9. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения 2 порядка

Соотношение $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0$, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если это уравнение можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, то такое уравнение называется *уравнением в нормальной форме*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение. Например, уравнение вида $F(x, y, y')=0$ или в нормальной форме $y'=f(x, y)$ по определению есть дифференциальное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке вместе с производной в исходное уравнение обращает его в тождество.

Общим решением уравнения $F(x, y, y')=0$ называется функция $y=\varphi(x, C)$, удовлетворяющая двум условиям:

1. Обращает исходное уравнение в тождество.
2. Для любых значений x_0, y_0 существует единственное значение произвольной постоянной $C=C_0$, такое, что $\varphi\left(x_0, C_0\right)=y_0$.

Под общим решением также понимается решение *в неявной форме* вида $\Phi(x, y, C)=0$, которое иначе еще называют *общим интегралом*.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y=\varphi\left(x, C_0\right)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной интегрирования $C=C_0$.

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его нужно подчинить некоторым дополнительным условиям. Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу $y=y_0$, называется *начальным условием* и записывается как $y\left(x_0\right)=y_0$. Задача отыскания решения дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной и удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Если функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны по обеим переменным в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, то задача Коши имеет единственное решение.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями *высших порядков*. Например, дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде $F(x, y, y', y'') = 0$ или в нормальной форме $y'' = f(x, y, y')$.

Решением дифференциального уравнения второго порядка называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. *Общим решением* дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения констант C_1, C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, существуют единственные значения произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка и удовлетворяет данным начальным условиям.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача отыскания решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши* и имеет вид:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

1.1. Типы уравнений, допускающие понижение порядка

1. Дифференциальное уравнение второго порядка, *разрешенное относительно старшей производной* имеет вид $y'' = f(x)$ и решается методом последовательного интегрирования.

2. Дифференциальное уравнение второго порядка, *не содержащее явно искомую функцию* $y = f(x)$, имеет вид $F(x, y', y'') = 0$ и решается методом замены $y' = p$, где $p = p(x)$., тогда $y'' = p'$.

3. Дифференциальное уравнение второго порядка, *не содержащее явно независимую переменную* x, имеет вид $F(y, y', y'') = 0$ и решается методом замены $y' = p$, где $p = p(y)$. Тогда $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$.

Задача 9.1. Найти частное решение уравнения $(1 + e^x) \cdot y \dfrac{dy}{dx} = e^x$ при начальном условии $y(0) = 1$.

Решение

Имеем: $(1 + e^x) \cdot y\, dy = e^x\, dx$. Разделяя переменные и интегрируя обе части, найдём общий интеграл $\int y\, dy = \int \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx$, $\dfrac{1}{2} y^2 = \ln(1 + e^x) + C$.

Полагая $x = 0, \quad y = 1$ в общем интеграле, получим $0{,}5 = \ln 2 + C$, откуда находим $C = 0{,}5 - \ln 2$. Подставляя C в общий интеграл, окончательно имеем:

$$0{,}5 y^2 = \ln(1 + e^x) + 0{,}5 - \ln 2.$$

Задача 9.2. Решить уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение

Запишем уравнение в виде $y' = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$. Так как уравнение однородное, то положим $u = \dfrac{y}{x}$ или $y = u \cdot x$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получим:

$$x \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1 - u^2}.$$

Разделяем переменные: $\pm \dfrac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \dfrac{dx}{x}$.

Отсюда интегрированием находим: $\pm \arcsin u = \ln|x| + C$.

Заменяя u на $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл $\pm \arcsin \dfrac{y}{x} = \ln|x| + C$.

Преобразуя выражение, мы делили обе части уравнения на произведение $x \cdot \sqrt{1-u^2}$, и поэтому могли потерять решения, которые обращают в нуль его сомножители. Поэтому исследуем следствия из равенств $x=0$ и $\sqrt{1-u^2}=0$.

Но $x=0$ не является решением уравнения, а из второго равенстваполучаем, что $1-\dfrac{y^2}{x^2}=0$, откуда $y=\pm x$. Непосредственной подстановкой проверяем, что функции $y=x$, $y=-x$ являются решениями данного уравнения. Эти решения не получить из общего интеграла и, следовательно, они являются особыми решениями.

Задача 9.3. Решить уравнение $y'+2xy=2x\cdot e^{-x^2}$.

Решение

1. Уравнение является линейным по $y(x)$. Полагаем $y=u\cdot v$ и $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$. После подстановки уравнение примет вид:

$u'\cdot v+u\cdot(v'+2x\cdot v)=2x\cdot e^{-x^2}$.

2. Решаем вспомогательное уравнение $v'+2x\cdot v=0$, обращающее второе слагаемое в нуль независимо от значения u, т. е. $\dfrac{dv}{dx}=-2x\cdot v$, откуда $\int\dfrac{dv}{v}=-\int 2x\cdot dx$ или $\ln|v|=-x^2+C_1$. Так как на данном этапе нас интересует любое решение вспомогательного уравнения, для упрощения положим $C_1=0$ и получим $v=e^{-x^2}$.

3. Вернемся на один шаг назад и подставим полученную функцию в преобразованное подстановкой исходное уравнение. Второе слагаемое в нем обращается в нуль и имеем $u'\cdot e^{-x^2}=2x\cdot e^{-x^2}$, отсюда найдём функцию u: $du=2x\cdot dx$, проинтегрировав обе части, получим $u=x^2+C$.

4. Составим решение исходного уравнения в соответствии со сделанной подстановкой: $y=u\cdot v=(x^2+C)\cdot e^{-x^2}$.

Задача 9.4. Найти общее решение уравнения $y''=\sin x+\cos x$.

Решение

Интегрируя последовательно данное уравнение, имеем:

$y'=-\cos x+\sin x+C_1$,

$y=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2$.

Задача 9.5. Проинтегрировать уравнение $(1+e^x)y''=y'e^x$.

Решение

Сделаем подстановку $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$. Тогда имеем:

$$(1+e^x)p'=pe^x, \qquad \frac{dp}{dx}=p\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln|p|=\ln(1+e^x)+\ln|C_1|, \qquad p=C_1(1+e^x).$$

Возвращаясь к переменной y, получим дифференциальное уравнение первого порядка $y'=C_1(1+e^x)$. Отсюда интегрированием находим общее решение исходного уравнения

$$y=C_1x+C_1e^x+C_2.$$

Задача 9.6. Решить уравнение $y''=2y^3$, $\quad y(0)=1, \quad y'(0)=1$.

Решение

Сделаем замену $y'=p(y)$, $y''=p\cdot p'$. Имеем $pp'=2y^3$. Разделяя переменные, получим уравнение $pdp=2y^3dy$, откуда $p^2=y^4+C_1$ или $y'=\pm\sqrt{y^4+C_1}$.

Используя начальные условия, находим C_1:

$y'(0)=\pm\sqrt{y^4(0)+C_1}$, $\qquad 1=\pm\sqrt{1+C_1} \;\Rightarrow\; C_1=0$ (дополнительно замечаем, что начальному условию соответствует положительный вариант зависимости).

Таким образом, $\dfrac{dy}{dx}=y^2$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int dx, \quad -\frac{1}{y}=x+C_2, \qquad y=-\frac{1}{x+C_2}.$$

Учитывая начальные условия, находим C_2: $y(0)=-\dfrac{1}{C_2}, \quad \Rightarrow \quad C_2=-1$.

В итоге, искомое частное решение имеет вид $y=-\dfrac{1}{x-1}$.

1.2. Линейные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Системы дифференциальных уравнений

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ) имеет вид $y'' + py' + qy = 0$, где $p, q - \text{const}$. Для его решения составляется *характеристическое уравнение* $k^2 + pk + q = 0$ и находятся его корни. В зависимости от вида корней общее решение такого уравнения строится в одной из трех форм:

1. Дискриминант характеристического уравнения $D > 0$, тогда его корни $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ *действительные и разные*: $k_1 \neq k_2$. В этом случае общее решение имеет вид: $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где $C_1, C_2 - \text{const}$.

2. Дискриминант характеристического уравнения $D = 0$, тогда его корни $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ действительные и равные: $k_1 = k_2$. В этом случае общее решение имеет вид: $y(x) = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, где $C_1, C_2 - \text{const}$.

3. Дискриминант характеристического уравнения $D < 0$, тогда его корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ – комплексные числа. В этом случае общее решение имеет вид $y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, где $C_1, C_2 - \text{const}$.

В частности, при $\alpha = 0$ $k_{1,2} = \pm \beta i$ и общее решение записывается так:

$y(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$, где $C_1, C_2 - \text{const}$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + py' + qy = f(x)$, где $p, q - \text{const}$, $f(x)$ – заданная функция.

Его общее решение складывается из суммы общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему линейного однородного уравнения и частного решения y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_{\text{о.о}}(x) + y_{\text{ч.н}}(x) = \bar{y}(x) + y^*(x).$$

Иногда по функциональному виду правой части ЛНДУ можно предположить функциональный вид частного решения ЛНДУ, что сводит задачу отыскания частного решения к подбору подходящих значений нескольких числовых коэффициентов с помощью систем линейных алгебраических уравнений. Это называется «ЛНДУ со *специальной правой частью*». Основные случаи приводятся в таблице (Здесь $Q_k(x)$ и $M_k(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами).

$f(x)$	**Корни характеристического уравнения**	**Вид** $y_{\text{ч.н}} = y^*$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	0 – не корень	$y^* = Q_n(x)$
	0 – корень кратности r $(r = 1,2)$	$y^* = x^r Q_n(x)$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	α – не корень	$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$
	α – корень кратности r (r=1,2)	$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$
$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	βi – не корень	$y^*(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x$
	βi – корень кратности r $(r = 1,2)$	$y^*(x) = x^r(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$
$P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x$	βi – не корень	$y^*(x) = Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x$ $k = \max(n,m)$
	βi – корень кратности r $(r = 1,2)$	$y^*(x) =$ $= x^r\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right]$ $k = \max(n,m)$
$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\right.$	$\alpha \pm \beta i$ – не корень	$y^*(x) =$ $= e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right]$ $k = \max(n,m)$
	$\alpha \pm \beta i$ – корень кратности r $(r = 1,2)$	$y^*(x) =$ $= x^r e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right.$ $k = \max(n,m)$

Суть *метода вариации произвольной постоянной* заключается в том, что общее решение ЛНДУ ищется в виде, когда вместо произвольных постоянных C_1, C_2 подставляются соответствующие им функции $C_1(x)$, $C_2(x)$. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения ЛОДУ, то общее решение ЛНДУ ищется в виде

$y_{\text{о.н}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$. Неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Для ЛНДУ справедлив *принцип суперпозиции решений.* Пусть правая часть ЛНДУ равна сумме двух функций: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда частное решение ЛНДУ находится как сумма частных решений уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$; $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то есть $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$. Этот принцип сохраняется и для большего числа слагаемых функций.

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + f_2(t), \end{cases}$$

где a_{ij} – заданные числа, а $f_i(t)$ – заданные функции.

Система решается путём сведения к одному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задача 9.7. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$.

Находим его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Так как они действительные и различные, то получим общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Задача 9.8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 4 = 0$, откуда $k_1 = k_2 = -2$, следовательно, общее решение выглядит так: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x \cdot e^{-2x}$.

Задача 9.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 13 = 0$. Находим корни этого уравнения: $k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$. Тогда общее решение запишется в виде $y = e^{-2 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Задача 9.10. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

Решение

Найдём сначала общее решение однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + k - 2 = 0$, его корни вещественные числа $k_1 = 1,\quad k_2 = -2$. Поэтому общее решение однородного уравнения будет $\overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Исходя из «специального» вида правой части исходного уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y^* = A\cos x + B\sin x$.

Найдём производные:

$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x$, $\quad (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$.

Подставим их в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при тригонометрических функциях в левой части равенства, так получим систему для определения неизвестных коэффициентов

$$(-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \cos x - 3\sin x$$

$$\begin{cases} -A + B - 2A = 1 \\ -B - A - 2B = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (8.8) имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x.$$

Задача 9.11. Решить неоднородное дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ методом вариации произвольной постоянной.

Решение

Находим общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$. Следовательно, $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x$.

Тогда, следуя методу вариации произвольной постоянной, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y^* = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) x \cdot e^x$, где функции $C_1(x),\quad C_2(x)$ определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot xe^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot (xe^x + e^x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1} \end{cases}.$$

Решая систему методом исключений, найдём

$$C_1'(x) = -\frac{x}{x^2+1}, \qquad C_2'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Отсюда интегрируя, находим

$$C_1(x) = \int -\frac{x}{x^2+1}\,dx = -0{,}5\cdot\ln(x^2+1) + C_3,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\,x + C_4.$$

Так как необходимо найти какое-либо частное решение, то можно положить $C_3 = C_4 = 0$, тогда

$$y^* = -0{,}5\cdot\ln(x^2+1)\cdot e^x + (arctg\,x)\cdot xe^x.$$

Итак, окончательно общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2xe^x - 0{,}5\cdot\ln(x^2+1)\cdot e^x + (arctg\,x)\cdot xe^x.$$

Задача 9.12. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 1 \end{cases}$$

Решение

Из первого уравнения системы выразим $x_2 = \dfrac{dx_1}{dt} - 1$. Дифференцируя обе части данного равенства по t, получим $\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{d^2x_1}{dt^2}$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 = 1$. Его общее решение $x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1$.

Подставляя выражение $x_1(t)$ в выражение для x_2, получим $x_2(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1$.

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1,$$

$$x_2(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$$