можно составить ряд Тейлора:

$$f(x)\to f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+... .$$

Если $x_0=0$, то получаем ряд Маклорена $f(x)\to f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+... .$

Будем использовать ряды Тейлора для приближенных вычислений значений функций, определенных интегралов, а также при решении дифференциальных уравнений. Для этого запишем ряды Маклорена для некоторых известных функций и интервалы сходимости этих рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad (-\infty; +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad (-\infty; +\infty),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \qquad (-\infty; +\infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-(n-1))}{n!}x^n + ... \ (-1; 1),$$

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \qquad [-1; 1],$$

$$arcsin\, x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + ... + \frac{1 \cdot 3 \cdot ...(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ...(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \qquad [-1; 1],$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + ... \qquad (-1; 1].$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена функции $y = \sqrt{x+1}$ $(x_0 = 0)$.

Решение. Используем разложение в ряд функции $(1+x)^m$, где $m = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + ...$$

Здесь x – любое число из отрезка (–1: 1).

Пример. Разложить в ряд по степеням (x–1) функцию $y = e^{3x}$.

Решение.

Представим данную функцию в виде $y = e^{3x} = e^3 \cdot e^{3(x-1)}$. Используем разложение функций в ряд Маклорена

$$y = e^{3(x-1)} = 1 + 3(x-1) + \frac{3^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{3^3}{3!}(x-1)^3 + ... + \frac{3^n (x-1)^n}{n!} + ...$$

Откуда $y = e^{3x} = e^3 e^{3(x-1)} = e^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!}$. Найдем область сходимости ряда, исходя из условия области сходимости ряда $y = e^x : (-\infty; \infty)$. Тогда $x : -\infty < 3(x-1) < \infty$, то есть $x : -\infty < x < \infty$.

Пример. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = e^x \ln(1+x)$.

Решение

В интервале (–1; 1) существуют разложения в ряд Маклорена функций $y = e^x$ и $y = \ln(1+x)$. По правилу умножения рядов получим:

$$y = e^x \ln(1+x) = 1 \cdot x + (1 \cdot (-\frac{x^2}{2}) + x \cdot x) + (1 \cdot \frac{x^3}{3} + x(-\frac{x^2}{2}) + \frac{x^2}{2!}x) \quad + \ldots =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Пример. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \arcsin x$.

Решение

Заметим, что производная данной функции равна $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и данная функция может быть разложена в степенной ряд: $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3x^4}{2^2 \cdot 2!} + \ldots$

Учитывая, что $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда искомый ряд найдем почленным интегрированием данного ряда на отрезке $[0; x]$. Итак, $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^x dx + \frac{1}{2}\int\limits_o^x x^2 dx + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\int\limits_0^x x^4 dx + \ldots = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}x^5 + \ldots$

Приближенные вычисления с помощью рядов

Вычисление значений функций

Рассмотрим на примере, как можно вычислить значение функции с использованием ее разложения в ряд Тейлора.

Пример. Вычислить $\sin 5^0$ с точностью до $\Delta = 10^{-6}$.

Решение

Прежде всего, надо перевести 5^0 в радианы: $\frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}$;

Затем запишем разложение *sin x* в ряд Маклорена и вычислим значение ряда в точке $x = \frac{\pi}{36}$: $\sin\frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{(\pi)^3}{(36)^3} + \frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - \ldots$

Ряд сходящийся, знакочередующийся, члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, поэтому остаточный член ряда не превышает первого из отброшенных членов ряда (согласно теореме Лейбница).

Оценим третий член ряда: $\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < \frac{1}{5!}\cdot(0{,}1)^5 = \frac{1}{120}\cdot 10^{-5} = \frac{5}{6}\cdot 10^{-7} < \Delta$.

Следовательно, для вычисления $\sin 5^0$ с указанной точностью достаточно оставить два члена ряда: $\sin\frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 = 0{,}0871558 \pm 10^{-6}$.

Замечание. Нам нужно оставить в каждом члене ряда 7 знаков после запятой, чтобы не ухудшить точность вычисления.

Вычисление интегралов с помощью рядов

Решим задачу вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$, сходящийся в некотором промежутке $(-R;\ R)$, и если отрезок $[a;b]$ принадлежит этому промежутку, то имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = c_0 x\Big|_a^b + c_1 \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$. Поэтому для вычисления заданного интеграла с заданной степенью точности достаточно с нужной точностью найти сумму числового ряда, стоящего в правой части последнего равенства. Рассмотрим на конкретном примере применение рядов Тейлора при вычислении интегралов.

Пример. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, оставив три члена ряда в разложении e^x, оценить погрешность вычислений.

Решение

Используем разложение в ряд функции e^x и заменим x на $(-x^2)$. Запишем ряд Тейлора для нашей подынтегральной функции:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\ ,$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \ldots.$$

Если мы оставим 3 члена ряда, то, поскольку ряд знакочередующийся, погрешность вычисления оценивается модулем четвертого члена ряда, т.е.

$$\Delta < \frac{1}{42} = 0,024 < 0,03 .$$

Тогда, оставив три слагаемых, мы получим

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - 0,333 + 0,1 = 0,767 \pm 0,03 .$$

Пример. Вычислить с точностью до 10^{-4} интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение

Используя разложение в ряд sin *x*, находим: $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$.

Поэтому $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right)\Bigg|_0^1 =$

$1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$.

Ищем слагаемое, меньшее заданной точности. Им будет $\frac{1}{7 \cdot 7!} = 0,00003 < 10^{-4}$. Тогда интеграл приближенно (с заданной точностью) равен сумме трех первых слагаемых:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right) \pm 10^{-4} = 0,9461 \pm 10^{-4} .$$

Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Часто в задачах прикладного характера приходится решать дифференциальные уравнения, решения которых не являются элементарными функциями или не решаются хорошо известными методами. Тогда решения находят в виде разложения функции в степенной ряд. Существуют два подхода при нахождении этого ряда. Рассмотрим их на примерах.

Метод последовательного дифференцирования. Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Обозначим через $y(x)$ это решение. Представим искомое решение в виде ряда Тейлора по степеням разности $x - x_0$: $y(x) = y(x_0) + \dfrac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$. Начальные условия определяют первый из коэффициентов ряда $y(x_0) = y_0$. Подставив в правую часть уравнения $x = x_0$, найдем $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Для отыскания $y''(x_0)$ дифференцируем заданное уравнение по аргументу x и вновь подставляем в полученное равенство $x = x_0$. Продолжаем этот процесс и найдем остальные коэффициенты разложения функции в ряд.

Пример. Найти решение уравнения $y' = 3xy - e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, взяв четыре члена разложения, отличные от нуля.

Решение

Найдем решение в виде отрезка степенного ряда $y \approx y(0) + y'(0)x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{y'''(0)}{3!}x^3$, где $y(0) = 1$, а $y'(0) = 3 \cdot 0 \cdot 1 - \ e^0 \ = -1$.

Далее будем дифференцировать заданное уравнение по переменной x:

$$y'' = 3y + 3x \cdot y' - 2e^{2x}, \quad y''(0) = 3 - 2 = 1,$$

$$y''' = 3y' + 3y' + 3xy'' - 4e^{2x}, \quad y'''(0) = -6 - 4 = -10.$$

Подставим найденные значения в ряд. Тогда функция будет иметь вид:

$$y(x) \approx 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{10x^3}{3!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}.$$

Пример. Найти приближенное решение дифференциального уравнения $y'' = y^2 + x$, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=1, $y'(0) = 0$, взяв первые три члена разложения в степенной ряд.

Решение

Найдем решение в виде отрезка степенного ряда

$y = y(0) + \ y'(0)x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{y'''(0)}{3!}x^3$, где нам заданы $y(0), y'(0)$ и легко найти $y''(0) = 1$.

Выполним дифференцирование исходного уравнения и найдем значение производных $y'''(0), y^{(\mathrm{IV})}(0)$:

$$y''' = 2yy' + 1, \qquad y'''(0) = 2\cdot 1\cdot 0 + 1 = 1;$$

$$y^{IV} = 2yy'' + 2y'y', \qquad y^{IV}(0) = 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 = 2.$$

Наш ряд примет вид: $y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$.

Метод неопределенных коэффициентов. В данном методе решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ или $y'' = f(x, y, y')$ представляют степенным рядом $y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2 \ldots$ – неопределенные коэффициенты. Свойства степенного ряда позволяют дифференцировать его:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \ldots.$$

Подставим полученные ряды в дифференциальное уравнение вместо y и производных и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в его левой и правой частях. Получим систему алгебраических уравнений с неизвестными $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$

Пример. Найти приближенное решение дифференциального уравнения $y'' = y + x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, взяв первые четыре ненулевые члена разложения решения в степенной ряд.

Решение

Будем искать решение уравнения в виде

$$y(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 .$$

Положив $x_0 = 0$, найдем $a_0 = y(0) = 1$. Для $y'(x)$ и $y''(x)$ получаем разложения $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$, $y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x.$

Положив в первом из них $x_0 = 0$, найдем $a_1 = y'(0) = 0$.

Подставив полученные ряды вместо y и y'' в дифференциальное уравнение, получим: $2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 = x + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, откуда $2a_2 = a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$; $6a_3 = 1 + a_1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$; $12a_4 = a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{24}$.

Найденные значения коэффициентов подставляем в ряд $y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$.

11.3. Ряды Фурье

Ряд Фурье назван в честь французского математика Жана Батиста Жозефа Фурье (1768 –1830), который внес значительный вклад в изучение тригонометрических рядов после работ Леонарда Эйлера, Жана Лерона д'Аламбера и Даниила Бернулли. Первоначально ученый нашел применение своему методу в изучении и объяснении механизмов теплопроводности.

Тригонометрические ряды Фурье

Функция $y = f(x)$, $x \in D$ называется периодической с периодом $T > 0$, если для любого $x \in D$ выполняются соотношения: $x + T \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. Для изучения периодических процессов функция раскладывается в тригонометрические ряды, называемые рядами Фурье.

Пример. Найти период функций $y = \cos{(3x)}$, $y = \sin{(3x)}$.

Решение. $y_1(x) = \cos(3x) = \cos(3x + 2\pi) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = y_1(x + \mathrm{T})$, $y_2(x) = \sin(3x) = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = y_2(x + \mathrm{T})$, где $T = \frac{2\pi}{3}$. Такие функции называются простыми гармониками, здесь $\omega = 3$ называется (угловой) частотой колебания.

Пример. Найти период гармонического колебания, заданного функцией $\mathrm{y} = \mathrm{A}\sin(\omega\mathrm{t} + \varphi_0)$, где A – амплитуда, ω – частота, φ_0 – начальная фаза.

С одной стороны, $y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin(\omega t + 2\pi + \varphi_0) = A\sin\left(\omega\left(\mathrm{t} + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right)$ – здесь видно, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

С другой стороны, по формуле синуса суммы гармоническое колебание раскладывается на сумму простых гармоник $y(x) = A\sin(\omega\mathrm{t} + \varphi_0) = (A\cos\varphi_0)\sin(\omega\mathrm{t}) + (A\sin\varphi_0)\cos(\omega\mathrm{t}) = a\cos(\omega\mathrm{t}) + b\sin(\omega\mathrm{t})$. Так как (см. предыдущий пример) обе гармоники имеют одинаковый период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, этим свойством обладает и рассматриваемая функция.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда вспомним следующее свойство определенного интеграла по симметричному промежутку:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f - \text{нечетная}, \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f - \text{четная}. \end{cases}$$

На основе этой формулы вычисляются следующие интегралы от простых гармоник на отрезках [-π; π] и [0; π]:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, & (n \neq 0) \\ x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, & (\mathrm{n} = 0) \end{cases}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0.$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\ \ dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)dx =$

$$= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \pi, & (m = n) \end{cases}.$$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\ \ dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx =$

$$= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \pi, & (m = n) \end{cases}.$$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\ \ dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx = 0.$

Пусть $y = f(x)$ произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция разлагается в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Найдем формулы для определения коэффициентов ряда по исходной периодической функции. Предварительно установим следующие факты:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0$
(так как все слагаемые, кроме первого, оказываются равны нулю).

2. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx =$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx\ + b_n \sin nx \cos mx))\, dx =$
$\int_{-\pi}^{\pi} a_m \cos mx \cos mx\, dx = \pi\, a_m.$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx =$
$= \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \sin mx\ + b_n \sin nx \sin mx))dx =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} b_m \sin mx \sin mx\, dx = \pi\, b_m.$

Из полученных соотношений запишем формулы для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\,.$$

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд следующего вида: $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, числа $a_0,\ a_n,\ b_n$ называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

При каких условиях вместо стрелки можно поставить знак равенства? На этот вопрос отвечает следующая теорема **(**Дирихле). Пусть 2π – периодическая функция $f(x)$ на отрезке [-π; π] удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна (непрерывна на всем отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода).

2. $f(x)$ кусочно-монотонна (монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых она будет монотонна).

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на отрезке [-π; π]:

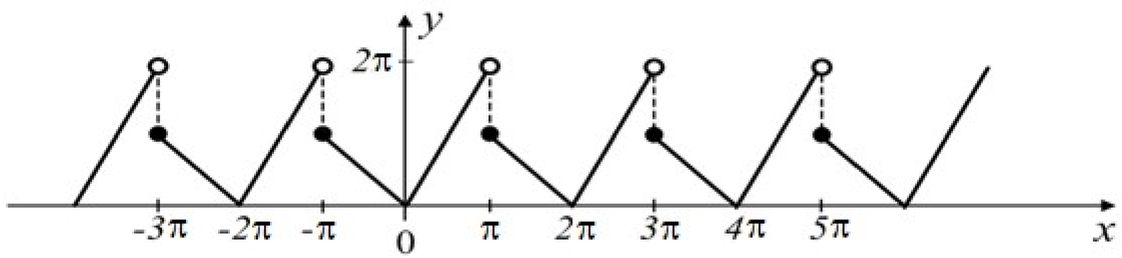
1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает со значением функции $S(x)=f(x)$.

2. В каждой точке разрыва x_0 выполняется равенство

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

3. В концах отрезка $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \pi, \\ -x, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$



Решение.

Вычислим коэффициенты ряды Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} 2xdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + x^2|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx\right) = \cdots$$

По формуле интегрирования по частям вычислим неопределенный интеграл

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int x\,d(\sin nx) = \begin{bmatrix} u = x \\ v = \sin nx \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\left(x\sin nx - \int \sin nx\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{n}\left(x\sin nx - \frac{\cos nx}{n}\right) + \mathrm{C}$$

$$a_n = \cdots = -\frac{1}{\pi n}\left(x\sin nx + \frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi n}\left(x\sin nx + \frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{3}{\pi n^2}(1 - (-1)^n).$$

Аналогично вычисляется коэффициент b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x\sin nx\,dx\right) = \cdots$$

По формуле интегрирования по частям вычислим неопределенный интеграл

$$\int x\sin nx\,dx = \frac{-1}{n}\int x\,d(\cos nx) = \begin{bmatrix} u = x \\ v = \cos nx \end{bmatrix} = \frac{-1}{n}\left(x\cos nx - \int \cos nx\,dx\right) =$$

$$\frac{-1}{n}\left(x\cos nx - \frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$b_n = \cdots = \frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx - \frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx - \frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi; \pi]$, поэтому при $-\pi < x < \pi$ имеет место равенство

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

Однако, при $x = \pm\pi$, функция разрывна, а ряд Фурье сходится к значению $S(x) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если функция $f(x)$ четная, то $b_n = 0$ и ее ряд Фурье имеет упрощенный вид $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$.

Если функция $f(x)$ нечетная, то, наоборот, $a_n = 0$ и ее ряд Фурье имеет вид $f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$.

Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-L;\ L]$ и имеет период $2L$, вообще говоря, отличный от 2π, то ее ряд Фурье имеет вид

$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$, где

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной, положим $x = \frac{L}{\pi}t$. Тогда функция $f(x)$ будет иметь в вид $f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right) = g(t)$, где функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Период функции $g(t)$ равен $T = 2\pi$. Действительно, $g(t+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = g(t)$.

Разложим функцию $g(t)$ в ряд Фурье.

$$g(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\, dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\, dt.$$

Переписывая полученный для функции $g(t)$ ряд по переменной x, получим $g(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)dx,\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Примечание.

Если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)dx$, $\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$.

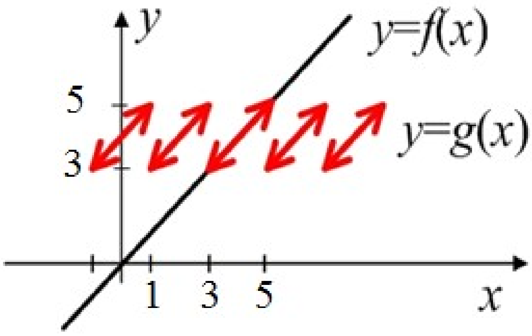
Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$. Выберем в нем конечный интервал $(a; b)$. Под разложением в ряд Фурье непериодической функции в промежутке $(a; b)$ понимают разложение в ряд Фурье такой периодической функции $y = g(x)$ с периодом $2L = b - a$, которая на промежутке $(a; b)$ совпадает с заданной функцией $y = f(x)$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в промежутке (3; 5).



Решение

Вычислим коэффициенты ряда Фурье. Предварительно установим условный «период»: $2L = b - a = 5 - 3 = 2, L = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_3^5 x dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_3^5 x\cos\frac{n\pi x}{L} dx = \int_3^5 x\cos n\pi x\, dx = 0,$$

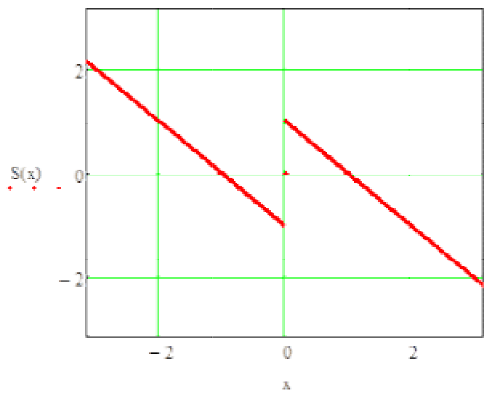
$$b_n = \frac{1}{L}\int_3^5 x\sin\frac{n\pi x}{L} dx = \int_3^5 x\sin n\pi x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}2}{\pi n}.$$

Получим, что для любой точки непрерывности функции $g(x)$ верно разложение $f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}\sin(n\pi x)$.

Заметим, что разложение в ряд Фурье функции произвольного вида является сложной задачей, поскольку для её решения требуется вычислить множества сложных определенных интегралов. Поэтому на практике для вычислений можно использовать прикладные пакеты программ. Рассмотрим пример разложения в ряд Фурье функции с использованием пакета Mathcad.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $S(x) = \begin{cases} -1 - x \text{ для } x < 0, \\ 0 \text{ для } x = 0, \\ 1 - x \text{ для } x > 0. \end{cases}$ с периодом 2π на отрезке $[-\pi; \pi]$

Решение. График функции $S(x)$ построим с помощью Mathcad (см. рисунок):



Отрезки ряда Фурье для функции $S(x)$ на $-\pi \le x \le \pi$ при разложении с ограниченным количеством слагаемых n примут вид:

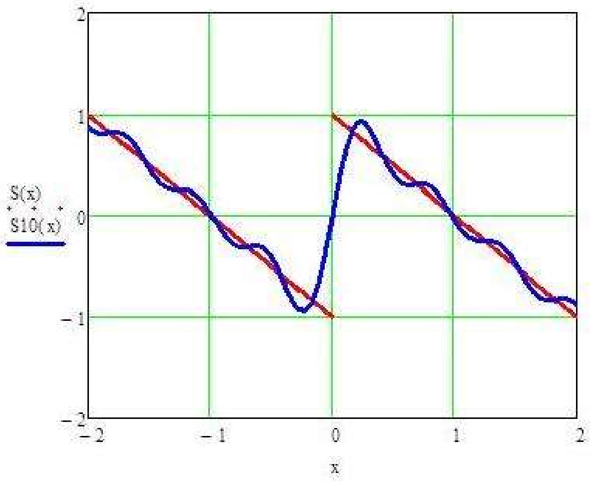
$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$.

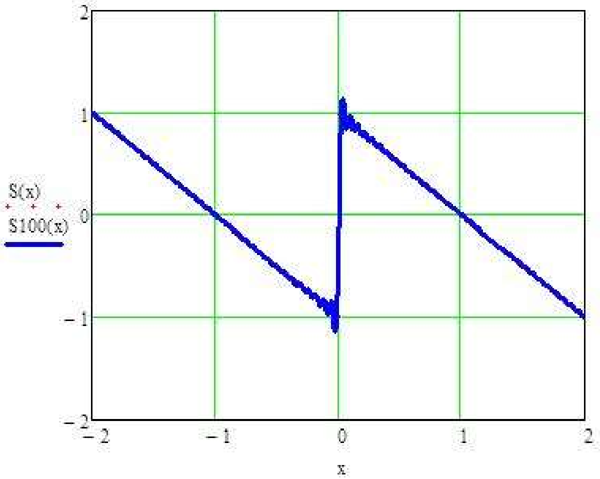
Определим коэффициенты Фурье в Mathcad:

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

Построим и визуально сравним графики для $S_n(x)$ отрезков ряда Фурье для n=10 и n=100.





Пример. Функцию $f(x) = x^2$ разложить на отрезке $[-\pi\,;\,\pi]$ в ряд Фурье. Используя разложения найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Решение

Вычислим коэффициенты ряда Фурье по формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$. Вначале с учетом четности интегрируемой функции найдем коэффициент a_0: $\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$. Для вычисления коэффициентов a_n применим формулу интегрирования по частям:

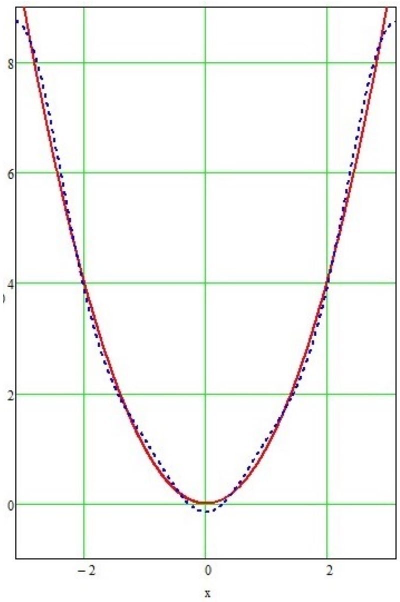
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi}\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Учитывая четность функции $f(x)=x^2$ и свойство интеграла от нечетной функции по симметричному промежутку получим $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0.$

Таким образом, разложение в ряд Фурье функция $f(x)=x^2$ имеет вид:
$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2},\ [-\pi\,;\pi].$$

График функции $f(x)=x^2$ и частичной суммы ряда Фурье $S_3(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{9}\right)$ представлен на рисунке справа.



Используя разложение функции в ряд Фурье, найдем значение суммы числового ряда. Подставим $x = 0$ в ряд разложения. Получим $0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Отсюда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Пример. Используя разложение функции $f(x)=x$ в ряд Фурье $x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, $[-\pi\,;\pi]$, получить разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi\,;\pi]$ функций x^2, x^3. (разложение функции $f(x)=x^2$, $[-\pi\,;\pi]$ в ряд Фурье будет получено способом, отличным от продемонстрированного в предыдущем примере).

Решение

Для решения задачи используем свойство почленного интегрирования функционального ряда. Проинтегрируем равенство $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ почленно, получим

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\frac{\sin nx}{n}dx =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}-(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Отсюда имеем $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$ $[-\pi\,;\pi]$.

Как видно, полученное выражение совпадает с тем, которое было получено путем разложения в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ по формулам для коэффициентов a_0, a_n.

Повторно применим к полученному ряду почленное интегрирование $\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3}$. Отсюда получим ряд Фурье для функции $f(x) = x^3$.

$$x^3 = \pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3}.$$

Комплексная форма[7] ряда Фурье

Ряды Фурье часто используются в более компактной «комплексной» форме записи $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Здесь, по прежнему, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, но остальные (комплексные) коэффициенты ряда вычисляются по общей формуле $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-in}\ dx, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Как и в случае тригонометрических рядов, ряд сходится к разлагаемой функции (то есть справедливо равенство между функцией и соответствующим ей рядом Фурье) в точках непрерывности на интервале ($-\ \pi$; π), а функция предполагается периодической с периодом T=2π.

[7] Подробнее о комплекснозначных функциях, связи между показательной функцией мнимого аргумента и тригонометрическими функциями см. далее в разделе «4. Основы теории функций комплексного переменного».

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-L; L]$, то комплексная форма её ряда Фурье $f(x) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{L}}$, где $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{L}} dx$, $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots)$

В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{\frac{inx}{L}}$ называют гармониками, c_n – комплексными амплитудами гармоник, а их совокупность $\{c_1, c_2, \dots c_n, \dots\}$ – амплитудным спектром, числа $\omega_n = \frac{\pi n}{L}$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots)$ – волновыми числами разлагаемой в ряд функции.

Пример. Построить ряд Фурье в комплексной форме для периодической ($T = 2$) функции, которая на $[-1; 1]$ задается формулой $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;\ 0) \\ 1, & x \in [0;\ 1] \end{cases}$ – простейшего периодического сигнала, чередующего равные промежутки пауз и постоянного ненулевого значения.

Решение[8]

У нас L=1, значит

а) для $n \neq 0$: $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{L}} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-i\pi} \quad dx = -\left.\frac{e^{-i\pi nx}}{2\pi ni}\right|_{0}^{1} = \frac{-1}{2\pi ni}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) = \frac{i}{2\pi n}(\cos \pi n - i\ \sin \pi n - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} i$;

б) для $n = 0$: $c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx = \frac{1}{2}$.

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ на $(-1; 1)$, то есть при $x \neq 0$, справедливо равенство

$$f(x) = S(x) = \frac{1}{2} + i \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{n=\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} e^{i\pi nx} = \frac{1}{2} - i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} - \frac{e^{-i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} - \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi} \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} + \frac{e^{3i\pi x} - e^{-3i\pi x}}{3 \cdot 2i} \dots\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \cdots\right);$$

При $x = 0$ функция $f(x)$ испытывает разрыв, а $S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Замечание. Исходная функция на $(-1; 1)$ симметрична относительно точки $(0; 1/2)$ и её разложение сохранило это свойство.

[8] В преобразованиях использованы свойства мнимой единицы, четности/нечетности тригонометрических функций, формулы Эйлера $e^{-i\varphi} = \cos \varphi + i\ \sin \varphi$, $sin\, \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.