12. Основы теории функций комплексного переменного

При рассмотрении квадратных уравнений математики разных эпох встречались с комплексными числами. Однако мнимые решения отбрасывались как несуществующие. Лишь в XVI веке в работах Дж.Кардано, Р.Бомбелли при решении кубических уравнений были получены формулы, где присутствовали корни из отрицательных чисел, а также сформулированы четыре арифметические операции над такими числами. Сам термин «комплексные числа» появился уже в XIX веке благодаря К.Гауссу, который первым предложил их геометрическое представление. Дальнейшее развитие комплексных чисел привело к образованию целой прикладной математической дисциплины – теории функции комплексной переменной.

В настоящее время комплексные числа имеют широкое применение в науке и технике. Многие задачи гидродинамики, аэромеханики и других научных направлений решаются с использованием аппарата теории функции комплексного переменного. Комплексные числа являются важными единицами в электротехнике и радиотехнике, квантовой механике и картографии. Поэтому любой студент, обучающийся на технических специальностях, обязан владеть знаниями и навыками работы, как с самими комплексными числами, так и с функциями комплексного переменного.

12.1. Комплексные числа

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел $\left(x;y\right)$, которая формирует алгебраическую форму записи комплексного числа:

$$z\left(x;y\right)=x+i\cdot y\,.$$

В этой формуле i называется мнимой единицей и удовлетворяет равенству $i^2=-1$, x – действительная часть комплексного числа, записывают $x=\operatorname{Re}z$; y – мнимая часть комплексного числа, записывают $y=\operatorname{Im}z$.

Два комплексных числа $z_1=x_1+i\cdot y_1$ и $z_2=x_2+i\cdot y_2$ называются *равными* ($z_1=z_2$) тогда и только тогда, когда равны между собой действительные и мнимые части ($x_1=x_2,\, y_1=y_2$).

Комплекссное число $\overline{z}=x-i\cdot y$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z=x+i\cdot y$. Оба таких чисел также называются *сопряженными друг к другу*.

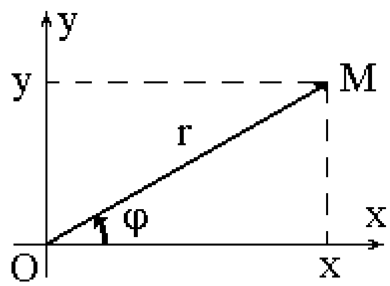
Комплексные числа легко получаются при решении обычных квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Пример. Решить квадратное уравнение $z^2+2z+5=0$ на множестве комплексных чисел.

Решение. Запишем дискриминант: $D=2^2-4\cdot 1\cdot 5=-16$. Получаем два решения: $z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-1\cdot 16}}{2}=\frac{-2\pm 4\sqrt{-1}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$. Итак, $z_1=-1+2i$, $z_2=-1-2i$. Решения оказываются сопряженными комплексными числами.

Геометрическое изображение и формы записи комплексного числа

Всякое комплексное число $z=x+i\cdot y$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости Oxy такой, что $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ (рис.1). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i=x$. Ось ординат называется *мнимой осью*, так как на ней лежат чисто мнимые числа $z=0+i\cdot y=i\cdot y$.



Комплексное число $z=x+i\cdot y$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r}=\overline{OM}$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающее число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $Arg(z)$ или φ. Аргумент комплексного числа – величина многозначная и определяется в виде $Arg(z)=\arg(z)+2\pi k$, где $\arg(z)$ – *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$ или $[0;2\pi)$, k - целое число.

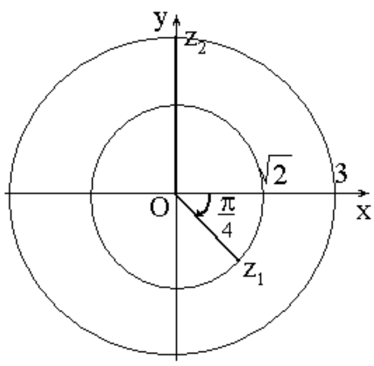
Модуль r и аргумент φ позволяют записать *тригонометрическую форму* комплексного числа (по аналогии с полярными координатами): $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$. Модуль $r=|z|$ определяется по формуле: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Аргумент φ (а точнее, главное значение аргумента) находится из соотношений: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$.

Используя формулу Эйлера (ее вывод основан на разложении функций в ряд Тейлора, см. далее) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тригонометрическая форма комплексного числа легко трансформируется в *показательную форму*: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$.

Пример. Записать комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3i$ в тригонометрической и показательной формах. Изобразить числа на комплексной плоскости.

Решение



Рассмотрим $z_1 = 1 - i$. $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Тогда $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$. Значит, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, откуда аргумент $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Получаем $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)i\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Рассмотрим $z_2 = 3i$. $|z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

Тогда $z_2 = 3i = 3\left(0 + 1 \cdot i\right)$. Значит, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, откуда аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Получаем $z_2 = 3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i\right) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$. Оба комплексных числа изображены на рисунке.

Действия над комплексными числами

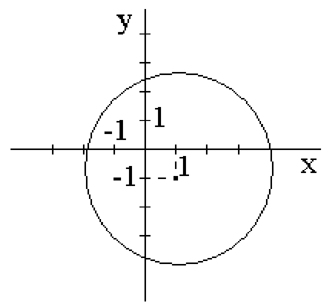
Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + i \cdot \left(y_1 + y_2\right)$. Как видно, геометрически комплексные числа складываются как векторы.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i \cdot \left(y_1 - y_2\right)$. Аналогично сложению геометрически комплексные числа вычитаются как векторы. Отметим также, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа: $\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} = d$. Тогда равенство $\left|z - z_0\right| = R$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии R от точки z_0, т.е. окружность с центром в z_0 и радиусом R.

Пример. Построить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению $\left|z - 1 + i\right| \le 3$.

Решение

Рассмотрим равенство $\left|z - 1 + i\right| = 3$. Получаем окружность с центром в комплексной точке $z_0 = 1 - i$ и радиусом $R = 3$. Знак неравенства говорит о том, что точки комплексной плоскости должны быть расположены на расстоянии меньше и равно длины радиуса окружности, значит, получаем внутреннюю область окружности, т.е. круг.



Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i \cdot \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)$. Эта формула получается и путем простого перемножения и приведения подобных: $z = z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + i \cdot y_1\right) \cdot \left(x_2 + i \cdot y_2\right) = x_1x_2 + i \cdot x_1y_2 + i \cdot y_1x_2 + i^2 \cdot y_1y_2$. Учитывая $i^2 = -1$, получаем $z = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i \cdot \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)$. Как видно, $\operatorname{Re} z = x_1x_2 - y_1y_2$, $\operatorname{Im} z = x_1y_2 + y_1x_2$.

В тригонометрической форме умножение происходит по формуле

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1\right) \cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).$$

Это правило распространяется на любое конечное число множетелей. В частности получается *формула Муавра* $z^n = r^n\left(\cos\left(n \cdot \varphi\right) + i \cdot \sin\left(n \cdot \varphi\right)\right)$.

Аналогично получаются эти действия и для показательной формы:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)};\ z^n = r^ne^{i \cdot n \cdot \varphi}.$$

Пример. Выполнить возведение комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}\cdot i$ в пятую степень по формуле Муавра.

Решение

Имеем: $|z|=\sqrt{1+3}=2$. Тогда $z=-1+\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Значит, $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда аргумент $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Получаем $z=-1+\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Тогда $z^5=2^5\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 5+i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot 5\right)=32\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)=$ $=32\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=32\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-16-16\sqrt{3}i$.

Частным двух комплексных чисел $z_1=x_1+i\cdot y_1$ и $z_2=x_2+i\cdot y_2$ называется комплексное число, получаемое в алгебраической форме по формуле:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}=\frac{(x_1+i\cdot y_1)(x_2-i\cdot y_2)}{(x_2+i\cdot y_2)(x_2-i\cdot y_2)}=$$

$$=\frac{x_1x_2-i\cdot x_1y_2+i\cdot y_1x_2-i^2\cdot y_1y_2}{x_2{}^2-i^2\cdot y_2{}^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i\cdot(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2{}^2+y_2{}^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+i\cdot\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}.$$

Как видно, числитель и знаменатель домножали на сопряженное комплексное число $\overline{z}_2=x_2-i\cdot y_2$.

Для тригономентрической и показательной форм комплексного числа деление имеет вид:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big);\ z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Пример. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1=3+4i$ и $z_2=5-i$ в алгебраической форме.

Решение

Сумма: $z_1+z_2=8+3i$; Разность: $z_1-z_2=-2+5i$;

Произведение: $z_1\cdot z_2=(3+4i)(5-i)=15+20i-3i-4i^2=19+17i$;

Частное: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{5-i}=\frac{(3+4i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{15+20i+3i+4i^2}{25-i^2}=\frac{11+23i}{26}=\frac{11}{26}+\frac{23}{26}i$.

Извлечение корня из комплексного числа

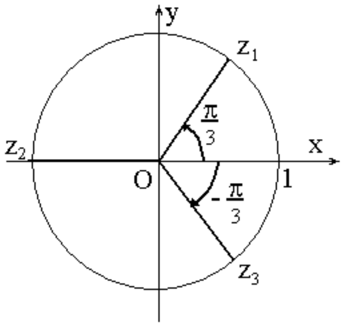
Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число, которое при возведении в *n*-ую степень дает изначальное комплексное число z.

Извлекать корень удобнее всего из показательной формы комплексного числа с записью полного аргумента $Arg\left(z\right)=\varphi+2\pi k$. В результате получается *n* корней в зависимости от значений целого числа *k.* А именно, $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\left(\varphi+2\pi k\right)}}=\left(re^{i\left(\varphi+2\pi k\right)}\right)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\left(\varphi+2\pi k\right)}{n}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\left(\varphi+2\pi k\right)}{n}}$.

Пример. Найти $\sqrt[3]{-1}$ и изобразить все корни на комплексной плоскости.

Решение

Представим комплексное число $z=-1$ в показательной форме. $\left|z\right|=\sqrt{1+0}=1$. Отсюда $z=1\left(-1+0\cdot i\right)$. Значит, $\cos\varphi=-1$, $\sin\varphi=0$, откуда аргумент $\varphi=\pi$, $Arg\left(z\right)=\pi+2\pi k$. Получаем $z=e^{i\left(\pi+2\pi k\right)}$. Тогда $\sqrt[3]{z}=e^{i\frac{\left(\pi+2\pi k\right)}{3}}$. Получаем 3 корня:



1) при $k=0$ имеем $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) при $k=1$ имеем $z_2=e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

3) при $k=2$ имеем $z_1=e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Дальнейшие значения числа k в силу периодичности дают такие же значения. На рисунке изображены все три корня.

12.2. Понятие функции комплексного переменного. Формула Эйлера

Если каждому комплексному числу $z = x + iy$, принадлежащему области D, по некоторому правилу поставлено в соответствие одно определенное комплексное число $w = u + iv$, то говорят, что на области D задана однозначная функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Геометрически заданную на D функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение множества D, лежащего в плоскости z, на некоторое множество G плоскости w. Множество G называют образом множества D.

Производная функции комплексного переменного

Производной от функции $w = f(z)$ в точке z называется предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$. Если в точке z функция $f(z)$ имеет производную, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) как функции двух переменных x, y, и выполнялись условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Эти равенства называются условиями Коши-Римана.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцирема в этой точке и ее окрестности. Функция называется *аналитической в области*, если она дифференцирема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $f(z)$ справедливо $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Вследствие выполнения условий Коши-Римана производная также может быть найдена из равенств $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

Пример. Показать, что функция $w = z^2 - z$ является аналитической на всей комплексной плоскости, найти ее производную.

Решение

Определим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$: $w = (x + iy)^2 - x - iy = $ $= x^2 - y^2 - x + i(2xy - y)$, таким образом, $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$ и $v(x, y) = 2xy - y$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$.

Очевидно, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в любой точке и условия Коши-Римана выполняются. Следовательно, функция $f(z)$ дифференцируема на всей комплексной плоскости, а значит, аналитическая. Её производная: $w' = f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1 + i2y = 2(x+iy) - 1 = 2z - 1$.

Пример. Является ли функция $w = z\operatorname{Re} z$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Определим функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$: $w = (x+iy)x = x^2 + ixy$, $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = xy$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = y$. Условия существования производной (условия Коши-Римана) выполняются лишь в точке $(0,0)$. Следовательно, функция дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Заметим, если функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, то ее производную можно вычислить как у функции действительной переменной, приняв z за действительную переменную.

Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ непрерывна на некоторой гладкой кривой L, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой L (в выбранном направлении) называется предел интегральной суммы (аналогично криволинейному интегралу) $\int\limits_L f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$. Вычисление интеграла сводится к вычислению определенного интеграла $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$ – уравнение кривой в комплексной форме.

Интеграл $\int\limits_L f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования. Однако если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл в этой области не зависит от пути интегрирования. Это утверждение равносильно следующей теореме.

Теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру L, принадлежащему D, равен нулю.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $f(z)$ – аналитическая в замкнутой многосвязной области D и на кусочно-гладком контуре L, ограничивающем D, то интеграл от функции по внешнему контуру L равен сумме интегралов по всем внутренним контурам при условии, что интегрирование производится по всем контурам против часовой стрелки.

Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, то для любой точки $z_0 \in D$ и для любого кусочно-гладкого контура L, целиком лежащего в области D и содержащего точку z_0 внутри себя, справедлива *интегральная формула Коши*: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$.

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливо равенство: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

Пример. Вычислить $\int\limits_L (\bar{z}-1)dz$, где L – дуга параболы $x = y^2 + 1$ от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = 5 + 2i$.

Решение

Параметрические уравнения заданной параболы имеют вид $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t, \end{cases}$

или в комплексной форме $z = t^2 + 1 + it$, где $0 \le t \le 2$.

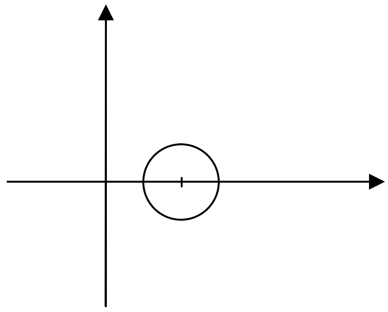
Сводя искомый интеграл к определенному интегралу, получим: $\int\limits_L (\bar{z}-1)dz =$

$$= \int\limits_0^2 \left(t^2 + 1 - it - 1\right)(2t + i)dt = \int\limits_0^2 \left(2t^3 - it^2 + t\right)dt = \left(\frac{t^4}{2} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i.$$

Пример. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\int\limits_L \dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz$, если: а) $L: |z-1| = \dfrac{1}{2}$; б) $L: |z-1| = 2$

Решение

а) Внутри окружности $|z-1|=\dfrac{1}{2}$ (на рисунке) знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z=1$. Для применения интегральной формулы Коши перепишем интеграл в виде:

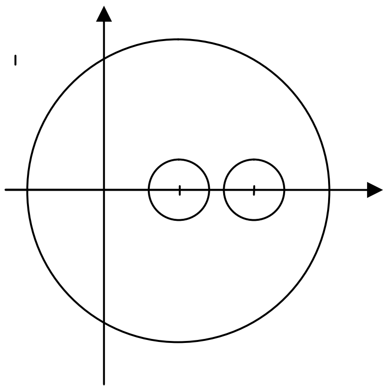


$$\int\limits_L \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz = \int\limits_L \frac{f(z)}{(z-1)}dz.$$ Здесь $z_0=1$,

$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2)}$ – аналитическая функция в круге $|z-1|\le\dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-1)}dz = 2\pi i f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^z}{(z-2)}\right|_{z=1} = -2\pi e i.$$

б) Внутри окружности $|z-1|=2$ имеется две точки, $z=1$ и $z=2$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Построим окружности L_1 с центром в точке $z=1$ и L_2 с центром в точке $z=2$ с достаточно маленькими радиусами, так чтобы они не пересекались и целиком лежали в круге $|z-1|\le 2$ (на рисунке). В трехсвязной области, ограниченной окружностями L, L_1, L_2, подынтегральная функция аналитична.



По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_L \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz = \int\limits_{L_1} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz + \int\limits_{L_2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz.$$

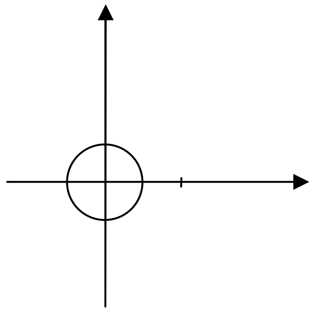
К каждому интегралу в правой части можно применить интегральную формулу Коши: $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz = \int\limits_{L_1} \frac{\frac{e^z}{(z-2)}}{(z-1)}dz + \int\limits_{L_2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)}}{(z-2)}dz =$

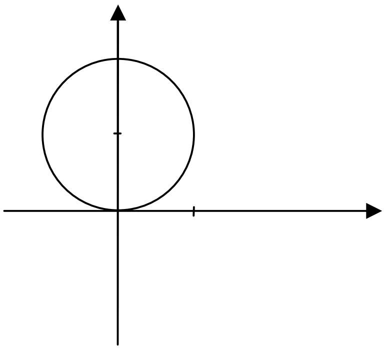
$$= 2\pi i \left.\frac{e^z}{(z-2)}\right|_{z=1} + 2\pi i \left.\frac{e^z}{(z-1)}\right|_{z=2} = 2\pi i\left(-e+e^2\right) = 2\pi e(e-1)i.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{z^4}{(z-i)^3}dz$, если: а) $L: |z| = \frac{1}{2}$; б) $L: |z-i| = 1$

Решение

а) В круге $|z| \le \frac{1}{2}$ (на рисунке справа) подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши для односвязной области $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4}{(z-i)^3}dz = 0$.





б) Подынтегральная функция является аналитической в области $|z-i| = 1$ (на рисунке слева) всюду, кроме точки $z_0 = i$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z) = z^4$, являющуюся аналитической в круге $|z-i| = 1$, и применим формулу для производных, следующую из интегральной формулы Коши при $n = 2$: $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^4}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi i\left(z^4\right)''\Big|_{z=i} = 12\pi i z^2\Big|_{z=i} = -12\pi i$.

Ряды на комплексной плоскости

Числовые ряды с комплексными членами

Рассмотрим ряд, члены которых могут быть комплексными числами, то есть $u_n = (a_n + ib_n)$ и преобразуем его, пользуясь свойствами суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + ... + (a_n + ib_n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) =$$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где a_n и b_n (n=1, 2, 3 …) – действительные числа.

Частичной суммой ряда S_n называется сумма n первых членов ряда, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n + i\sum\limits_{k=1}^{n} b_n$ и если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, значение S – суммой ряда. Если указанный предел не существует, то ряд называется расходящимся.

Очевидно, что рассмотренный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся каждый из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, при этом $S = S_1 + iS_2$. Это означает, что исследование сходимости нашего ряда сводится к исследованию двух рядов с действительными членами. Понятийный и теоретический аппарат, а также основные свойства рядов с действительными членами наследуются комплексными числовыми рядами.

Теорема (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то есть и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Теорема (Достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Если в ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + ... + u_{n+N} + ...$ отбросить n первых членов ряда, то получится ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+N} + ...$, называемый *остатком ряда* после n-го члена ряда или n-ым *остатком ряда.* В случае сходимости остатка ряда его сумму называют остаточной суммой и обозначают r_n: $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+N} + ... = r_{n1} + ir_{n2}$.

Теорема. Если какой-либо ряд сходится, то сходится и любой из его остатков и наоборот. Как следствие, если ряд сходится, то его остаточные суммы r_{n1} и r_{n2} при $n \to \infty$ стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n1} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n2} = 0$.

На ряды с комплексными членами можно распространить понятие абсолютной сходимости.

Теорема. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то абсолютно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство. По условию, ряд с общим членом $|u_n| = \sqrt{a_n + b_n}$ сходится. Тогда, с очевидностью, $|a_n| \le |u_n| = \sqrt{a_n + b_n}$ и $|b_n| \le |u_n| = \sqrt{a_n + b_n}$ и на основании локального признака сравнения для знакопостоянных рядов, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ – тоже сходятся. Отсюда следует (абсолютная – в случае ЗЧР) сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;{}_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \;{}_2$, а значит, абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то любой ряд, полученный из исходного перестановкой членов, тоже сходится и имеет ту же сумму S.

Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать и перемножать.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $_2$ – знакоположительные, к ним применяются все достаточные признаки сходимости, известные из действительного анализа.

Степенные ряды в комплексной области

Если $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n, \ldots$ – постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда) и $z = x + iy$ – комплексная переменная, то функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ (*) называется степенным рядом в комплексной плоскости. Рассматриваются также степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots,$ (**) которые сводятся к предыдущему подстановкой $t = (z - z_0)$. При одних значениях арумента z ряд (*) или (**) может сходится, а при других – расходится. Совокупность всех таких значений z, при которых ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля, устанавливающая область сходимости степенного ряда.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (*) сходится при $z = z_0 \neq 0$ (в точке z_0 на комплексной плоскости), то он будет абсолютно сходиться при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$. как следствие, если степенной ряд (*) расходится при некотором значении $z = z_0$, то он будет расходиться при любом z: $|z| > |z_0|$, то есть вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат на комплексной плоскости.

Из теоремы Абеля следует существование такого числа R>0 (называемого радиусом сходимости ряда), что для во всех точках круга $|z| < R$ степенной ряд (*) абсолютно сходится, а в точках вне этого круга сходимости, для которых $|z| > R$, ряд расходится. На окружности $|z| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. Принято считать, что R=0, когда ряд (*) сходится только в точке z=0 и символически обозначать R=∞, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Областью сходимости ряда (**) является круг $|z-z_0|<R$ с центром в точке z_0 и, возможно, некоторые точки, интервалы или отрезки на его границе.

Радиус сходимости степенного ряда можно найти с помощью формул $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ или $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, получаемых после применения признака Даламбера (или Коши) для модулей его членов.

Степенные ряды обладают рядом свойств, среди которых:

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости является аналитической функцией.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать любое количество раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}=1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}...+\dfrac{z^n}{n!}+...$

Решение. Здесь $c_n=\dfrac{1}{n!}$ и $c_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$, вычисляем радиус сходимости ряда по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(n+1)!|}{|n!|}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. $R=\infty$, следовательно, ряд сходится в любой точке комплексной плоскости.

Ряд Тейлора

Теорема. Всякая аналитическая в круге $|z-z_0|<R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ (***), коэффициенты которого определяются формулами $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ (n=0, 1, 2, 3, …), где интегрирование ведется вдлоль l_r – произвольной окружности с центром в точке z_0, лежащей внутри круга сходимости ряда.

Степенной ряд (***) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в рассматриваемом круге.

Приведем некоторые разложения элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена), первые три разложения справедливы на всей комплексной плоскости, последние два – в круге $|z|<1$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} z^n + \ldots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + \ldots$$

Формула Эйлера

В качестве важного примера использования теории степенных рядов на комплексной плоскости, существенно отразившегося на содержании других разделов математики, рассмотрим показательную функцию мнимого аргумента. Разделим в разложении действительные и мнимые слагаемые и сравним эти части с разложениями, известными для синуса и косинуса действительного аргумента:

$$e^{i\varphi} = \left[i\varphi = z\right] = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots =$$

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ – получена формула Эйлера, многократно использованная ранее.

С использованием формулы Эйлера и четности/нечетности тригонометрических функций рассмотрим линейные комбинации, которые тоже иногда называют «формулами Эйлера» – выражения тригонометрических функций через показательную:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{2} = \frac{\cos\varphi + \cos(-\varphi) + 0i}{2} = \cos\varphi$$

$$\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)-(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))}{2i}=\frac{0+i(\sin\varphi-\sin(-\varphi))}{2i}=\sin\varphi$$

С помощью «базовой» формулы Эйлера получим известные тригонометрические функции двойного аргумента (аналогично можно получать тригонометрические формулы с другой натуральной кратностью аргумента), рассматривая удобную для преобразования комбинацию:

$$\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi=e^{2i\varphi}=\left(e^{i\varphi}\right)^2=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi$$

Выделим и приравняем по отдельности действительные и мнимые части полученного равенства: $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$; $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$.

Наконец, рассмотрим тригонометрическую функцию суммы углов:

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}-e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}}{2i}=\frac{e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}-e^{-i\varphi_1}e^{-i\varphi_2}}{2i}=$$

$$=\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)-(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{2i}=$$

$$=\frac{0+2i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+2i\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{2i}=\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2.$$

Заметим, что если в этом результате положить $\varphi_1=\varphi_2$, то будет видно его совпадение с предыдущим.

Нули и особые точки функции комплексного переменного

Степенные ряды (ряды Тейлора) на комплексной плоскости дают возможность ввести следующее понятие. Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой окрестности точки $z = z_0$. Если $f(z_0)=0$, то эта точка z_0 называется нулем функции $f(z)$, а разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)$ не содержит нулевого члена, так как $c_0 = f(z_0) = 0$.

Однако, кроме $c_0 = 0$, может оказаться, что и $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, а разложение функции в ряд имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$$

В этом случае точка $z = z_0$ называется нулем кратности m (или нулем m-го порядка) функции $f(z)$. Если $m=1$, то точку $z = z_0$ называют простым нулем.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка $z = z_0$ является нулем кратности m функции $f(z)$, то $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0)=0$, но $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. В этом случае представление функции в виде степенного ряда можно преобразовать, вынося общие множители, и переписать в виде $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-z_0)+c_{m+2}(z-z_0)^2+\ldots$ – функция, для которой $z=z_0$ уже не является нулем, так как $\varphi(z_0)=c_m\neq 0$.

Справедливо и обратное утверждение. Если функция имеет вид $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где m – натуральное число, а $\varphi(z)$ – аналитична в точке $z=z_0$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, то точка $z=z_0$ является нулем кратности m функции $f(z)$.

Точки, в которых нарушается аналитичность функции, называются *особыми*. Точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$.

Рассмотрим неустранимые особые точки. Они могут быть разделены на две категории. Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Для того, чтобы точка z_0 являлась *полюсом порядка m* функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где функция $\varphi(z)$ – аналитична в точке $z=z_0$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если пределы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m$ не существуют ни при каком натуральном m.

Теорема. Если точка $z=z_0$ – нуль кратности m функции $f(z)$, то $z=z_0$ является полюсом порядка m функции $g(z)=1/f(z)$.

Доказательство. Пусть $z=z_0$ есть нуль m-го порядка функции $f(z)$. Тогда справедливо равенство $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитична в точке $z=z_0$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$. Тогда $\dfrac{(z-z_0)^m}{f(z)}=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ и $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{(z-z_0)^m}{f(z)}=\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$ (то есть предел существует, но не равен нулю). Это и означает, что для функции $g(z)=1/f(z)$ точка $z=z_0$ является полюсом m-го порядка.

Теорема. Если точка $z=z_0$ – полюс кратности m функции $f(z)$, то $z=z_0$ является нулем порядка m функции $g(z)=1/f(z)$.

Ряд Лорана

Приведем обобщение ряда Тейлора, позволяющее анализировать функции в ситуациях, когда они не являются аналитическими (подобно тому, как понятие предела функции дает ключ к анализу точек разрыва).

Теорема. Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R \quad (0 \le r < R \le \infty)$ функции $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ряд $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, (***) коэффициенты которого определяются формулой коэффициенты которого определяются формулами $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_r} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = \pm 1, \pm 2, ...)$, …), где интегрирование ведется вдлоль l_r – произвольной окружности с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

Ряд (***) называется рядом Лорана для функции $f(z)$ в рассматриваемом кольце. Можно доказать, что функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ разлагается в ряд Лорана единственным способом.

Ряд Лорана для функции $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ состоит из двух частей. Первая часть ряда Лорана, то есть $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, называется правильной частью ряда Лорана; этот ряд сходится к аналитической функции $f_1(z)$ внутри круга $|z - z_0| < R$. Вторая часть ряда Лорана, то есть ряд $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, называется главной частью ряда Лорана; этот ряд сходится к аналитической функции $f_2(z)$ при условии $|z - z_0| > r$, то есть вне круга с центром в z_0 и радиусом r. Внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ряд (***) сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z-z_0|<R$, или имеет устранимую особую точку, то её разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора (главная часть ряда Лорана отсутствует). При этом ряд сходится к разлагаемой функции в данном круге, кроме, может быть, самой точки z_0.

Если особая точка является полюсом m-го порядка, то её главная часть конечна и содержит m слагаемых.

Если z_0 – существенно особая точка, главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов.

Замечание. На практике для разложения функции в ряд Лорана используют известные разложения элементарных функций; дробь вида $\frac{1}{z-z_0}$ разлагается в ряд геометрической прогрессии, а дробь вида $\frac{1}{(z-z_0)^k}$, где k – целое, разлагается в ряд с помощью его последовательного дифференцирования; сложная дробь представляется в виде суммы простейших дробей с помощью алгебраических приемов (метода неопределенных коэффициентов в разных вариантах).

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=e^{1/z}$ в окрестности точки z_0=0.

Решение

Воспользуемся известным разложением $e^{1/z}=\left[\frac{1}{z}=u\right]=e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\ldots+\frac{1}{z^n n!}+\ldots$ (при $z\neq 0$)