

## 16. Математические методы и модели для решения практических задач

### Основные понятия теории моделирования

*Модель и моделирование* – универсальные понятия, атрибуты одного из наиболее мощных методов познания в любой профессиональной области, познания систем, процессов, явлений. *Модель и моделирование* объединяют специалистов различных областей, работающих над решением междисциплинарных проблем.

Существует достаточно большое число определений понятия «модель». Одни из них слишком абстрактны, другие – слишком конкретны. Но все они отражают ту или иную сторону этого многогранного понятия.

Под *моделью* будем понимать некоторое представление о системе (объекте), отражающее наиболее существенные закономерности ее структуры и процесса функционирования и зафиксированное на некотором языке или в другой форме.

Примером модели в этом направлении может стать любая модель системы, подлежащей исследованию, не зависимо от ее физического происхождения: модель избирательной компании, модель двигателя внутреннего сгорания, модель колебательной системы.

При построении модели есть возможность отобразить элементы модели и детализировать ее так, чтобы выделить необходимые признаки и особенности системы для наиболее лучшего понимания ее работы и возможности управления.

Под *моделированием* в широком смысле принято понимать процесс построения, изучения и совершенствования моделей, их использование в научных исследованиях (теоретических и экспериментальных), применение моделей непосредственно в процессах планирования, управления, оптимизации, прогнозирования, контроля и т.д.

Когда говорят о моделировании, обычно имеют в виду моделирование некоторой системы.

*Система* – это совокупность взаимосвязанных элементов, обособленных от среды и взаимодействующая с ней как целое.

Как и любое фундаментальное понятие, система конкретизируется в процессе рассмотрения ее основных свойств. Важнейшие свойства системы: перечислены в следующей таблице.

### Свойства системы и их характеристики

Свойство системы	Характеристика
Ограниченность	Система отделена от окружающей среды границами
Целостность	Ее свойство целого принципиально не сводится к сумме свойств составляющих элементов
Структурность	Поведение системы обусловлено свойствами ее структуры
Взаимозависимость со средой	Система формирует и проявляет свойства в процессе взаимодействия со средой
Иерархичность	Соподчиненность элементов в системе
Множественность описаний	По причине сложности познание системы требует множественности ее описаний

Можно выделить основные свойства системы:

- система есть, прежде всего, совокупность элементов, которые при определенных условиях могут рассматриваться как системы;
- наличие существенных связей между элементами и (или) их свойствами, превосходящих по мощности (силе) связи этих элементов с элементами, не входящими в данную систему. Под существенными связями понимаются такие, которые закономерно, с необходимостью определяют интегративные свойства системы. Указанное свойство отличает систему от простого конгломерата и выделяет ее из окружающей среды;
- наличие определенной организации, что проявляется в системе энтропии (системе неопределенности, хаоса), системы по сравнению с энтропией системообразующих факторов, определяющих возможность создания системы, число существенных связей, которыми может обладать элемент, число квантов пространства и времени;
- существование интегративных свойств, т.е. присущих системе в целом, но не свойственных ни одному из ее элементов в отдельности. Их наличие показывает, что свойства системы хотя и зависят от свойств элементов, но не окружают их полностью. Т.е. система не сводится к простой совокупности

элементов, и, расчлняя систему на отдельные части, нельзя познать все свойства системы в целом.

В самом общем случае понятие «система» характеризуется:

- наличием множества элементов;
- наличием связей между ними;
- целостным характером данного устройства или процесса.

Анализируя различные взаимно дополняющие понятия системы, следует отметить, что наиболее полное определение должно включать и элементы, и связи, и свойства, и цель, и наблюдателя (исследователя), и его язык, с помощью которого отображается объект или процесс. Однако есть системы, для которых наблюдатель, исследователь очевиден, и его не надо включать в определение системы, например для некоторых технических систем. Иногда не нужно в явном виде говорить о цели. Таким образом, при исследовании с целью проектирования, создания или совершенствования объектов техники нужно проанализировать ситуацию с помощью полного определения системы, а затем, выделив наиболее существенные компоненты, принять «рабочее» определение системы, которым будут пользоваться все лица, участвующие в принятии решения. Важно, чтобы в понятии «система» был отражен подход и объект исследования как к системе.

Система представляет собой совокупность элементов (объектов, субъектов), находящихся между собой в определенной зависимости и составляющих некоторое единство (целостность), направленное на достижение определенной цели.

Моделирование как метод исследования является мощным инструментом познания на протяжении всей истории развития человечества. Одним из примеров созданной человеком системы моделей, адекватно отражающей широкий класс явлений и процессов реального мира, являются, например, модели классической механики.

Моделирование как инструмент познания требует творческого подхода и определенного искусства владения им. С другой стороны, моделирование как наука опирается на научные знания той области, где этот инструмент познания используется. Например, для построения математической модели автомобильного поезда (АП) требуются знания законов теоретической механики, движения АП в различных эксплуатационных условиях и различных

режимах движения и т.д. Только глубокие профессиональные знания исследователя в сочетании с творческим подходом к решаемой проблеме могут быть основой для успешного применения метода моделирования. Сам процесс моделирования предполагает такой способ изучения объекта, при котором модель, с точки зрения цели исследования, вполне точно (адекватно) и достаточно полно замещает изучаемый объект в процессе познавательной деятельности.

Моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования по своей сущности приводит к условному делению на материальное (физическое) моделирование, теоретическое (абстрактное) и идеальное моделирование.

Укажем на некоторые свойства моделей.

Во-первых, хорошая модель очень информативна, и эта информация представлена в весьма сжатом виде.

Во-вторых, модель иерархична, – есть модели более высокого уровня (например, модель системы управления) и более низкого уровня (например, модели элементов систем управления).

В-третьих, сама модель уточняется и корректируется в процессе моделирования, т.е. недостатки модели нельзя предугадать заранее.

В-четвертых, модель может выступать в качестве эталона, идеализирующего собой различные формы деятельности: управление, планирование, принятие решений, прогнозирование и т.д. Например, в адаптивных (самонастраивающихся) системах управления техническими объектами реализуется принцип управления по эталонной модели.

Главный недостаток метода моделирования заключается в том, что при некорректном моделировании можно получить результаты, не имеющие отношения к исследуемым свойствам системы или неправильно отражающие свойства реальной системы. В этом есть объективная причина: модель отражает (не всегда точно) только определенные, но не все, свойства реального объекта. И все же достоинств у метода моделирования больше, чем недостатков.

Можно выделить следующие достоинства моделей:

1. Модели экономичны так как они экономят время, сокращают издержки и затраты материальных ресурсов в процессе исследования или проектирования технического объекта.

2. Модели практичны, они всегда строятся так, чтобы были проще и удобнее для исследований, чем исходные объекты. На моделях можно ставить такие эксперименты, проведение которых на реальных объектах либо слишком дорого, либо опасно для персонала и окружающей среды.

3. Некоторые явления можно изучать только на их моделях. Например, ядерные взрывы, траектории космических аппаратов, электрические разряды молнии, полет самолета при развитии критической ситуации на борту в результате отказов отдельных функциональных подсистем и т.п.

4. Модели воспроизводят лишь основные, наиболее важные для данного исследования свойства изучаемой системы. Отсюда же следует, что у изучаемой системы (объекта) могут быть несколько (много) моделей, каждая из которых воспроизводит (имитирует) определенный набор свойств и характеристик. Так, например, проектируя новое техническое устройство, можно построить и использовать модель, описывающую динамические (упрощенно, скоростные) свойства и характеристики. В то же время для определения прочностных характеристик, изгибно-крутильных свойств потребуется совершенно другая модель.

5. Модели позволяют выявить механизм формирования исследуемых свойств системы, научиться прогнозировать эти свойства и целенаправленно их изменять в желаемую сторону.

6. Исследования, проведенные с применением моделей, могут послужить основанием для заключения о несостоятельности некоторых гипотез или идей.

7. При моделировании систем могут возникнуть и побочные эффекты. Например, модель может воспроизводить такие признаки системы, которые адекватны реальным свойствам, но данная модель не была предназначена для этого. Этот эффект следует рассматривать как исключение, а не как закономерность, хотя в истории науки есть случаи, когда подобным образом делались открытия в области тонких физических явлений.

Достоинства моделирования делают его наиболее эффективным методом, как научных исследований, так и практической деятельности человека.

## Классификация математических моделей

Первоначально дадим несколько различных определений математических моделей.

*Математическая модель* – это объект, который имеет с оригиналом следующее однозначное соответствие:

- 1) структуры, т.е. состава элементов и связей между ними;
- 2) уравнений, описывающих свойства этих элементов и их связей.

Учитывая, что система есть совокупность взаимосвязанных элементов, (объектов) в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое, можно сформулировать определение математической модели системы.

*Математическая модель системы* – это множество математических моделей элементов, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом и адекватно отражающих свойства системы.

Практически любая математическая модель позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления. Поэтому можно полагать, что суть любой подобной модели заключается в отображении некоторого заданного множества значений входных параметров на множество значений выходных параметров. Данное обстоятельство позволяет рассматривать математическую модель как некоторый математический оператор и сформулировать следующее

*Математическая модель* – это любой оператор  $A$ , позволяющий по соответствующим значениям входных параметров  $X$  установить выходные значения параметров  $Y$  объекта моделирования:  $Y = AX$ .

В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств  $X$  и  $Y$  могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.). В то же время понятие оператора  $A$  в приведенном определении может трактоваться достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение выходных параметров по заданным исходным значениям.

Определение математической модели через понятие оператора является более конструктивным с точки зрения построения классификации таких моделей, поскольку включает в себя все многообразие имеющихся в настоящее время математических моделей. Полностью эта классификация приведена в следующей таблице.

Классификация видов математических моделей

<b>Признак классификации</b>	<b>Виды математических моделей</b>
Способ получения математической модели	- теоретические - экспериментальные
Форма представления математической модели	- инвариантные - аналитические - графические - функциональные - структурные - алгоритмические
Вид оператора математической модели	- алгебраические - функциональные - дифференциальные - интегральные
Свойства параметров оператора модели	- линейные - нелинейные - сосредоточенные - распределенные - стационарные - нестационарные
Фактор времени	- статические - динамические
Количество входов/выходов	- скалярные - матричные (многосвязные)
Количество переменных состояния	- одномерные - многомерные
Характер переменных	- непрерывные - дискретные - логические - детерминированные - стохастические (вероятностные)

*Теоретические модели* получают на основе описания физических процессов функционирования объекта.

*Экспериментальные модели* формируются на основе поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как «черный ящик». Эксперименты при

этом могут быть физические (на техническом объекте или на его физической модели) или вычислительные (теоретической математической модели).

*Инвариантная форма* – это запись соотношений в математической модели в общем виде с помощью традиционного математического языка безотносительно (не учитывая) к методу решения.

*Аналитические модели* – модели в форме аналитических функциональных зависимостей, когда представление преобразования входного сигнала в выходной осуществляется с помощью некоторой функциональной зависимости или логического условия.

*Графические (схемные) модели* представляются в виде графов, эквивалентных схем, диаграмм и т.п.

*Функциональные модели* описывают процессы функционирования технических объектов и имеют форму систем уравнений. По способам получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

*Структурные модели* – модели, отображающие только структуру исследуемого объекта и использующиеся при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого. Эти параметры называют морфологическими переменными. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов.

Сложные явления и системы описываются множествами уравнений и соотношений. Получение требуемого результата моделирования в виде конечной формулы или численного значения является весьма сложной, а часто неразрешимой задачей. В этих случаях успешным является использование алгоритмических моделей.

*Алгоритмические модели* – модели в форме алгоритма получения требуемых результатов, реализуемого на компьютере с использованием методов вычислительной математики. Такие модели могут учитывать практически любое число существенных факторов, а потому используются для моделирования наиболее сложных объектов и процессов и чаще всего с помощью мощных и быстродействующих компьютеров.

*Алгебраические модели* – модели в форме алгебраического уравнения.

*Дифференциальные модели* – модели в форме дифференциального уравнения (обыкновенные дифференциальные уравнения, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, системы дифференциальных уравнений в частных производных).

*Интегральные модели* – модели в форме интегральных уравнений и систем интегральных уравнений.

Математическая модель называется *линейной*, если оператор модели обеспечивает линейную зависимость выходных величин от значений входных величин (выполняется принцип суперпозиции).

Математическая модель называется *нелинейной*, если оператор модели не обеспечивает линейную зависимость выходных величин от значений входных величин (не выполняется принцип суперпозиции).

В моделях с сосредоточенными параметрами предполагается, что все свойства оператора модели сосредоточены в фиксированных точках. Такое предположение приводит к использованию моделей в форме алгебраических и/или обыкновенных дифференциальных уравнений.

В моделях с распределенными параметрами предполагается, что свойства оператора модели распределены в пространстве, что приводит к тому, что оператор модели имеет вид дифференциальных уравнений в частных производных.

*Стационарная (статическая) модель* – модель, отображающая взаимосвязь между входным и выходным воздействиями объекта в его установившемся состоянии без учета времени. Математическая модель стационарна и в том случае, когда параметры оператора модели неизменны во времени. Математически это обстоятельство выражается в том, что параметры (коэффициенты) модели явно не зависят от времени.

Математическая модель называется *нестационарной (неустановившейся)* в том случае, когда параметры оператора модели изменяются с течением времени.

*Статические математические модели* – модели, которые описывают установившиеся (равновесные) режимы работы системы. По своей форме статические модели – алгебраические уравнения или функциональные зависимости, не содержащие в качестве аргумента время.

*Динамические математические модели* – модели, которые описывают неустановившиеся (неравновесные, переходные) режимы работы системы. Чаще всего динамические математические модели представляются в дифференциальной форме.

Разделение математических моделей на одномерные и многомерные, на скалярные и матричные не имеет строгих установившихся правил. Но наиболее часто используемым является следующие представления.

Модель называется *скалярной*, если в качестве входной переменной величины (входного сигнала) выступает одна единственная переменная величина и выходная переменная величина (выходной сигнал) также представлена в единственном числе. Число внутренних переменных (переменных состояния) при этом может быть произвольным.

Модель называется *матричной* (многосвявной), если число входных переменных и/или число выходных переменных величин не равно единице. Опять же число внутренних переменных (переменных состояния) при этом может быть произвольным.

Модель называется *одномерной*, если количество внутренних переменных (переменных состояния), обеспечивающих полное однозначное описание каждого состояния объекта моделирования равно единице. Одномерная математическая модель содержит одну выходную величину. Входных величин может быть несколько.

Модель называется *многомерной*, если количество внутренних переменных (переменных состояния), обеспечивающих полное однозначное описание каждого состояния объекта моделирования больше единицы. Многомерная математическая модель содержит несколько выходных величин. Для многомерного объекта число уравнений соответствует числу выходных величин.

Математические модели называются *непрерывными*, если все внутренние переменные модели являются непрерывными величинами.

Математические модели называются *дискретными*, если хотя бы одна переменная модели является дискретной величиной.

*Логические модели* – модели, в которых в качестве переменных величин используются логические величины или логические выражения.

*Детерминированные модели* – модели, переменные которых представляют собой детерминированные величины, а каждому параметру

модели соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число либо соответствующая функция.

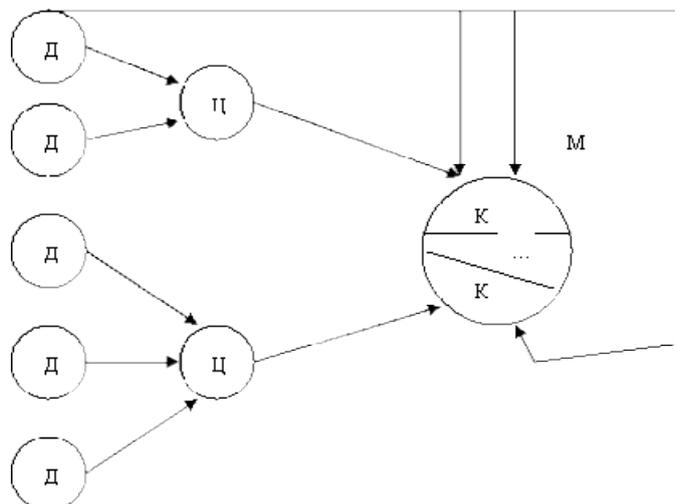
*Стохастические (вероятностные) модели* – модели, переменные которых представляют собой случайные величины, заданные плотностями вероятностей.

Классификация моделей по какому-либо одному признаку не может охватить всех видов моделей, ибо модель, как и исходная система, многогранна и отражает лишь те ее свойства, которые представляют интерес для исследователя.

### Подходы к моделированию систем

При моделировании систем используют два подхода: классический (индуктивный), сложившийся исторически первым, и системный.

Исторически первым сложился классический подход к изучению объекта, моделированию системы. Такой (классический) подход может быть использован при создании достаточно простых моделей. Процесс синтеза модели  $M$  на основе классического (индуктивного) подхода представлен на рисунке справа.



Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т.е. выбираются исходные данные  $D$  для подходов моделирования и ставятся цели  $C$ , отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных  $D$  ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента  $K$  будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель  $M$ .

Таким образом, разработка модели  $M$  на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального

объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств.

Можно отметить две отличительные стороны классического подхода:

– наблюдается движение от частного к общему;

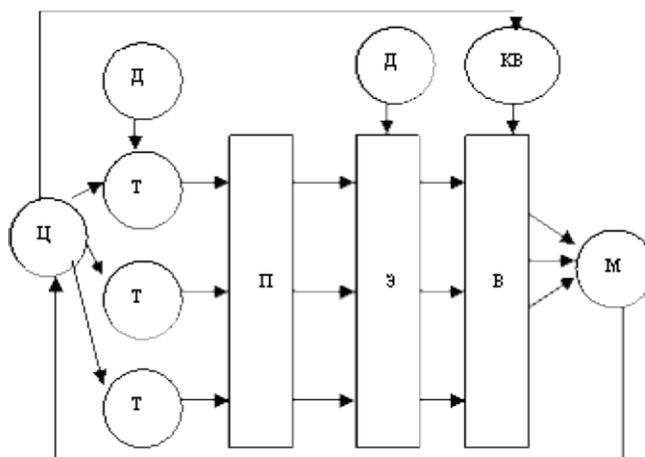
– создаваемая модель образуется путем суммирования отдельных ее компонент и не учитывается возникновение нового системного эффекта.

С усложнением объектов моделирования возникла необходимость наблюдения их с более высокого уровня. В этом случае наблюдатель (разработчик) рассматривает данную систему  $S$  как некоторую подсистему какой-то метасистемы, т. е. системы более высокого ранга, и вынужден перейти на позиции нового системного подхода, который позволит ему построить не только исследуемую систему, решающую совокупность задач, но и создавать систему, являющуюся составной частью метасистемы.

Системный подход получил применение в системотехнике в связи с необходимостью исследования больших реальных систем, когда сказалась недостаточность, а иногда ошибочность принятия каких-либо частных решений. На возникновение системного подхода повлияли увеличивающееся количество исходных данных при разработке, необходимость учета сложных стохастических связей в системе и воздействий внешней среды  $E$ . Все это заставило исследователей изучать сложный объект не изолированно, а во взаимодействии с внешней средой, а также в совокупности с другими системами некоторой метасистемы. Системный подход позволяет решить проблему построения сложной системы с учетом всех факторов и возможностей, пропорциональных их значимости, на всех этапах исследования системы  $S$  и построения модели  $M$ . Системный подход означает, что каждая система  $S$  является интегрированным

целым даже тогда, когда она состоит из отдельных разобщенных подсистем. Таким образом, в основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причем это рассмотрение при разработке начинается с главного – формулировки цели

функционирования. Процесс синтеза модели  $M$  на базе системного подхода условно представлен на рисунке справа.



На основе исходных данных  $D$ , которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему сверху либо, исходя из возможностей ее реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования  $T$  к модели системы  $S$ . На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы  $\Pi$ , элементы  $\mathcal{E}$  и осуществляется наиболее сложный этап синтеза – выбор  $V$  составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора (КВ).

При моделировании необходимо обеспечить максимальную эффективность модели системы. Эффективность обычно определяется как некоторая разность между какими-то показателями ценности результатов, полученных в итоге эксплуатации модели, и теми затратами, которые были вложены в ее разработку и создание.

### **Этапы моделирования**

Можно выделить следующие правила и этапы моделирования при исследовании технических систем и технологических процессов.

Первое правило моделирования заключается в привлечении различных специалистов для разработки обобщенной технологии создания и анализа моделей. Необходимость в привлечении специалистов разных профилей обусловлена сложностью и трудоемкостью процесса разработки, исследования и применения моделей.

Второе правило говорит о том, что разработчикам моделей нужно знать как общие законы функционирования технических систем, так и частные соотношения физики, механики и других наук, которые обычно представляются математическими соотношениями.

Третье правило заключается в том, что объективная сложность технических систем и происходящих в них технологических процессов, исключает возможность их всестороннего изучения с помощью только одной какой-либо модели. Это означает, что обобщенная модель должна состоять из нескольких разнотипных взаимосвязанных подмоделей.

Процесс построения такой обобщенной модели состоит из следующих основных этапов моделирования.

1. Содержательная постановка задачи – обследование объекта и формулировка технического задания на разработку модели.
2. Концептуальная постановка задачи – семантическое моделирование объекта.
3. Проверка корректности полученной модели и ее предварительный качественный анализ.

4. Математическая постановка задачи и обоснование метода ее решения.

5. Подбор или разработка алгоритма решения задачи с помощью компьютера.

6. Исследование модели и проверка адекватности полученных результатов.

Итогом процесса моделирования технической системы должно быть создание работающей адекватной модели, удовлетворяющей требованиям заказчика и разработчика.

### **Требования к математическим моделям**

При построении математических моделей объектов, систем, процессов целесообразно придерживаться следующих требований и рекомендаций, которые имеют характер постоянного контроля за процессом математического моделирования:

1. Моделирование следует начинать с построения самых грубых моделей на основе выделения самых существенных факторов. При этом необходимо четко представлять как цель моделирования, так и цель познания с помощью данных моделей.

2. Желательно не привлекать к работе искусственные и трудно проверяемые гипотезы.

3. Необходимо контролировать размерность переменных придерживаясь правила: складываться и приравняться могут только величины одинаковой размерности.

4. Необходимо контролировать порядок складываемых друг с другом величин с тем, чтобы выделить основные слагаемые (переменные, факторы) и отбросить малозначительные. При этом должно сохраняться свойство «грубости» модели: отбрасывание малых величин приводит к малому изменению количественных выводов и к сохранению качественных результатов.

5. Необходимо контролировать характер функциональных зависимостей, следуя правилу: проверять сохранность зависимости изменения направления и скорости одних переменных от изменения других. Это правило позволяет глубже понять физический смысл и правильность выведенных соотношений.

6. Необходимо контролировать поведение переменных при приближении параметров модели к особым, экстремальным значениям. Обычно в экстремальной точке модель упрощается или вырождается, а соотношения приобретают более наглядный смысл и могут быть проще проверены.

7. Необходимо контролировать поведение модели в известных условиях: удовлетворение модели поставленным начальным и граничным условиям; поведение системы как модели при действии на нее типовых входных сигналов.

8. Необходимо контролировать получение побочных эффектов и результатов, анализ которых может дать новые направления в исследованиях или потребовать перестройки самой модели.

Постоянный контроль правильности функционирования моделей в процессе исследования позволяет избежать грубых ошибок в конечном результате. При этом выявленные недостатки модели исправляются в ходе моделирования, а не вычисляются заранее.

В практике моделирования объектов в области системотехники и системного анализа на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать типовые математические схемы: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри, агрегативные системы и т. д.

Типовые математические схемы имеют преимущества простоты и наглядности. В качестве детерминированных моделей, когда при исследовании случайные факторы не учитываются, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные и другие уравнения, а для представления систем, функционирующих в дискретном времени – конечные автоматы и конечно-разностные схемы. В качестве стохастических моделей (при учете случайных факторов) для представления систем с дискретным временем используются вероятностные автоматы, а для представления систем с непрерывным временем – системы массового обслуживания. Для анализа причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов, применяют сети Петри. Для описания поведения непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем можно применять обобщенный (универсальный) подход на основе агрегативной системы. При агрегативном описании сложный объект (система) расчленяется на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие взаимодействие частей.

Таким образом, при построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный (*D*-схемы); дискретно-стохастический (*P*-схемы); дискретно-детерминированный (*F*-схемы); непрерывно-стохастический (*Q*-схемы); сетевой (*N*-схемы); обобщенный или универсальный (*A*-схемы).