11. Теория рядов

11.1. Числовые ряды

Пусть $\{u_n\}$ заданная бесконечная числовая последовательность. Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ называется *числовым рядом*, числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$, – *слагаемыми* ряда, u_n – *общим слагаемым* ряда. $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, \ldots$, $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ – частичные суммы ряда.

Предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ называется *суммой ряда* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Если этот предел конечен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся* и его сумма равна S. Если же предел не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет.

Слагаемые сходящегося ряда, взятые по абсолютной величине, убывают, стремясь к нулю (*необходимое условие сходимости*): $S < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Если же слагаемые ряда, взятые по абсолютной величине, не убывают, стремясь к нулю, т. е. $\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$, то такой ряд расходится (следствие из необходимого условия сходимости, достаточный признак расходимости).

Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (но влияет на сумму).

Свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ (где $c = \text{const}$) также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S_1 и S_2, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ сходятся, причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Примеры числовых рядов

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1,\\ \text{расходится, если } \alpha\le 1,\end{cases}$ – обобщенный гармонический ряд, в частности, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a\,q^{n}=\begin{cases}\text{сходится, если } |q|<1, \text{причем, } S=\dfrac{a}{1-q},\\ \text{расходится, если } |q|\ge 1,\end{cases}$ – геометрическая прогрессия.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится, если } a<1,\\ \text{расходится, если } a\ge 1.\end{cases}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ – сходится, причем $S=1$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – сходится, причем $S=e$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}=\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1,\\ \text{расходится, если } \alpha\le 1.\end{cases}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$ – сходится, причем $S=\ln 2$.

Признаки сравнения рядов с положительными членами

Пусть даны два знакоположительных числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

1. Если $u_n\le v_n$, то:

а) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится;

б) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$, $v_n\ne 0$, $0<k<\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов
с положительными членами

1. *Признак Даламбера*. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\begin{cases}\text{сходится, если } l<1,\\ \text{расходится, если } l>1,\\ \text{признак не дает ответа, если } l=1.\end{cases}$$

2. *Радикальный признак Коши.* Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\begin{cases}\text{сходится, если } l<1,\\ \text{расходится, если } l>1,\\ \text{признак не дает ответа, если } l=1.\end{cases}$$

3. *Интегральный признак Коши.* Пусть члены знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ являются значениями при $x=1,2,3,\ldots,n,\ldots$ некоторой непрерывной функции $f(x)$, монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$, так что $u_n=f(n)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Знакочередующимися называются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots,$ где $u_n>0$.

Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда утверждает: если последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$, то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ сходится, при этом его сумма $0<S<u_1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (а сам ряд знакопеременный ряд сходится).

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ – сходится условно, причем $S=\ln 2$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ – сходится абсолютно, причем $S=\frac{\pi^2}{12}$.

Задача 11.1. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+3}$.

Решение

Применим достаточный признак расходимости. Для этого найдем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}\neq 0,$$ поэтому ряд расходится.

Задача 11.2. Найти сумму числового знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{8^n}$.

Решение

Преобразуем общий член заданного ряда

$$a_n=\frac{2^n+4^n}{8^n}=\frac{2^n}{8^n}+\frac{4^n}{8^n}=\left(\frac{2}{8}\right)^n+\left(\frac{4}{8}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Тогда заданный ряд можно представить в виде суммы двух геометрических рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{8^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ со знаменателями $q_1=\frac{1}{4}<1$ и $q_2=\frac{1}{2}<1$ соответственно. По определению геометрического ряда, полученные ряды сходятся, а их сумма ряда равна сумме полученных рядов

$$S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

Задача 11.3. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^4+8n-1}$.

Решение

Общий член исходного ряда имеет вид $a_n=\frac{n+3}{n^4+8n-1}$. В числителе и в знаменателе a_n содержатся многочлены, поэтому применим признак сравнения. Найдем общий член эталонного ряда: $a_n=\frac{n+3}{n^4+8n-1}\approx\frac{n}{n^4}=\frac{1}{n^3}=b_n$.

В качестве эталонного ряда возьмем обобщенный гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – сходится, т.к. $s=3>1$.

Далее, вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)n^3}{(n^4+8n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3}{n^4+8n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^4\left(1+\frac{8}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}=1\neq 0.$$

Так как эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится и $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\neq 0$, то по признаку сравнения заключаем, что исходный ряд также сходится.

Задача 11.4. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Решение

Общий член заданного ряда содержит показательную функцию 2^n, поэтому применим признак Даламбера. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\begin{matrix}a_n=\frac{n}{2^n}\\ a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}<1,$$

значит, по признаку Даламбера заданный ряд сходится.

Задача 11.5. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение

Общий член заданного ряда содержит показательную функцию 5^n и факториал $n!$, поэтому применим признак Даламбера. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\begin{array}{l} a_n=\dfrac{n!}{5^n} \\ a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{n!\cdot 5^{n+1}}=\left|\begin{array}{l}(n+1)!= \\ =1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)= \\ =n!\cdot(n+1)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot 5^n}{n!\cdot 5^{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty>1,$$

значит, по признаку Даламбера заданный ряд расходится.

Задача 11.6. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{2n}$.

Решение

Общий член заданного ряда находится в степени, содержащей n, поэтому применим радикальный признак Коши. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(4+\dfrac{3}{n}\right)}\right)^2=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}<1,$$

следовательно, по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Задача 11.7. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение

Общий член заданного ряда находится в степени, содержащей n, поэтому применим радикальный признак Коши. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^n=\left|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}}=e^{\frac{2}{1+0}}=e^2>1,$$

следовательно, по радикальному признаку Коши ряд расходится.

Задача 11.8. Числовая последовательность задана формулой общего члена $a_n=\left(-1\right)^{n+1}\dfrac{3n+1}{n^2-3}$. Записать a_7.

Решение

Подставим в формулу общего члена значение $n=7$. Получим

$$a_7=\left(-1\right)^{7+1}\frac{3\cdot 7+1}{7^2-3}=\left(-1\right)^8\frac{22}{46}=\frac{22}{46}=\frac{11}{23}.$$

Задача 11.9. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}$.

Решение

Покажем, что для данного ряда условия признака Лейбница выполнены. Имеем: $u_n=\dfrac{n+2}{n^2+5n+9},\quad u_{n+1}=\dfrac{n+3}{(n+1)^2+5(n+1)+9}=\dfrac{n+3}{n^2+7n+15}$.

Проверим, что $u_n>u_{n+1}$ для всех n: $n\ge 1$ $\dfrac{n+2}{n^2+5n+9}>\dfrac{n+3}{n^2+7n+15}$.

Решая это неравенство, после преобразований (знаменатель положительный для больших n)

$$\frac{n+2}{n^2+5n+9}-\frac{n+3}{n^2+7n+15}>0,$$

$$\frac{\left(n+2\right)\left(n^2+7n+15\right)-\left(n+3\right)\left(n^2+5n+9\right)}{\left(n^2+5n+9\right)\left(n^2+7n+15\right)}>0,$$

$$n^3+7n^2+15n+2n^2+14n+30-n^3-5n^2-9n-3n^2-15n-27>0$$

получим более простое неравенство

$$n^2+5n+3>0.$$

Последнее неравенство справедливо для всех n: $n \geq 1$, значит исходное неравенство также справедливо. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+5n+9} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+5n+9}$ сходится.

Далее следует продолжить исследование и ответить на вопрос о характере сходимости этого ряда. Для этого надо изучить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+5n+9}$, составленного из абсолютных величин.

Применим признак сравнения. За эталонный ряд следует взять гармонический расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Тогда $u_n = \frac{n+2}{n^2+5n+9}$, $v_n = \frac{1}{n}$ и предел отношения их общих членов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n}{n^2+5n+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+5n+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{9}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Значит, по сходимости ряды ведут себя одинаково. А так как выбранный гармонический ряд расходится, то и ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+5n+9}$ тоже расходится. Следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+5n+9}$ сходится условно.

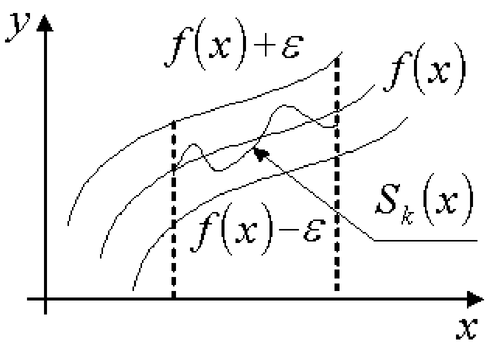
11.2. Функциональные ряды

Функциональным рядом называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $n \in N$, $x \in D$, где D – область существования функций $f_n(x)$. При $x = x_0 \in D$ из функционального ряда получается числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Если для $x_0 \in D$ числовой ряд сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда. Если в каждой точке $x \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходятся, то функциональный ряд называется *сходящимся в области* D_1. Совокупность всех точек сходимости образует *область сходимости* функционального ряда.

Сумма вида $S_k(x)=\sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ называется *частичной суммой* ряда. Функциональный ряд сходится к функции $f(x)$, если $\lim_{k\to\infty} S_k(x)=f(x)$.

Функциональный ряд, сходящийся для всех $x \in D_1$ из области сходимости, называется *равномерно сходящимся* в этой области, если $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, независящий от x, такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всех x из области сходимости, где $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ – остаток ряда.



Геометрический смысл равномерной сходимости состоит в следующем. Если график функции $y=f(x)$ окружить «ε-полосой», определяемой соотношением $f(x)-\varepsilon < f(x) < f(x)+\varepsilon$, то графики всех частичных сумм, начиная с достаточно большого k, $\forall x \in [a,b]$ целиком лежат в этой «ε-полосе», окружающей график предельной функции $y=f(x)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *мажорируемым в области* D, если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, что для $\forall x \in D$ $|f_n(x)| \le u_n$, $n=1,2,\ldots$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *мажорантой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Признак Вейерштрасса (признак равномерной сходимости функционального ряда). Функциональный ряд сходится равномерно в области сходимости, если он является мажорируемым в этой области.

Степенные ряды

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ называется *степенным рядом*, записанным по степеням $\left(x - x_0\right)$. При $x_0 = 0$ получается степенной ряд, записанный по степеням x $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Для любого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует интервал $\left(-R, R\right)$ такой, что при всех $|x| < R$ этот ряд сходится абсолютно, а $|x| > R$ – расходится. Число R называется *радиусом сходимости*. Интервал $\left(-R, R\right)$ называется *интервалом сходимости*. *Областью сходимости* степенного ряда называется интервал сходимости с возможным присоединением концевых точек.

На интервале сходимости ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. На любом отрезке из интервала сходимости он сходится равномерно.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $\left[-R', R'\right]$, $\forall R' < R$, то его можно почленно дифференцировать и интегрировать в интервале сходимости. Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием, имеют тот же интервал сходимости.

Разложение элементарных функций в степенные ряды

1. Ряд Тейлора по степеням $\left(x - x_0\right)$:

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!} \cdot \left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!} \cdot \left(x - x_0\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \cdot \left(x - x_0\right)^n + \ldots$$

2. Ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

3. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty;\infty).$

4. $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty;\infty).$

5. $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;\infty).$

6. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty;\infty).$

7. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;\infty).$

8. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ x\in(-1;1].$

9. $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in[-1;1).$

10. $\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in[-1;1].$

11. $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x\in[-1;1].$

12. $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-n+1)\ldots}{n!}x^n,\ x\in(-1;1).$

13. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1;1).$

14. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\ x\in(-1;1).$

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Часто в задачах прикладного характера приходится рассматривать дифференциальные уравнения, решения которых не являются элементарными функциями или не находятся известными методами. Тогда решения находят в виде разложения функции в степенной ряд.

Рассмотрим *метод последовательного дифференцирования.*

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Обозначим через $y(x)$ это решение. Представим искомое решение в виде ряда Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

где $y(x_0), \frac{y'(x_0)}{1!}, \frac{y''(x_0)}{2!}, \ldots, \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ – постоянные коэффициенты.

Начальные условия определяют первый из коэффициентов ряда $y(x_0) = y_0$. Подставив в правую часть уравнения $x = x_0$, $y = y_0$, найдем $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Для отыскания $y''(x_0)$ дифференцируем заданное уравнение по аргументу x и вновь подставляем в полученное равенство $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$. Продолжая этот процесс, найдем остальные коэффициенты разложения функции в ряд.

Тригонометрический ряд Фурье

Для периодической функции $f(x)$ с периодом 2π имеет место равенство, называемое *рядом Фурье*: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,где коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Для четных функций $f(-x)=f(x)$ ряд Фурье содержит только *косинусы* кратных дуг: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, где $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$.

Для нечетных функций $f(-x)=-f(x)$ ряд Фурье содержит только *синусы* кратных дуг: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

Для функций с произвольным периодом $T=2l$, $f(x+2l)=f(x)$ ряд Фурье имеет вид: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$. Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция, заданная на отрезке $[0;l]$. На отрезке $[-l;0]$ она может быть продолжена произвольным образом: $\varphi(x)=\begin{cases}f(x),\ x\in[0;l];\\ f_1(x),\ x\in[-l;0],\end{cases}$ где $f_1(x)$ – некоторая кусочно-монотонная функция. Наиболее часто встречающиеся продолжения:

1. $f_1(x)=f(-x)$, $x\in[0;l]$ (четное продолжение), тогда $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x$, где $a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx$, $x\in[0;l]$.

2. $f_1(x)=-f(-x)$, $x\in[-l;0]$ (нечетное продолжение), тогда $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x$, где $b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$, $x\in[0;l]$.

На всю действительную ось $\varphi(x)$ продолжается периодически с периодом $2l$, $\varphi(x)=\varphi(x+2l)$.

Функция $\varphi(x)$ раскладывается в ряд Фурье, причем в точках $x = \pm l$ выполняется условие: $S(l) = \dfrac{\varphi(l-0)+\varphi(l+0)}{2}$, где $\varphi(l-0) = f(l-0)$, $\varphi(l+0) = \varphi(-l+0) = f(-l+0)$, т. е. $S(l) = \dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}$, $S(-l) = S(l)$. Здесь $f(l-0) = \lim\limits_{x\to l-0} f(x)$ – левосторонний предел функции $f(x)$ в точке $x = l$, а $f(l+0) = \lim\limits_{x\to l+0} f(x)$ – правосторонний предел функции $f(x)$ в точке $x = l$.

Задача 11.10. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{3^n \cdot n}$.

Решение

Обозначим $u_n = \dfrac{\left|(x+1)^n\right|}{3^n \cdot n}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{\left|(x+1)^{n+1}\right|}{3^{n+1}\cdot(n+1)}$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\cdot 3^n \cdot n}{|x+1|^n \cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{3}.$$

По признаку Даламбера при $\dfrac{|x+1|}{3} < 1$ ряд сходится. Тогда $|x+1| < 3$, отсюда $-3 < x+1 < 3$ и, значит искомый интервал сходимости $-4 < x < 2$.

Исследуем сходимость заданного ряда на концах найденного интервала $-4 < x < 2$.

На правом конце интервала при $x = 2$ получим знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2+1)^n}{3^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Это гармонический расходящийся ряд, поэтому точка $x = 2$ не входит в область сходимости ряда.

На левом конце интервала при $x = -4$ получим знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4+1)^n}{3^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cdot 3^n}{3^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который по признаку Лейбница сходится, так как выполняются оба его условия: члены ряды убывают: $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. А так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится, значит, полученный знакочередующийся числовой ряд сходится условно. Следовательно, точка $x=-4$ входит в область сходимости ряда.

В итоге, область сходимости степенного ряда представляет собой промежуток $\left[-4;2\right)$.

Задача 11.11. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-3\right)^n$, если радиус сходимости равен $R=4$.

Решение

Данный степенной ряд соответствует ряду вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+\ldots$$

На основании теоремы Абеля для степенного ряда вида его интервал сходимости определяется из неравенства $\left|x-x_0\right|<R$, т. е. $\left|x-3\right|<4$, отсюда $-4<x-3<4$ и, значит искомый интервал сходимости $-1<x<7$ или $\left(-1;7\right)$.

Задача 11.12. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 10^{-2}.

Решение

Используя разложение в ряд функции e^x и заменив x на $\left(-x^2\right)$, запишем ряд Маклорена для подынтегральной функции:

$$e^{-x^2}=1+\left(-x^2\right)+\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(-x^2\right)^4}{4!}+\ldots=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots.$$

Далее полученное выражение проинтегрируем

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\ldots=$$
$$=1-0,333+0,1-0,024+0,005-\ldots$$

Так как пятый член знакочередующегося числового ряда меньше заданной точности, то есть $0{,}005 < 0{,}01$, то достаточно оставить четыре слагаемых.

В итоге с точностью до 10^{-2} получим

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - 0{,}333 + 0{,}1 - 0{,}024 = 0{,}743 \approx 0{,}74.$$

Задача 11.13. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = 3xy - e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, взяв первые четыре ненулевых члена ряда.

Решение

Запишем решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда, разложенного по степеням x учитывая начальное условие $x_0 = 0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \ldots,$$ где

$y(x_0) = y(0) = 1$ (согласно начальному условию).

Коэффициент $y'(0)$ найдем на основе заданного уравнения

$y'(0) = 3 \cdot 0 \cdot 1 - e^{2 \cdot 0} = -1$.

Для нахождения $y''(0)$ продифференцируем обе части исходного уравнения по переменной x и получим $y''(x) = 3y + 3xy' - 2e^{2x}$. Тогда $y''(0) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 3 - 2 = 1$.

Аналогично вычисляется третья производная $y'''(x)$ и ее значение в точке $x_0 = 0$:

$$y'''(x) = 3y' + 3y' + 3xy'' - 4e^{2x} = 6y' + 3xy'' - 4e^{2x},$$

$$y'''(0) = 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot e^{2 \cdot 0} = -6 - 4 = -10.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в ряд. Тогда приближенное решение будет иметь вид $y(x) \approx 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{10x^3}{3!}$ или $y(x) \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}$.