14. Основы теории вероятностей

14.1. Случайные события

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу всех элементарных исходов $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Такое определение называют классическим определением вероятности.

Вероятность обладает следующими свойствами:

– $0 \le P(A) \le 1$;

– вероятность достоверного события равна единице;

– вероятность невозможного события равна нулю;

– $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

– $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместные (не могут произойти одновременно).

Задача 14.1. Из колоды 36 карт вытаскивается одна карта. Найти вероятности следующих событий: A – {карта окажется пиковым тузом}, B – {карта окажется королем}, C – {карта окажется червовой масти}.

Решение

В данном опыте для всех событий общее число элементарных исходов равно количеству карт в колоде – $n = 36$. Для события A число благоприятствующих исходов $m = 1$ (в колоде один пиковый туз), следовательно, $P(A) = \dfrac{1}{36}$. Для события B число благоприятствующих исходов $m = 4$ (в колоде четыре короля), следовательно, $P(B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. Для события C число благоприятствующих исходов $m = 9$ (в колоде четыре масти по девять карт в каждой), следовательно, $P(C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

Задача 14.2. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятности следующих событий: A – {сумма очков меньше шести}, B – {количество очков на одной кости превосходит на единицу количество очков на другой кости}, C – {выпадет хотя бы один раз шесть очков}.

Решение

В данном опыте для всех событий общее число элементарных исходов – это произведение всех вариантов для каждого бросания кости: $n = 6 \cdot 6 = 36$. Исходы можно перечислить: (1;1), (1;2), …, (1;6), (2;1), …, (6;6). Для события A благоприятствующими исходами будут: (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (4;1). Число исходов $m = 10$, следовательно, $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Для события B благоприятствующими исходами будут: (1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5), (5;4), (5;6), (6;5). Число исходов $m = 10$, следовательно, $P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Для события C число благоприятствующих исходов $m = 11$ (додуматься самостоятельно), следовательно, $P(C) = \frac{11}{36}$.

В опытах, когда из некоторого множества извлекаются два и более элемента, при подсчете числа исходов удобно пользоваться правилами и формулами комбинаторики (см. выше раздел «Дискретная математика»)

Задача 14.3. В урне находятся 8 шаров, среди которых 5 черных и 3 белых. Наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятности событий A – {все вынутые шары окажутся черными}, B – {все вынутые шары окажутся белыми}, C – {среди вынутых шаров окажутся черный и белый шары}.

Решение

В данном опыте для всех событий общее число элементарных исходов равно количеству всевозможных комбинаций двух шаров, выбранных из общего числа восьми шаров, т. е. числу сочетаний из восьми по два – $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$. Для события A число благоприятствующих исходов равно количеству всевозможных комбинаций двух черных шаров, выбранных из общего числа пяти черных шаров, т. е. числу сочетаний из пяти по два – $m = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, и $P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$. Для события B число благоприятствующих исходов равно количеству всевозможных комбинаций двух белых шаров, выбранных из общего числа трех белых шаров, т. е. числу сочетаний из трех по два – $m = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$, и

$P(B) = \frac{3}{28}$. Для события C число благоприятствующих исходов равно количеству всевозможных комбинаций одного черного шара, выбранного из общего числа пяти черных шаров, умноженному на количество всевозможных комбинаций одного белого шара, выбранного из общего числа трех белых шаров. В результате получаем благоприятствующее число исходов для события C: $m = C_5^1 \cdot C_3^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!} = 5 \cdot 3 = 15$, и $P(C) = \frac{15}{28}$.

Заметим, что события A, B и C несовместны и $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Эти три события образуют полную группу.

Условная вероятность событий

Для нахождения вероятности одновременного наступления событий A и B используется формула умножения вероятностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B),$$

где $P(B \mid A)$ – условная вероятность события B при условии, что событие A произошло (аналогично определяется $P(A \mid B)$). Данную формулу можно распространить на большее число событий и, соответственно, условных вероятностей.

Задача 14.4. На связке пять ключей. К замку подходит только один из них. Ключи по очереди подбираются для открытия замка. Найти вероятность, что ключ подойдет с третьей попытки (событие A).

Решение

Рассмотрим события $\overline{A}_1$ – {первый ключ не подошел}, $\overline{A}_2$ – {второй ключ не подошел}, A_3 – {третий ключ подошел}. Тогда $P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) \cdot P(A_3 \mid \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2)$, где $P(\overline{A}_1) = \frac{4}{5}$ (четыре неподходящих ключа из пяти), $P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{3}{4}$ (три неподходящих ключа из оставшихся четырех), $P(A_3 \mid \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = \dfrac{1}{3}$ (один подходящий ключ из оставшихся трех). Получаем $P(A) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$.

Если события A и B *независимы*, т. е. наступление одного события не влияет на вероятность появления другого, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

В этом случае $P\left(A \middle| B\right) = P\left(A\right)$, $P\left(B \middle| A\right) = P\left(B\right)$.

Задача 14.5. Три стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу, целясь в одну мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна $0,8$, для второго – $0,7$, для третьего – $0,6$. Найти вероятности событий: A – {после стрельбы в мишени обнаружено две пробоины}, B – {после стрельбы в мишени обнаружено хотя бы одна пробоина}.

Решение

Рассмотрим события A_1 – {первый стрелок попал в мишень}, $P(A_1) = 0,8$; A_2 – {второй стрелок попал в мишень}, $P(A_2) = 0,7$; A_3 – {третий стрелок попал в мишень}, $P(A_3) = 0,6$. Также рассмотрим противоположные события $\overline{A}_1$ – {первый стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$; $\overline{A}_2$ – {второй стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$; $\overline{A}_3$ – {третий стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,6 = 0,4$. Тогда событие A является суммой трех несовместных событий: первый и второй попали, третий не попал – $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$, первый и третий попали, второй не попал – $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$, второй и третий попали, первый не попал – $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. События $A_1, A_2, A_3, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ являются попарно независимыми, так как попадание или промах одного из стрелков не влияет на меткость выстрела любого другого. Тогда вероятность события A находится как

$$P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) =$$
$$= P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,452.$$

Для нахождения вероятности события B удобно рассмотреть противоположное событие $\overline{B}$ – {после стрельбы в мишени не обнаружено ни одного попадания}, т.е. первый, второй и третий стрелки не попали – $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Тогда $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,024$. Следовательно, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,024 = 0,976$.

Пусть событие A может наступить при появлении каждого из событий H_1, H_2,..., H_n, которые образуют полную группу. Тогда вероятность наступления события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i),$$

При этом H_1, H_2,…, H_n называют *гипотезами.*

Задача 14.6. В первой урне 2 черных шара и 3 белых шара, во второй урне 4 белых шара и 2 черных шара, в третьей урне 2 черных шара и 1 белый шар, в четвертой урне 1 белый шар и 1 черный шар. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Решение

Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – {шар достали из первой урны}, H_2 – {шар достали из второй урны}, H_3 – {шар достали из третьей урны}, H_4 – {шар достали из четвертой урны}. Вероятности всех гипотез равны так как урна выбирается наудачу, следовательно, $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$. Рассматриваем событие A – {вынутый шар будет белым}. Находим условные вероятности того, что белый шар может быть вынут из каждой урны: $P(A \mid H_1) = \frac{3}{5}$, $P(A \mid H_2) = \frac{2}{3}$, $P(A \mid H_3) = \frac{1}{3}$, $P(A \mid H_4) = \frac{1}{2}$. Тогда $P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) +$
$P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) +$
$+P(H_4) \cdot P(A \mid H_4) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{21}{40}$.

Если при тех же условиях известно, событие A свершилось, то условные вероятности гипотез находятся по *формуле Байеса*

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{P(A)}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Задача 14.7. Пусть в условиях предыдущей задачи достигнут успех, то есть вынутый шар действительно оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынули из второй урны.

Решение. Второй урне соответствует гипотеза H_2. Тогда по формуле Байеса получаем: $P(H_2 \mid A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{21}{40}} = \dfrac{20}{63}$.

Вероятность заданного количества успехов в серии испытаний

Закономерности случайных явлений обнаруживаются, когда производится большое число повторных испытаний, когда один и тот же опыт повторяется многократно: повторные измерения, стрельба из одного и того же орудия, массовое производство одного и того же изделия, подбрасывание одной и той же монеты и т.д. При этом предполагается, что повторные испытания производятся в одинаковых условиях. В этом случае вероятность того или иного исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания. Такие испытания называются *независимыми* относительно рассматриваемого события *A*. Например, несколько последовательных подбрасываний монеты представляют собой независимые испытания.

Повторные независимые испытания называются *испытаниями Бернулли*, если при каждом испытании возможны только два исхода и вероятности каждого из этих исходов остаются неизменными во всех испытаниях. Принято называть исходы таких испытаний «успехами» и обозначать буквой У и «неудачей» и обозначать буквой Н, а их вероятности *P(*У) и *P(*Н*)* обозначать соответственно через p и $q=1-p$. Например, подбрасывание одной и той же монеты (даже несимметричной) является примером испытания Бернулли, в которых можно условиться «успехом» называть, например, выпадение герба. При промышленном контроле качества продукции можно считать массовое производство некоторой детали примером испытаний Бернулли. При этом изготовление стандартной детали считать «успехом», а изготовление дефектной детали – «неудачей».

Чтобы найти вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз, можно использовать формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Задача 14.8. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином, с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

A – в составе группы не меньше четырех блондинов;

B – в составе группы хотя бы один рыжий.

Решение

1. Используем обозначение p для вероятности того, что человек оказался блондином, p = 0,4. Тогда q =1–p = 1– 0,4 = 0,6. Событие A – в группе из шести человек 4 или 5, или 6 блондинов. $P(A)= P_6^4 + P_6^5 + P_6^6$. Применяя три раза формулу Бернулли, получаем $P(A)=C_6^4 0{,}4^4 0{,}6^2 + C_6^5 0{,}4^5 0{,}6^1 + C_6^6 0{,}4^6 0{,}6^0$=0,16.

2. Обозначим p – вероятность того, что человек рыжий, p = 0,1. Тогда q=1– p = =1–0,1=0,9. Событие B – в группе хотя бы один рыжий. Тогда событие $\overline{B}$ – в группе нет рыжих. $P(\overline{B}) = P_6^0 = C_6^0 0{,}1^0 0{,}9^6 = 0{,}53$. В итоге, $P(B)$ = 1–$P(\overline{B})$ = =1– 0,53 = 0,47.

Задача 14.9. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель с вероятностью 0,3; если два снаряда – с вероятностью 0,7; если три снаряда – с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

Решение

Событие A – цель поражена. Гипотезы H_i – в цель попало i (i = 0…3) снарядов. Тогда

$P(H_0) = C_3^0 0{,}4^0 0{,}6^3$=0,216; $P(A/H_4)$=0;

$P(H_1)=C_3^1 0{,}4^1 0{,}6^2$ =0,432; $P(A/H_1)$=0,3;

$P(H_2)=C_3^2 0{,}4^2 0{,}6^1$=0,288; $P(A/H_2)$=0,7;

$P(H_3)=C_3^3 0{,}4^3 0{,}6^0$ =0,064; $P(A/H_3)$=0,9;

$P(A)= 0{,}432 \cdot 0{,}3 + 0{,}288 \cdot 0{,}7 + 0{,}064 \cdot 0{,}9 + 0{,}216 \cdot 0 = 0{,}389$.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную *формулу Пуассона* $P_n(k) = a^k e^{-a} / k!$, где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $a = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях. Отметим, что n измеряется в сотнях, тысячах, а вероятность в сотых или тысячных, так что их произведение $a = np$ не более 10.

Задача 14.10. АТС получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

Решение

За минуту АТС получает в среднем $\frac{300}{60}$=5 вызовов, то есть a = 5. Требуется найти вероятность события A – АТС получит за минуту 2 вызова. $P(A)=P_2 = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 0{,}09$.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, приближенно определяется *локальной формулой Лапласа* $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Значения четной *функции Гаусса* $\varphi(x)$ часто приводятся в табличном виде для положительных значений x. При отрицательных значениях аргумента x пользуются свойством четности функции $\varphi(x)$: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При значениях x, больших 3, значения функции полагают равными 0. Данная функция применима при средних значениях вероятности и числа испытаний.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз , приближенно определяется *интегральной формулой Лапласа* $P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции Лапласа для положительных значений x приведены в Приложении. Для отрицательных значений x пользуются свойством нечетности функции Лапласа: $\Phi(-x) = \Phi(x)$. При значениях x, больших 4, значения функции полагают равными 0,5.

Задача 14.11. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле p=0,75. Приближенно найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию n =10, k = 8, p = 0,75, q = 0,25. Используем локальную теорему Лапласа: $P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \cdot \varphi(x) = 0{,}7301 \cdot \varphi(x)$.

Вычислим x: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = 0{,}36$, а φ(0,36)=0,3739. В итоге, $P_{10}(8) \approx 0{,}731 \cdot 0{,}3739 = 0{,}273$.

Задача 14.12. Вероятность того, что деталь не прошла проверку контролера p = 0,2. Приближенно найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение

По условию p = 0,2; q = 0,8; n = 400, k_1= 70; k_2= 100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа $P_{400}(70{,}100) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$.

Вычислим верхний и нижний пределы интегрирования.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

По таблице в приложении находим:

Ф(2,5) = 0,4938; Ф(–1,25) = –Ф(1,25) = –0,3944.

Тогда $P_{400}(70{,}100) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882$.

14.2. Случайные величины

Дискретные случайные величины

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным. Дискретная случайная величина X описывается законом распределения в виде следующей таблицы

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

В первой строке в возрастающем порядке расположены все возможные значения случайной величины, а во второй – вероятности того, что случайная величина примет то или иное значение: $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1,2,...,n$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Случайная величина характеризуется неслучайными числовыми параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. *Математическое ожидание дискретной случайной величины* X характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. *Дисперсия дискретной случайной величины* X характеризует меру разброса случайной величины относительно математического ожидания и определяется по формуле $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$. Дисперсию можно вычислить по более удобной формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Иногда для описания разброса случайной величины используется *среднеквадратическое отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задача 14.13. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	a

Чему равно значение a? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение. Вычислить вероятность $P(1 \le X < 3)$.

Решение

Найдем значение параметра a из условия $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Получаем уравнение $0,2 + 0,4 + 0,3 + a = 1$, откуда, $a = 0,1$.

Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание:

$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 1,3$.

Дисперсия:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,1 - -1,3^2 = 0,81$.

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{0,81} = 0,9$.

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал: $P\{1 \le X < 3\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0,7$.

Задача 14.14. Вероятность обнаружения ошибки при одном измерении равна 0,3. Построить ряд распределения случайной величины X – числа ошибок при трех измерениях. Найти $M(X)$.

Решение

Значения случайной величины равны: 0, 1, 2, 3, а их вероятности будут равны:

$P(0) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343$; $P(1) = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,441$;

$P(2) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,189$; $P(3) = 0,3^3 = 0,027$.

Заметим, что $\sum\limits_{i=0}^{3} p_i = 0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 = 1$.

Тогда ряд распределения будет иметь вид:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,343	0,441	0,189	0,027

Найдем математическое ожидание:

$M(X) = 0 \cdot 0,343 + 1 \cdot 0,441 + 2 \cdot 0,189 + 3 \cdot 0,027 = 0,441 + 0,378 + 0,081 = 0,9$.

Задача 14.15. В коробке 5 шаров с цифрами 3, 4, 6, 4, 5. Наудачу вынимается один шар. Найти закон распределения случайной величины X – числа очков на нем. Найти $M(X)$.

Решение

Возможные значения случайной величины – 3,4,5,6. Их вероятности будут равны:

$P(3) = \frac{1}{5}$; $P(4) = \frac{2}{5}$; $P(5) = \frac{1}{5}$; $P(6) = \frac{1}{5}$. Запишем ряд распределения:

X	3	4	5	6
P(X)	0,2	0,4	0,2	0,2

Найдем $M(X) = 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,2 = 4,4$.

Задача 14.16. Охотник стреляет до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа выстрелов, произведенных охотником. Найти $M(X)$.

Решение

Значения случайной величины равны: 1, 2, 3, 4. Их вероятности:

$P(1) = 0,8$; $P(2) = 0,2\cdot 0,8 = 0,16$; $P(3) = 0,2\cdot 0,2\cdot 0,8 = 0,32$;

$P(4) = 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2 = 0,008$. Составим ряд распределения:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,8	0,16	0,032	0,008

$M(x) = 1\cdot 0,8 + 2\cdot 0,16 + 3\cdot 0,032 + 4\cdot 0,008 = 1,248.$

Задача 14.17. В урне находятся 5 белых и 3 красных шара. Производится последовательное без возвращения извлечение шаров до появления красного. Составить ряд распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

Решение

Значения случайной величины равны: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Их вероятности:

$P(X{=}1) = \frac{3}{8}$; $P(X{=}2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$; $P(X{=}3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{28}$;

$P(X{=}4) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{28}$; $P(X{=}5) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{56}$;

$P(X{=}6) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{56}$.

Составим ряд распределения:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{56}$

Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна. Значения непрерывной случайной величины заполняют некоторый интервал с *плотностью распределения* $f(x)$, связанной с функцией распределения по формуле $f(x) = F'(x)$. Плотность распределения удовлетворяет следующим свойствам:

– $f(x) \geq 0$;

– вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2)$ можно найти по формуле $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$;

– $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;

– для непрерывной случайной величины при любом значении x справедливо: $P\{X = x\} = 0$.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X определяются формулами $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$,

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx.$$

Дисперсию можно вычислить по более удобной формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2, \text{ где } M\left(X^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx.$$

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется аналогично случаю дискретной случайной величины.

Задача 14.18. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, вероятность попадания в интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Решение

Находим математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 2x\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot 0\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Находим вероятность попадания в интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Задача 14.19. Дана функция распределения: $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$.

Найти $f(x)$, $M(X)$, $P(-1<X\le 2{,}5)$.

Решение

Функция плотности распределения будет равна: $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 2(x-2), & 2<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$. Найдем математическое ожидание случайной величины X: $M(X)=\int_2^3 2x(x-2)dx=\frac{8}{3}$. Найдем вероятность попадания в интервал $(-2{,}5;-1\,]$: $P(-1<X\le 2{,}5)=F(2{,}5)-F(-1)=(2{,}5-2)^2-0=0{,}25$.

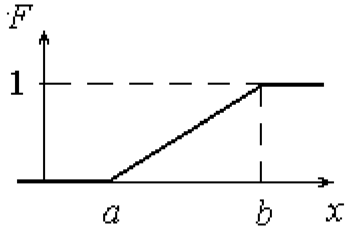
На практике часто встречаются следующие известные законы распределения непрерывной случайной величины.

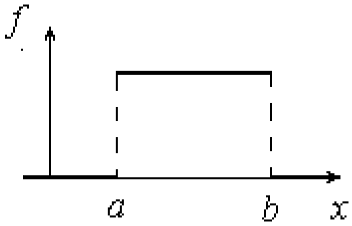
Равномерное распределение с параметрами a и b ($a\ne b$) определяется плотностью распределения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x<a,\ x>b.\end{cases}$.

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Ниже изображены графики функции распределения и плотности распределения.





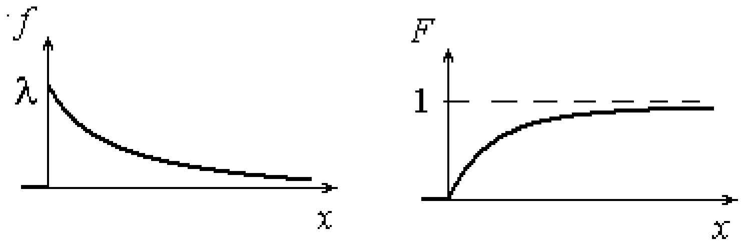
Числовые характеристики: $M\left(X\right)=\dfrac{a+b}{2}$ и $D\left(X\right)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$; вероятность попадания в интервал находится по формуле $P\left\{x_1\le X\le x_2\right\}=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$, если $a\le x_1\le x_2\le b$.

Показательное распределение с параметром $\lambda>0$ определяется плотностью распределения $f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

Функция распределения имеет вид

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

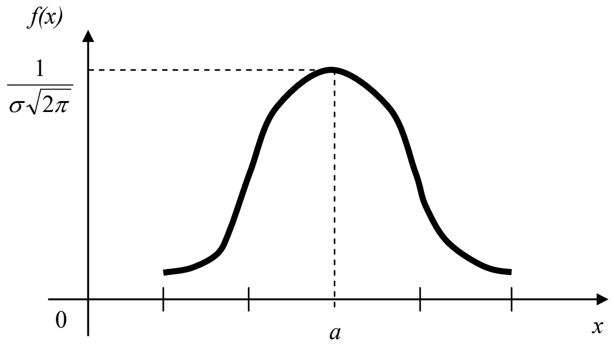
Ниже изображены графики функции распределения и плотности распределения.



Числовые характеристики: $M\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda}$ и $D\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; вероятность попадания в интервал находится по формуле $P\left\{x_1\le X\le x_2\right\}=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}$, если $x_2\ge x_1\ge 0$.

Нормальное распределение с параметрами m и $\sigma>0$ определяется плотностью распределения $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Ниже изображен график плотности распределения.



Числовые характеристики: $M\left(X\right)=m$ и $D\left(X\right)=\sigma^2$; вероятность попадания в интервал находится по формуле $P\left\{x_1 \le X \le x_2\right\}=\Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ – функция Лапласа, значения которой приведены в специальной таблице (см. Приложение 1). Заметим, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ и при $x>4$ имеем $\Phi(x)\approx 0,5$. Вероятность отклонения от математического ожидания на величину δ определяется по формуле $P\left\{\left|X-m\right|<\delta\right\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Вероятность отклонения от математического ожидания на величину 3σ определяется по *правилу трех сигм* $P\left\{m-3\sigma<X<m+3\sigma\right\}=0,997$.

В некоторых задачах теории вероятностей требуется вычислить начальные и центральные моменты случайных величин. *Начальные моменты порядка* k определяются по формулам

$$M_k=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \text{ (для дискретной случайной величины),}$$

$$M_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k f\left(x\right)dx \text{ (для непрерывной случайной величины).}$$

Центральные моменты порядка k определяются по формулам

$$m_k=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\right)\right)^k p_i \text{ (для дискретной случайной величины),}$$

$$m_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-M\left(X\right)\right)^k f\left(x\right)dx \text{ (для непрерывной случайной величины).}$$

Для их вычисления удобно использовать следующие формулы, связывающие центральные моменты с начальными:

$$m_2 = M_2 - \left(M_1\right)^2,$$

$$m_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2\left(M_1\right)^3,$$

$$m_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2\left(M_1\right)^2 - 3\left(M_1\right)^4.$$

Заметим, что M_1 является математическим ожиданием, а m_2 – дисперсией случайной величины.

Моменты более высокого порядка используются редко, а по введенным моментам вычисляются такие характеристики, как *асимметрия* $As(X) = \dfrac{m_3}{\left(\sigma(X)\right)^3}$, *эксцесс* $Ex(X) = \dfrac{m_4}{\left(\sigma(X)\right)^4} - 3$. Для равномерного и нормального законов распределения асимметрия, характеризующая симметричность распределения, равна нулю. Эксцесс, характеризующий островершинность распределения, равен нулю для нормального закона.

Коэффициент вариации случайной величины вычисляется по формуле $V(X) = \dfrac{\sigma(X)}{M(X)}$. Для показательного распределения он равен единице.

Задача 14.20. Дана функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$.

Найти $f(x)$, $M(X)$, $P(-1 < X \le 2)$.

Решение

Найдем функцию плотности распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$$

Найдем вероятность попадания значений случайной величина в интервал $(-1; 2]$: $P(-1 < X \le 2) = F(2) - F(-1) = \dfrac{2-1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$.

Математическое ожидание будет равно: $M(X) = \int_1^3 \dfrac{1}{2} x dx = \left. \dfrac{x^2}{2 \cdot 2} \right|_1^3 = 2$.