13. Основы дискретной математики

Случайные события. Алгебра событий.

Рассмотрим некоторый опыт со случайными исходами. Под *событием* понимается любой исход данного опыта, который может произойти или не произойти. События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например: A, B, H_1. Событие называется *достоверным*, если оно в результате данного опыта не может не произойти. Событие называется *невозможным*, если оно в результате данного опыта не может произойти. Достоверное событие также называется *множеством допустимых исходов*. Невозможное событие будем обозначать $\varnothing$.

К событиям применяются следующие алгебраические операции.

Произведением (*пересечением*) событий A и B (обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$) называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие A, и событие B.

События A и B называются *несовместными*, если в результате данного опыта они не могут произойти одновременно, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Суммой (*объединением*) событий A и B (обозначается $A + B$ или $A \cup B$) называется событие C, которое происходит тогда, когда происходит либо событие A, либо B, либо оба одновременно.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* (*дополнением*) к событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

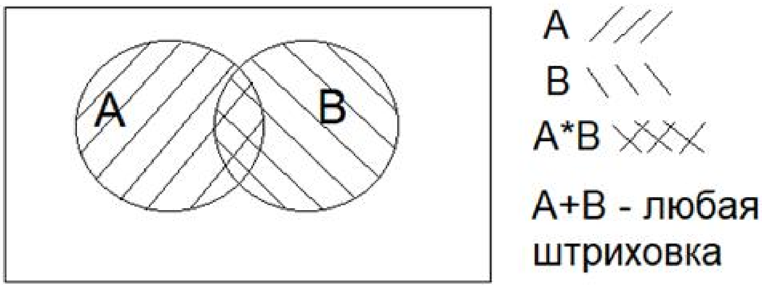
Задача 13.1. Производится опыт – бросание игральной кости. Рассматриваются события A – {выпадет четное число очков} и B – {выпадет не более четырех очков}. Найти исходы событий $C = A \cdot B$, $D = A + B$, $\overline{A}$.

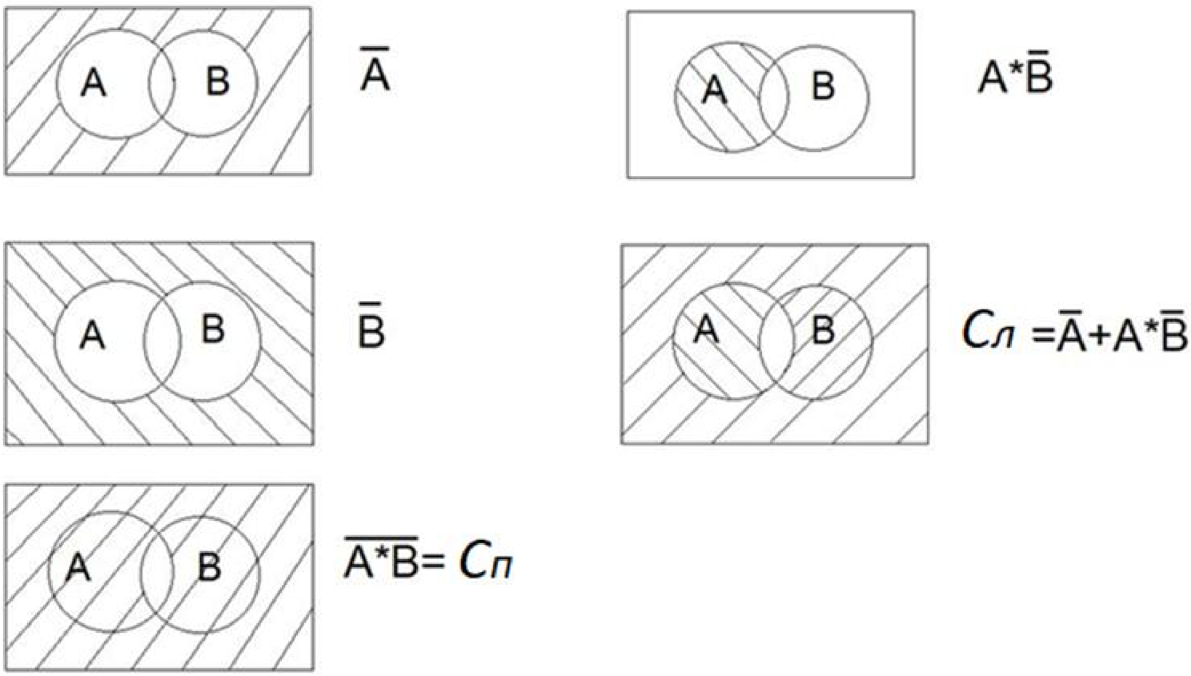
Решение. Возможные исходы опыта – выпадение одного, двух, …, шести очков. Следовательно, событие C – {выпадет два или четыре очка}, D – {выпадет любое число очков, кроме пяти}, $\overline{A}$ – {выпадет нечетное число очков}.

Задача 13.2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проиллюстрировать справедливость алгебраической формулы $\left[\bar{A} + (A * \bar{B}) = \overline{(A * B)}\right]$ (A и B – произвольные события):

Решение

Проиллюстрируем по отдельности левую $\left(C_{\text{л}} = \bar{A} + (A * \bar{B})\right)$ и правую $\left(C_{\text{п}} = \overline{(A * B)}\right)$ части равенства диаграммами Эйлера-Венна:





Так как иллюстрации идентичны и $C_{\text{л}} = C_{\text{п}}$, равенство доказано.

Замечание. Аналитическое доказательство для этой формулы несложно получить, используя алгебраические свойства событий:

$$\bar{A} + (A * \bar{B}) = \begin{bmatrix} \text{раскрыты скобки} \\ \text{относительно} \\ \text{общего слагаемого} \end{bmatrix} = (\bar{A} + A) * (\bar{A} + \bar{B}) = [\bar{A} + A = \Omega] =$$

$\Omega * (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A} + \bar{B} = \begin{bmatrix} \text{использован один из} \\ \text{законов де Моргана} \end{bmatrix} = \overline{(A * B)}$ – совпало с правой частью равенства.

Задача 13.3. Брошена игральная кость. Событие A – выпадение НЕ менее 3-х очков, событие B – выпадение четного числа очков. C – выпадение более четырех очков. Указать множество элементарных результатов, благоприятных к этим событиям. Выразить через A, B и C событие D – выпадение шести очков.

Решение

1. Запишем элементарные исходы, благоприятные к указанным событиям:

$\boldsymbol{A}$ = [не менее 3 очков] = $\{\mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{B}$ = [четное количество очков] = $\{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{C}$ = [более 4 очков] = $\{\mathbf{5}; \mathbf{6}\}$

$\mathrm{D} = [\text{выпадение шести очков}] = \{6\}$

2. Рассмотрим искомое. Так как событию D благоприятствует только один вариант, ожидаем, что ответ не будет получен сложением событий, а умножением или отрицанием после сложения.

Рассмотрим данное и попробуем выполнить элементарные действия с указанными событиями:

$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \{4; 6\}$

$\bar{\mathrm{C}} = \{1; 2; 3; 4\}$

…

$$B * C = \{6\} = \begin{bmatrix} \text{видим, что получился} \\ \text{желаемый состав} \\ \text{элементарных результатов} \end{bmatrix} = D$$

Элементы комбинаторики

Для вычисления количества результатов выбора может применяться как метод перебора (перечисления) всех возможных благоприятствующих и неблагоприятствующих событию исходов, так использование правил и формул комбинаторики.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то оба объекта в указанном порядке можно выбрать $n=n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами, а второй объект можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой объект можно выбрать $n=n_1+n_2$ способами.

Схема без повторений

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество «перестановок n элементов» $P_n = n!$.

Размещениями называют комбинации по m элементов в каждой, составленные из n исходных различных элементов, которые отличаются или составом элементов, или (при совпадении составов) их порядком. Количество «размещений (без повторений) из n элементов по m» $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетаниями называют комбинации по m элементов в каждой, составленные из n различных исходных элементов, которые отличаются только по составу. Количество «сочетаний (без повторений) из n элементов по m» $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Схема с повторениями

Перестановками с повторениями из n_1, n_2, …, n_m элементов называют комбинации по $(n_1+n_2+\ldots+n_m)$ элементов в каждой, состоящие из одних и тех же m исходных элементов, повторяющихся n_1, n_2, …, n_m раз, и отличающиеся только порядком их расположения: $\overline{P}_n = \frac{P_{n_1+n_2+\ldots+n_m}}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \ldots \cdot P_{n_m}} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$.

«Размещениями с повторениями из n элементов по m» называют комбинации по m элементов в каждой, составленные из n различных исходных элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком: $\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m\ раз} = n^m$.

«Сочетаниями с повторениями из n элементов по m» называют комбинации по m элементов в каждой, составленные из n различных исходных элементов, которые отличаются по составу хотя бы одним элементом: $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Задача 13.4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «фикус»?

Решение. $N = P_5 = 5! = 120$.

Задача 13.5. В коробке 5 красных, 7 желтых, 3 зеленых и 2 черных карандаша. Сколько способов выбрать: 4 красных карандаша; 2 красных и 2 зеленых карандаша (произведение событий); по 1 карандашу разных цветов ?

Решение.

Выбрать 4 красных карандаша (наборы различаются только составом): $N = C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = [5! = 4! \cdot 5] = \frac{4! \cdot 5}{4! \cdot 1!} = 5$.

Выбрать 2 красных и 2 зеленых карандаша (наборы расных и зеленых карандашей различаются только составом):

$N = C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{5!}{2!3!} \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$

Выбрать по 1 карандашу разных цветов: $N = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 210$

Задача 13.6. Сколько способов раскрасить трехцветную картинку разными цветами, если есть 4 цвета?

Решение.

$N_1 = A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$ (без повторений)

$N_2 = \overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$ (с повторениями)

Задача 13.7. В списке экзаменационных вопросов 12 вопросов по первой теме, 15 – по второй теме и 11 – по третьей. Сколькими способами преподаватель может составить экзаменационный билет с двумя вопросами из разных тем?

Решение

1. Найдем количество несводящихся друг к другу типов билета, различающихся по тематическому составу: надо выбрать из трех тем две, которые будут представлены в билете, причем повторный выбор темы запрещен и порядок выбора темы не важен. Подходит комбинаторная величина «количество сочетаний» в схеме без возвращений: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ при $n = 3$, $m = 2$: $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$, то есть возможны билеты трех типов (по тематическому составу) – $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

2. Общий ответ будут получаться суммированием количеств билетов каждого типа: $N = N_1 + N_2 + N_3$

3. Рассчитаем возможное количество билетов каждого типа, используя комбинаторное правило умножения:

1тип $\{1, 2\}$: $N_1 = 12 * 15 = 180$

2 тип $\{1, 3\}$: $N_2 = 12 * 11 = 132$

3 тип $\{2, 3\}$: $N_3 = 11 * 15 = 165$

4. Заключаем, что

$N = N_1 + N_2 + N_3 = 180 + 132 + 165 = 4771$