9. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Общие понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и производные (или дифференциалы) этой функции, то есть $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, *y=y(x)* – искомая функция; y', y'',…, $y^{(n)}$ – производные искомой функции.

Дифференциальное уравнение, содержащее одну независимую переменную, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Далее будем называть такие уравнения просто *дифференциальными уравнениями* или сокращённо ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, дифференцируемая по крайней мере n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение последнее обращается в тождество. Например, функция $y = 2\ln(x-3) + 1$ является решением дифференциального уравнения $(x-3)y'' + y' = 0$. Действительно, $y' = \dfrac{2}{x-3}$; $y'' = -\dfrac{2}{(x-3)^2}$. После подстановки в уравнение получим $(x-3)\cdot(-\dfrac{2}{(x-3)^2}) + \dfrac{2}{(x-3)} = -\dfrac{2}{(x-3)} + \dfrac{2}{(x-3)} \equiv 0$.

Как мы увидим ниже, при нахождении решения дифференциального уравнения часто приходится выполнять операции интегрирования. Поэтому процесс нахождения решения ДУ называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями *высших порядков*. Например, дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ или в нормальной форме $y'' = f\left(x, y, y'\right)$.

Решением дифференциального уравнения второго порядка называется всякая функция $y = \varphi\left(x\right)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. *Общим решением* дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y=\varphi\left(x,C_1,C_2\right)$, где C_1,C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y=\varphi\left(x,C_1,C_2\right)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения констант C_1,C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия $y\left(x_0\right)=y_0,\ y'\left(x_0\right)=y'_0$, существуют единственные значения произвольных постоянных $C_1=C_1^0,C_2=C_2^0$, такие, что функция $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0\right)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка и удовлетворяет данным начальным условиям.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача отыскания решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши* и имеет вид:

$$\begin{cases} y''=f\left(x,y,y'\right), \\ y\left(x_0\right)=y_0,\ y'\left(x_0\right)=y'_0. \end{cases}$$

Если общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y''=f(x,y,y')$ получено в виде $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. Всякое решение $y=\varphi(x,C_1{}^0,C_2{}^0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1{}^0,C_2{}^0$, называется частным решением. Аналогично дается определение частного интеграла. Он имеет вид $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$.

9.1. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка уравнения.

Уравнение вида $y''=f(x)$.

После первого интегрирования получаем $y'=\int f(x)dx+C_1$.После второго интегрирования уравнения находим общее решение $y=\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx+C_1x+C_2$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''=2\sin x-\cos x$.

Решение. Интегрируем последовательно обе части данного уравнения. Тогда $y'=-2\cos x-\sin x+C_1$. Интегрируем еще раз: $y=-2\sin x+\cos x+C_1x+C_2$.

Уравнение, не содержащее явно искомую функцию y: $\boldsymbol{F(x, y', y'') = 0}$.

Порядок уравнения можно понизить путём замены $y' = p(x)$. При этом $y'' = p'(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид: $F(x, p, p') = 0$. Из этого уравнения определяем $p = \varphi(x, C_1)$, а затем находим $y = y(x, C_1, C_2)$ из уравнения $y' = \varphi(x, C_1)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x-1}$.

Решение

Сделаем замену $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Тогда уравнение будет иметь вид: $p' = \dfrac{p}{x-1}$ или $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x-1}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим $\int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{dx}{x-1}$, $\ln|p| = \ln|x-1| + \ln|C_1|$, $\quad p = C_1(x-1)$.

Возвращаясь к переменной y, получим дифференциальное уравнение первого порядка $y' = C_1(x-1)$. Отсюда интегрированием находим общее решение исходного уравнения $y = C_1 \dfrac{(x-1)^2}{2} + C_2$.

Уравнение, не содержащее явно независимую переменную: $\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}$.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $y' = p(y)$, зависящую от переменной y. Дифференцируя это равенство по x, и учитывая, что y − функция от x, получим $y'' = p'(y(x)) \cdot y' = p' \cdot p$. Подставляя выражения для y' и y'' в данное дифференциальное уравнение, получим уравнение первого порядка относительно p: $F(y, p, p') = 0$. Пусть $p = \varphi(y, C_1)$ является его общим решением. Интегрируя его, находим общий интеграл исходного уравнения: $\int \dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 2y^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Решение

Сделаем замену $y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$. Имеем $p'p = 2y^3$. Разделяя переменные, получим уравнение $pdp = 2y^3 dy$, откуда $p^2 = y^4 + C_1$ или $y' = \pm\sqrt{y^4 + C_1}$.

Используя второе начальное условие, находим C_1: $y'(0) = +\sqrt{y^4(0) + C_1}$, $1 = \sqrt{1 + C_1} \Rightarrow C_1^0 = 0$ (знак минус опущен, так как $y'(0) = 1 > 0$). Таким образом, $\dfrac{dy}{dx} = y^2$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$, $-\dfrac{1}{y} = x + C_2$, $y = -\dfrac{1}{x + C_2}$.

Учитывая начальное условие $y(0) = 1$, находим C_2: $y(0) = -\dfrac{1}{0 + C_2} = 1$, $\Rightarrow$ $C_2^0 = -1$. Таким образом, частное решение будет иметь вид: $y = -\dfrac{1}{x - 1}$.

Замечание. При решении ДУ целесообразно использование начальных условий для определения соответствующего значения произвольной постоянной C_1 при нахождении $p(y)$. Это упрощает дальнейшее интегрирование.

9.2. Линейные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ)

Такое уравнение имеет вид $y'' + py' + qy = 0$, где $p, q - \text{const}$. Для его решения составляется *характеристическое уравнение* $k^2 + pk + q = 0$ и находятся его корни.

В зависимости от вида корней общее решение такого уравнения строится в одной из трех форм:

1. Дискриминант характеристического уравнения $D>0$, тогда его *корни* $k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ *действительные и разные*, $k_1\neq k_2$. В этом случае общее решение имеет вид: $y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, где $C_1,C_2-\text{const}$.

2. Дискриминант характеристического уравнения $D=0$, тогда его *корни* $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$ *действительные и равные*. В этом случае общее решение имеет вид: $y(x)=e^{k_1x}\left(C_1+C_2x\right)$, где $C_1,C_2-\text{const}$.

Дискриминант характеристического уравнения $D<0$, тогда его *корни* $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ ($\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$) – *комплексные числ*[1]*а*. В этом случае общее решение имеет вид $y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$, где $C_1,C_2-\text{const}$.

В частности, при $\alpha=0$ $k_{1,2}=\pm\beta i$ и общее решение записывается так $y(x)=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x$, где $C_1,C_2-\text{const}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''-2y'-3y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2-2k-3=0$. Находим его корни $k_1=-1,\quad k_2=3$. Так как они действительные и различные, то получим общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+4y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2+4k+4=0$. Откуда $k_1=k_2=-2$, следовательно, общее решение выглядит так: $y=C_1e^{-2x}+C_2x\cdot e^{-2x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2+4k+13=0$. Находим корни этого уравнения: $k_1=-2+3i,\quad k_2=-2-3i$. Тогда общее решение запишется в виде: $y=e^{-2\cdot x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

[1] См. раздел «4. Основы теории функций комплексного переменного».

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ)

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Такое уравнение имеет вид $y''+py'+qy=f(x)$, где $p,q-\text{const}$, $f(x)$ – заданная функция. Его общее решение складывается из суммы общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему линейного однородного уравнения и частного решения y^* данного линейного неоднородного уравнения: $y(x)=y_{\text{о.о}}(x)+y_{\text{ч.н}}(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)$.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти, предполагая его функциональный вид и конкретизируя неизвестные коэффициенты многочленов подстановкой в решаемое уравнение. Выбор функционального вида частного решения y^* зависит а) от функционального вида правой части уравнения $f(x)$ и б) от возможных совпадений числовых параметров правой части уравнения $f(x)$ с корнями характеристического уравнения $k_{1,2}$ (см. выше). Для выбора используется следующая таблица (в ней $Q_k(x)$ и $M_k(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами).

$f(x)$	**Корни характеристического уравнения**	**Вид** $y_{\text{ч.н}}=y^*$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	0 – не корень	$y^*=Q_n(x)$
	0 – корень кратности r $(r=1,2)$	$y^*=x^rQ_n(x)$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	α – не корень	$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)$
	α – корень кратности r (r=1,2)	$y^*=x^re^{\alpha x}Q_n(x)$
$A\cos\beta x+B\sin\beta x$	βi – не корень	$y^*(x)=C\cos\beta x+D\sin\beta x$
	βi – корень кратности r $(r=1,2)$	$y^*(x)=x^r(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$
$P_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x$	βi – не корень	$y^*(x)=Q_k(x)\cos\beta x+M_k(x)\sin\beta x$ $k=\max(n,m)$

$f(x)$	**Корни характеристического уравнения**	**Вид** $y_{\text{ч.н}} = y^*$
	βi – корень кратности r $(r=1,2)$	$y^*(x) =$ $= x^r\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right]$ $k = \max(n,m)$
$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$	$\alpha \pm \beta i$ – не корень	$y^*(x) =$ $= e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right]$ $k = \max(n,m)$
	$\alpha \pm \beta i$ – корень кратности r $(r=1,2)$	$y^*(x) =$ $= x^r e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right]$ $k = \max(n,m)$

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) для поиска частного решения неоднородного уравнения

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянные C_1 и C_2, полученные при нахождении $\overline{y}$, предполагаются зависящими от x, это усложняет полученное выражение, но сохраняет в нем полезные элементы (функции y_1 и y_2), что в дальнейшем позволяет конкретизировать его и найти частное решение неодногодного уравнения y^*. Пошагово проделаем следующие операции:

1. Упростим исходное неоднородное уравнение, заменяя его правую часть нулем. С учетом характеристического уравнения получим решение в виде $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, как это описано выше.

2. Заменим в общем решении $\overline{y}$ постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$, запись предполагаемого решения неоднородного уравнения примет вид $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

3. Надо подобрать $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы функция $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ была частным решением исходного уравнения. Для этого (в соответствии с теоремой Лагранжа) достаточно, чтобы они удовлетворяли двум совместным требованиям, которые нужно записать как систему относительно производных этих функций:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases}.$$

4. Так как во всех трех случаях правильного предварительного решения однородного уравнения определитель $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0$, Данная система имеет единственное решение (например, по формулам Крамера для СЛАУ):

$C_1'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)}$ и $C_2'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$ – некоторые функции от x.

4. Интегрированием находим постоянные $C_1(x)$ и $C_2(x)$, причем выбор констант интегрирования – произвольный.

5. Частное решение уравнения составляется по его предполагаемому виду. Иногда оно допускает упрощение.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$.

Решение

Найдём сначала общее решение однородного уравнения $y''+y'-2y=0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2+k-2=0$, его корни вещественные числа $k_1=1,\ \ k_2=-2$. Поэтому общее решение однородного уравнения будет $\overline{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$.

Исходя из «специального» вида правой части уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y^*=A\cos x+B\sin x$.

Здесь $\alpha=0,\ \beta=1,\ r=0,\ m=n=0,\ l=0$.

Найдём производные:

$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x$, $(y^*)''=-A\cos x-B\sin x$.

Подставим в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при тригонометрических функциях в левой части равенства.

$$(-A+B-2A)\cos x+(-B-A-2B)\sin x=\cos x-3\sin x$$

Получим систему для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} -A+B-2A=1 \\ -B-A-2B=-3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\sin x$.

Пример. Решить неоднородное дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ методом вариации произвольной постоянной.

Решение

Находим общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$. Следовательно, $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x$.

Тогда, следуя методу вариации произвольной постоянной, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) x \cdot e^x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot xe^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot (xe^x + e^x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{cases}.$$

Решая систему, найдём $C_1'(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ и $C_2'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Отсюда, интегрируя, находим

$$C_1(x) = \int -\frac{x}{x^2+1} dx = -0{,}5 \cdot \ln(x^2+1) + C_3,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + C_4.$$

Так как необходимо найти какое-либо частное решение, то можно положить $C_3 = C_4 = 0$, тогда $y^* = -0{,}5 \cdot \ln(x^2+1) \cdot e^x + (arctg\, x) \cdot xe^x$.

Итак, окончательно общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 xe^x - 0{,}5 \cdot \ln(x^2+1) \cdot e^x + (arctg\, x) \cdot xe^x.$$

Принцип суперпозиции

Пусть правая часть ЛНДУ равна сумме двух функций $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда частное решение ЛНДУ находится как сумма частных решений уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$; $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то есть $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$. Этот принцип сохраняется и для большего числа слагаемых функций.

Системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t), \end{cases}$$

где a_{ij} – заданные числа, а $f_i(t)$ – заданные функции.

Система решается путём сведения к одному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 1 \end{cases}$.

Решение

Из первого уравнения системы выразим $x_2 = \dfrac{dx_1}{dt} - 1$.

Дифференцируя обе части данного равенства по t, получим $\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{d^2x_1}{dt^2}$.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 = 1$. Его общее решение (о методах решения неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью см. выше) $x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1$.

Подставляя выражение $x_1(t)$ в выражение для x_2, получим $x_2(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1$.

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1,$$

$$x_2(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$$