12. Основы теории функций комплексного переменного

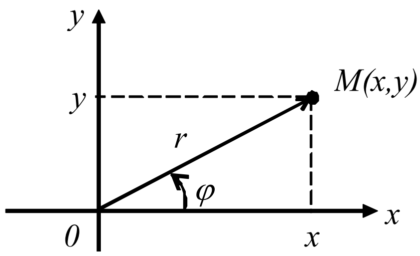
Комплексные числа

Комплексным числом называется запись вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица со свойством $i^2 = -1$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа (символически это записывается так: $x = \operatorname{Re} z$), y – *мнимой частью* комплексного числа (символически это записывается так: $y = \operatorname{Im} z$).

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить на плоскости Oxy точкой $M(x, y)$, а можно вектором, начало которого находится в точке O(0,0), а конец – в точке $M(x, y)$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью и обозначается символом (z). Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ось Ox, на которой изображаются действительные числа, называется действительной осью, а ось Oy, на которой изображаются чисто мнимые числа $z = iy$, – мнимой осью.



Формы записи комплексных чисел

1. *Алгебраическая*: $z = x + iy$.

2. *Тригонометрическая*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z| = \operatorname{Mod} z$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

3. *Показательная*: $z = r\,e^{i\varphi}$.

Связь между различными характеристиками комплексных чисел

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } x < 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ если } x < 0, y < 0. \end{cases} \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Действия над комплексными числами

1. Операции *сложения и вычитания* определены над числами, записанными в *алгебраической форме*.

Так, для чисел $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 + z_2 = \left(x_2 + iy_2\right) + \left(x_1 + iy_1\right) = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right);$$

$$z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right).$$

2. Операция *умножения* определена для комплексных чисел, записанных *в одной из трех форм*.

Так, для чисел $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right).$$

Для чисел $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Для чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

3. *Комплексное сопряжение*: $\overline{z} = x - iy,\ \overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),\ \overline{z} = r\,e^{-i\varphi}$.

4. Операция *деления* определена для комплексных чисел, записанных *в одной из трех форм*.

Так, для чисел $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для чисел $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Для чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

5. Операции *возведение в степень* и *извлечение корня* определены для чисел, записанных в тригонометрической или показательной формах.

Так, для чисел $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ и $z = re^{i\varphi}$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);\ z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Здесь использована формула Муавра $(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Различные значения корня получаются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Задача 12.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение

$z_1 + z_2 = 2 + 3 + i(5 - 4) = 5 + i$.

$z_1 - z_2 = (2 - 3) + i(5 + 4) = -1 + 9i$.

$z_1 z_2 = (2 + 5i)(3 - 4i) = 6 + 15i - 8i - 20i^2 = 26 + 7i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+5i}{3-4i} = \frac{(2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6+15i+8i+20i^2}{9-16i^2} = \frac{-14+23i}{25} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i.$$

Задача 12.2. Решить уравнение $z^2 - 2z + 4 = 0$ и представить его корни в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить их на комплексной плоскости.

Решение

Найдем корни квадратного уравнения $z^2 + 2z + 4 = 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Получили два комплексных числа, записанных в алгебраической форме $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Запишем эти числа в двух других формах. Для этого найдем их модули и аргументы:

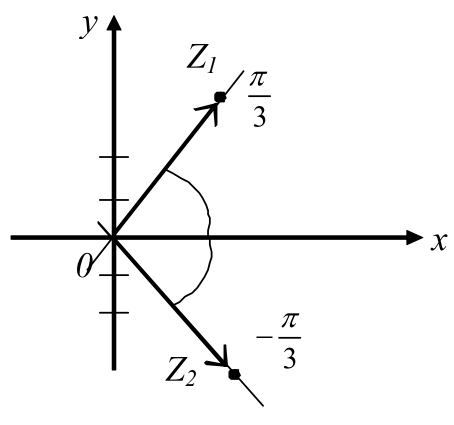
$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, значит $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$ и $\arg z_1 = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда $z_1 = 2(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3})) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Аналогично, для второго числа $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, значит $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$ и $\arg z_2 = arctg\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$.

Откуда $z_2 = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3})) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Изобразим эти корни на комплексной плоскости.



Задача 12.3. Найти все значения корня $\sqrt[3]{(-\sqrt{3}+i)}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение

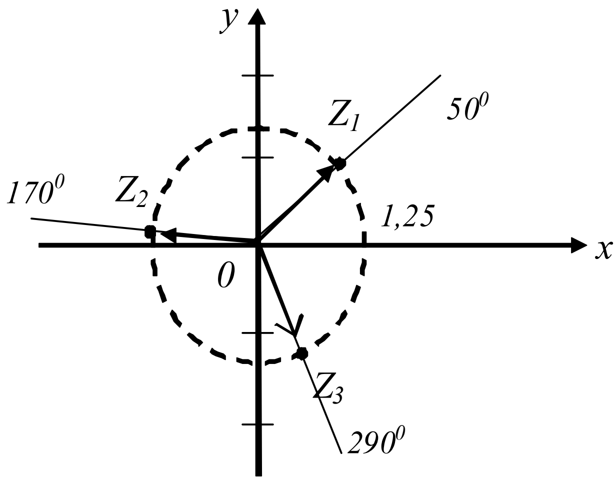
Найдем аргумент и модуль комплексного числа $z=-\sqrt{3}+i$. $|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$, $\varphi=\arg z=arctg\dfrac{y}{x}=arctg\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{5\pi}{6}$. Тогда по формуле извлечения корня имеем

$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})}=\sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3})$. Найдем все значения корня

$k=0\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{5\pi}{18}+i\sin\dfrac{5\pi}{18})$,

$k=1\Rightarrow z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{17\pi}{18}+i\sin\dfrac{17\pi}{18})$,

$k=2\Rightarrow z_3=\sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{29\pi}{18}+i\sin\dfrac{29\pi}{18})$.



Изобразим эти числа на комплексной плоскости.

Задача 12.4. Вычислить $(i-1)^4+4e^{\frac{\pi}{6}i}+4\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3}+i\sin\dfrac{-2\pi}{3}\right)$. Ответ записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение

Представим данное выражение в виде суммы трех комплексных чисел: ${z_1}^4$ (где $z_1=i-1=-1+i$), $z_2=4e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_3=4\sqrt{3}(\cos\dfrac{-2\pi}{3}+i\sin\dfrac{-2\pi}{3})$.

Преобразуем данные числа:

1. $z_1=(-1+i)$. Значит, $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ и $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

Тогда ${z_1}^4=(\sqrt{2})^4(\cos\dfrac{3\pi\cdot 4}{4}+i\sin\dfrac{3\pi\cdot 4}{4})=4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))=-4$.

2. $z_2 = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} + 2i$.

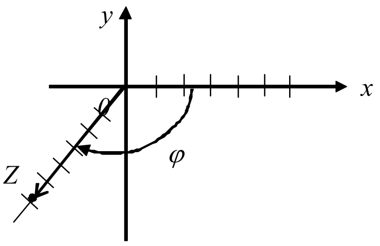
3. $z_3 = 4\sqrt{3}(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}) = 4\sqrt{3}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}) = 2\sqrt{3} - 6i$.

В итоге, $z = z_1^4 + z_2 + z_3 = -4 + 2\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3} - 6i = -4 - 4i$.

Мы нашли алгебраическую форму данного выражения. Запишем тригонометрическую и показательную формы:

$|z| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и

$z = -4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$.



Это число изображено на комплексной плоскости.

Функция комплексного переменного

Если каждому комплексному числу $z = x + iy$, принадлежащему области D, по некоторому правилу поставлено в соответствие одно определенное комплексное число $w = u + iv$, то говорят, что на области D задана однозначная функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Геометрически заданную на D функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение множества D, лежащего в плоскости z, на некоторое множество G плоскости w. Множество G называют образом множества D.

Производной от функции $w = f(z)$ в точке z называется предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$. Если в точке z функция $f(z)$ имеет производную, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y) как функции двух переменных x, y, и выполнялись условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Эти равенства называются условиями Коши-Римана.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцирема в этой точке и ее окрестности. Функция называется *аналитической в области*, если она дифференцирема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $f(z)$ справедливо $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Вследствие выполнения условий Коши-Римана производная также может быть найдена из равенств $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Задача 12.5. Показать, что функция $w=z^2-z$ является аналитической на всей комплексной плоскости, найти ее производную.

Решение

Определим функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$: $w=(x+iy)^2-x-iy=$ $=x^2-y^2-x+i(2xy-y)$, таким образом, $u(x,y)=x^2-y^2-x$ и $v(x,y)=2xy-y$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y$.

Очевидно, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в любой точке и условия Коши-Римана выполняются. Следовательно, функция $f(z)$ дифференцируема на всей комплексной плоскости, а значит, аналитическая. Её производная: $w'=f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x-1+i2y=2(x+iy)-1=2z-1$.

Задача 12.6. Является ли функция $w=z\,\mathrm{Re}\,z$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Определим функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$: $w=(x+iy)x=x^2+ixy$, $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=xy$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$. Условия существования производной (условия Коши-Римана) выполняются лишь в точке $(0,0)$. Следовательно, функция дифференцируема только в точке $z=0$ и нигде не аналитична.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна на некоторой гладкой кривой L, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$.

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой L (в выбранном направлении) называется предел интегральной суммы (аналогично криволинейному интегралу) $\int\limits_L f(z)dz=\lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$. Вычисление интеграла сводится к вычислению определенного интеграла (где $L: z(t)=x(t)+iy(t)$ – уравнение кривой в комплексной форме) $\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt$.

Интеграл $\int\limits_L f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования. Однако если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл в этой области не зависит от пути интегрирования. Это утверждение равносильно следующей теореме.

Теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру L, принадлежащему D, равен нулю.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $f(z)$ – аналитическая в замкнутой многосвязной области D и на кусочно-гладком контуре L, ограничивающем D, то интеграл от функции по внешнему контуру L равен сумме интегралов по всем внутренним контурам при условии, что интегрирование производится по всем контурам против часовой стрелки.

Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, то для любой точки $z_0 \in D$ и для любого кусочно-гладкого контура L, целиком лежащего в области D и содержащего точку z_0 внутри себя, справедлива *интегральная формула Коши*: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$.

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливо равенство: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$.

Задача 12.7. Вычислить $\int\limits_L (\bar{z} - 1)dz$, где L – дуга параболы $x = y^2 + 1$ от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = 5 + 2i$.

Решение

Параметрические уравнения заданной параболы имеют вид $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t, \end{cases}$ или в комплексной форме $z = t^2 + 1 + it$, где $0 \le t \le 2$.

Сводя искомый интеграл к определенному интегралу, получим:

$$\int\limits_L (\bar{z} - 1)dz = \int\limits_0^2 \left(t^2 + 1 - it - 1\right)\left(2t + i\right)dt = \int\limits_0^2 \left(2t^3 - it^2 + t\right)dt = \left.\left(\frac{t^4}{2} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\right|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i.$$