10. Операционное исчисление[1]

10.1. Преобразование Лапласа и его основные свойства. Таблица оригиналов и изображений

Рассмотрим функцию $f(t)$ действительного переменного, определенную на полуоси $t \geq 0$, значения которой могут быть как действительными, так и комплексными.

Функцией-оригиналом будем называть любую комплекснозначную функцию $f(t)$, заданную на всей действительной оси t, удовлетворяющую следующим условиям:

1. На любом конечном интервале оси t функция непрерывна кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;

2. $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3. Существуют постоянные M и $\sigma_0 > 0$ такие, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$.

Наименьшее число σ_0, при котором выполняется третье условие, называется показателем роста $f(t)$. Для ограниченных оригиналов можно считать $\sigma_0 = 0$.

Часто используется другое определение функции – оригинала: Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$, непрерывная на интервале $0 \leq t < \infty$, если существует действительное число σ_0 (показатель роста функции $f(t)$) такое, что интеграл $I = \int_0^\infty e^{-\sigma t} |f(t)| dt$ сходится при $\sigma > \sigma_0$ и расходится при $\sigma < \sigma_0$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$, удовлетворяющей названным выше условиям, называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$, где $p = \sigma + i\omega$ – комплексная переменная, $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Im} p = \omega$. Интеграл в правой части этого равенства называют интегралом Лапласа, а функцию $F(p)$ – изображением функции $f(t)$.

---

[1] Для понимания определений и процедур вывода результатов предполагается предварительное знакомство с материалом раздела 4. «Основы теории функций комплексного переменного», но представленной вычислительной техникой зачастую можно пользоваться без этого.

Теоремы о существовании и единственности оригиналов доступны в учебно-теоретических изданиях.

Связь между изображением и соответствующим оригиналом обозначается $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$ и называется операционным (операторным) равенством. Для сохранения справедливости, изменения в любой части этого равенства должны адекватно и однозначно (но не всегда идентично) отражаться в другой его части.

Линейность. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$ и $g(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} G(p)$ с показателями роста σ_1 и σ_2, то для произвольных (комплексных) коэффициентов α и β имеет место операторное равенство $\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Подобие. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то для любого числа $\lambda>0$ справедливо операторное равенство $f(\lambda t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$

Смещение (затухание). $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ и a – произвольное комплексное число, то умножение оригинала на величину e^{at} соответствует изменению (смещению) аргумента изображения на величину a: $e^{at} f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p-a)$.

Запаздывание. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то запаздывание аргумента оригинала на положительное число $\tau > 0$ приводит к умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$, то есть $f(t-\tau) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} e^{-p\tau} F(p)$.

Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, то

$$f'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$

....

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0),$$

где под значением $f^{(n)}(0)$ понимается правый предел $\lim\limits_{t \to 0+0} f^{(n)}(t)$.

Интегрирование оригинала. Если $f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)$, то интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом некоторой функции и $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p}\cdot F(p)$.

Дифференцирование изображения. Если $f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)$, то $-t\cdot f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F'(p)$ и для натуральных n справедливо $(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F^{(n)}(p)$

Интегрирование изображения. Если $f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)$, а также сходится интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)dp$, то $\frac{f(t)}{t}\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p}\cdot F(p)$

Умножение изображений. Если $f(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)$, $g(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}G(p)$ и «свертка функций» (по определению) $f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, то $f(t)*g(t)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}F(p)\cdot G(p)$, то есть свертка функций–оригиналов соответствует умножению функций–изображений.

С использованием определения преобразования Лапласа и его свойств установлено взаимное соответствие следующих оригиналов и изображений.

№	**Оригинал $f(t)$**	**Изображение $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$**
1	Единичная функция Хевисайда $h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	Гиперболический синус $\mathrm{sh}(\omega t)=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	Гиперболический косинус $\mathrm{ch}(\omega t)=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
8	$e^{at}\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\mathrm{sh}(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\mathrm{ch}(\omega t)$	$\dfrac{p}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n, n – целое неотрицательное	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13	$t^n\cdot e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\mathrm{sh}(\omega t)$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\mathrm{ch}(\omega t)$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$t\cdot e^{at}\cdot\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$t\cdot e^{at}\cdot\cos(\omega t)$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\dfrac{\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)}{2\omega^3}$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\dfrac{\mathrm{ch}(\omega t)-\omega t\,\mathrm{sh}(\omega t)}{2\omega^3}$	$\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

Задача 10.1. Найти изображение единичной функции Хевисайда $h(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1,\ t\geq 0.\end{cases}$ по определению преобразования Лапласа

Решение

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$F(p)=\int_0^{\infty} h(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{\infty} 1\cdot e^{-pt}\,dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty}=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}.$$

Задача 10.2. Найти изображение функции e^{at}, где $a \in Z$; $a = \alpha + \beta i$, $\{\alpha;\beta\} \in R$.

Решение

Применяя преобразование Лапласа получим:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}\,dt = -\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^\infty = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} + \frac{1}{p-a}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} e^{-(p-a)\cdot\infty} + \dfrac{1}{p-a} = \dfrac{1}{e^\infty} + \dfrac{1}{p-a} \\ \mathrm{Re}(p-a) > 0 \end{array}\right] = \frac{1}{p-a}.$$

Таким образом, получаем: $e^{at} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p-a}$ (при $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$)

10.2. Восстановление оригинала по изображению. Решение дифференциальных уравнений и их систем операционным методом

1. Общая (но зачастую, не самая удобная в применении) формула для решения обратной задачи, указывающая возможность по известной функции $F(p)$ найти $f(t)$, то есть функцию–оригинал, называется формулой обращения преобразования Лапласа, или обратным преобразованием Лапласа (формула Римана-Меллина). Если $f(t)$ – функция – оригинал с показателем роста σ_0, непрерывная точке t и имеющая в этой точке конечные односторонние производные, а $F(p)$ – ее изображение, то $f(t) = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-ib}^{\sigma+ib} e^{pt}F(p)dt = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)dt$ (интеграл вычисляется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\,p > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста функции $f(t)$).

2. Если функция $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, и её удается представить в виде суммы простейших дробей (для этого применяется метод неопределенных коэффициентов) – находим по таблице и суммируем оригиналы для каждой простой дроби.

3. Если функция $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, знаменатель которой имеет лишь простые корни p_1, p_2, … p_n, то, согласно теореме, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{A(p)}{B(p)}$.

4. Сложное для анализа изображение предварительно подвергается специальному преобразованию[2], после которого применяются вышеописанные приемы.

5. В некоторых случаях, для восстановления оригинала полезным оказывается непосредственное применение теорем о свойствах преобразования Лапласа (запаздывания, смещения, об интегрировании изображения и другие).

Задача 10.3. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Решение. Разлагаем $F(p)$ на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами: $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4}$

Используя «частные положения», находим коэффициенты A, B, C и D из равенства $A(p-2)(p^2+4)+B(p+1)(p^2+4)+(Cp+D)(p+1)(p-2)=p+2$

При $p=2$: $24B=4 \Rightarrow B=\dfrac{1}{6}$;

При $p=-1$: $-15A=1 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{15}$;

При $p=0$: $-8A+4B-2D=2 \Rightarrow \dfrac{8}{15}+\dfrac{2}{3}-2D=2 \Rightarrow D=-\dfrac{2}{5}$;

При $p=1$: $-5A+10B-2\left(C-\dfrac{2}{5}\right)=3 \Rightarrow C=-\dfrac{1}{10}$.

Окончательно:

$$F(p)=\left(-\frac{1}{15}\right)\frac{1}{p+1}+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{p-2}-\left(\frac{1}{10}\right)\frac{p}{p^2+4}-\left(\frac{2}{5}\right)\frac{1}{p^2+4}$$

Используя таблицу, получим искомую функцию – оригинал:

$$f(t)=\left(-\frac{1}{15}\right)e^{-t}+\left(\frac{1}{6}\right)e^{2t}-\left(\frac{1}{10}\right)\cos(2t)-\left(\frac{2}{5}\right)\frac{\sin(2t)}{2}$$

---

[2] О разложении в ряд Лорана, см. следующие разделы «3. Теория рядов» и «4. Основы теории функций комплексного переменного»

Операционный метод позволяет свести дифференциальное уравнение или их систему к алгебраическим аналогам. Решение алгебраического уравнения (или системы) дает изображение решения исходного уравнения, а по изображению находится само решение.

Задача 10.4. Найти решение уравнения $y''+5y'+6y=e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

Решение

По свойству дифференцирования оригиналов,

$$y(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} Y(p) \Rightarrow \begin{cases} y'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} pY(p) - y(0) = pY - 1 \\ y''(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y - p + 2 \end{cases}$$

При этом (по таблице оригиналов и изображений) $e^t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \dfrac{1}{p-1}$

Заменяя последовательно элементы в исходном дифференциальном уравнении, перейдем к операторному уравнению, разрешим его относительно изображения Y и представим (применение метода неопределенных коэффициентов опущено) в виде суммы простейших дробей:

$$p^2Y - p + 2 + 5pY - 5 + 6Y = \frac{1}{p-1}$$

$$\left(p^2 + 5p + 6\right)Y - p - 3 = \frac{1}{p-1}$$

$$Y = \frac{1/(p-1) + p + 3}{\left(p^2 + 5p + 6\right)} = \frac{p^2 + 2p - 2}{(p-1)(p+2)(p+3)} = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{1}{p-1} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{p+2} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{p+3}$$

Переходя к оригиналам, получим решение задачи Коши.

$$y = \left(\frac{1}{12}\right)e^t + \left(\frac{2}{3}\right)e^{-2t} + \left(\frac{1}{4}\right)e^{-3t} \text{ – ответ.}$$

Задача 10.5. При начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$ найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

Решение

По свойству дифференцирования оригиналов,

$$x(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} X(p) \Rightarrow x'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} pX(p) - x(0) = pX;$$

$$y(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} Y(p) \Rightarrow y'(t) \xrightarrow[\bullet]{\bullet} pY(p) - y(0) = pY.$$

При этом (по таблице оригиналов и изображений)

$$\cos t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{p}{p^2+1} \text{ и } \sin t \xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{p^2+1}.$$

Система в изображениях (искомые X и Y перенесены в левые части равенств и выделены как общие множители) примет вид

$$\begin{cases} (p-2)X - 4Y = \dfrac{p}{p^2+1} \\ X + (p+2)Y = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

Определим X и Y и представим в виде суммы простейших дробей (применение формул Крамера и метода неопределенных коэффициентов опущено):

$$X = \frac{p^2+2p+4}{p^2\left(p^2+1\right)} = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}$$

$$Y = \frac{2}{p^2\left(p^2+1\right)} = \frac{-2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}$$

Возвращаясь к функциям–оригиналам, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t \\ y(t) = -2t + 2\sin t \end{cases} \text{ – ответ.}$$