

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Физика и химия»

**Л. А. Фишбейн**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Механика**

Екатеринбург  
Издательство УрГУПС  
2012

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Физика и химия»

**Л. А. Фишбейн**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Механика**

Сборник задач  
для студентов очной, заочной форм обучения  
и дистанционного образования

Екатеринбург  
Издательство УрГУПС  
2012

УДК 531  
Ф 68

**Фишбейн, Л. А.**

Ф 68 Подготовка к Интернет-экзамену по физике в сфере профессионального образования. Механика : сб. задач / Л. А. Фишбейн – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012. – 98,[2] с.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов очной, заочной форм обучения и дистанционного образования к Интернет-экзамену по физике (механика) в сфере профессионального образования.

Содержится теоретический материал и тестовые задания с решениями. Все тесты взяты с сайта [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru). Материал разбит на отдельные темы в соответствии с тематической структурой АПИМ (аттестационно-педагогические и измерительные материалы).

УДК 531

*Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.*

*Автор:* Л. А. Фишбейн, доцент кафедры «Физика и химия»,  
канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

*Рецензент:* В. К. Першин, зав. кафедрой «Физика и химия»,  
д-р физ.-мат. наук, УрГУПС

© Уральский государственный университет  
путей сообщений (УрГУПС), 2012

## Оглавление

Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы .....	4
Тематическая структура АПИМ.....	4
Кодификатор .....	4
Кинематика поступательного и вращательного движения.....	8
Тесты с решениями.....	13
Динамика поступательного движения.....	25
Тесты с решениями.....	29
Динамика вращательного движения.....	40
Тесты с решениями.....	43
Работа и энергия. Законы сохранения в механике.....	58
Тесты с решениями.....	62
Элементы специальной теории относительности.....	85
Тесты с решениями.....	88

## Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	Федеральный компонент	
ЕН.Ф.03	Физика: физические основы механики: кинематика и законы динамики материальной точки, твердого тела, жидкостей и газов, законы сохранения, основы релятивистской механики	400

### Тематическая структура АПИМ

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	№ задания	Тема задания
1	Механика	1	Кинематика поступательного и вращательного движения точки
		2	Динамика поступательного движения
		3	Динамика вращательного движения
		4	Работа и энергия
		5	Законы сохранения в механике
		6	Элементы специальной теории относительности

### Кодификатор

Кодификатор элементов содержания дисциплины «Физика» цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин высшего профессионального образования

В кодификаторе зафиксирована преемственность между содержанием дисциплины «Физика» в государственных образовательных стандартах (ГОС) высшего профессионального образования (ВПО) и аттестационных педагогических измерительных материалах (АПИМ), используемых в рамках Интернет-экзамена в сфере профессионального образования. Кодификатор отражает содержание дисциплины в ГОС и содержит контролируемое содержание дисциплины, перечень контролируемых учебных элементов. Преемственность дидактических единиц, зафиксированных в кодификаторе, положена в основу содержания АПИМ единого Федерального банка заданий, используемого для проведения Интернет-экзамена в сфере профессионального образования.

**Контролируемое содержание дисциплины** включает код элемента содержания и наименование элемента содержания (темы задания). *Первый разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер группы заданий, связанный с объемом часов в ГОС, выделяемых на изучение дисциплины. В дис-

циплине «Физика» предложено выделить три группы (1 группа – от 100 до 279 часов, 2 группа – от 280 до 699 часов, 3 группа – от 700 до 1000 часов). *Второй разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер дидактической единицы (раздела) дисциплины, а *третий разряд в записи кода элемента содержания* идентифицирует номер темы задания. Все коды элементов содержания и их наименование распределяются в предложенном порядке для каждой дидактической единицы.

**Перечень контролируемых учебных элементов** отражает требования к знаниям, которые студент должен приобрести в результате освоения дисциплины или отдельных ее разделов. При этом уровень сложности заданий должен быть **БАЗОВЫМ**, то есть, все предлагаемые задания должны контролировать обязательную подготовку студентов на уровне требований, задаваемом государственными образовательными стандартами.

Ниже приведен кодификатор для 2 группы заданий (от 280 до 699 часов).

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен...
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
<b>1. МЕХАНИКА</b>		
2.1.1	Кинематика поступательного и вращательного движения	<b>знать:</b> скорость, ускорение, составляющие ускорения – тангенциальное и нормальное; угловая скорость, угловое ускорение; связь линейных и угловых величин. <b>уметь:</b> применять законы кинематики в условиях конкретной задачи; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вычисления заданных величин; определять направления векторных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины; использовать математический аппарат (вычисление производных, интегралов, операции с векторами) для решения физических задач.
2.1.2	Динамика поступательного движения	<b>знать:</b> законы Ньютона, сила, масса, импульс; инерциальные и неинерциальные системы отсчета; силы в механике (тяжести, трения, упругости), закон всемирного тяготения, движение по окружности; II закон Ньютона для системы материальных точек, центр масс системы материальных точек, закон движения центра масс.

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен...
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
		<p><b>уметь:</b> применять законы динамики в условиях конкретной задачи; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вычисления заданных величин; определять направления векторных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины; использовать математический аппарат (вычисление производных, интегралов, операции с векторами) для решения физических задач.</p>
2.1.3.	Динамика вращательного движения	<p><b>знать:</b> момент инерции, момент импульса, момент силы; основной закон динамики вращательного движения.</p> <p><b>уметь:</b> применять законы динамики вращательного движения в условиях конкретной задачи; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вычисления заданных величин; определять направления векторных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины; использовать математический аппарат (вычисление производных, интегралов, операции с векторами) для решения физических задач</p>
2.1.4.	Работа. Энергия.	<p><b>знать:</b> работа силы; кинетическая и потенциальная энергия; связь силы и потенциальной энергии; мощность; работа и мощность вращательного движения, кинетическая энергия вращательного движения.</p> <p><b>уметь:</b> применять законы механики в условиях конкретной задачи; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вы-</p>

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен...
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
		числения заданных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины; использовать математический аппарат (вычисление производных, интегралов, операции с векторами) для решения физических задач.
2.1.5.	Законы сохранения в механике	<p><b>знать:</b> закон сохранения импульса; закон сохранения момента импульса; закон сохранения механической энергии.</p> <p><b>уметь:</b> применять законы сохранения в условиях конкретной задачи механики; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вычисления заданных величин; определять направления векторных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины; использовать математический аппарат (вычисление производных, интегралов, операции с векторами) для решения физических задач</p>
2.1.6.	Элементы специальной теории относительности	<p><b>знать:</b> постулаты СТО; преобразования Лоренца, следствия из преобразований Лоренца: сокращение длины, замедление времени, преобразование скоростей; релятивистский импульс, масса; полная энергия, энергия покоя, кинетическая энергия.</p> <p><b>уметь:</b> применять законы релятивистской механики в условиях конкретной задачи; использовать физические формулы для анализа функциональных зависимостей между различными физическими величинами; использовать физические формулы для вычисления заданных величин; анализировать информацию, представленную в виде графика, рисунка, делать вывод о характере изменения искомой величины</p>

# КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

## Скорость $\vec{v}$

$\vec{r}$  – радиус-вектор,  $\Delta\vec{r}$  – вектор смещения (перемещения)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt - \text{площадь под кривой } v_x \text{ от } t \text{ с учетом знака.}$$

Вектор скорости  $\vec{v}$  всегда касателен к траектории движения.

## Ускорение $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} dt,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt - \text{площадь под кривой } a_x \text{ от } t \text{ с учетом знака.}$$

ТОМ знака.

## Путь $S$ :

$$S = \int_0^t v dt \geq 0 - \text{площадь под кривой } v \text{ от } t; \text{ длина участка траектории,}$$

$v \equiv \frac{dS}{dt} \geq 0$  – модуль скорости. Если движение происходит без изменения направления и ось  $Ox$  направлена вдоль прямолинейной траектории, то

$$S = |\Delta\vec{r}| = |\Delta x|.$$

## Поступательное прямолинейное движение

### Равномерное прямолинейное движение точки ( $\vec{a} = 0$ )

$$\begin{cases} a = 0 \\ v = \text{const} \\ S = vt \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = \pm v \\ x = x_0 + v_x t \text{ или } \Delta x = v_x t \end{cases}$$

$$\vec{v} \uparrow \uparrow Ox \rightarrow v_x = v, \quad \vec{v} \uparrow \downarrow Ox \rightarrow v_x = -v.$$

## Равнопеременное прямолинейное движение точки ( $\vec{a} = \text{const}$ )

$$\begin{cases} a = \text{const} \\ v = v_0 \pm at \\ S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \pm a, & v_{0x} = \pm v_0 \\ v_x = v_{0x} + a_x t \\ x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \text{ или } \Delta x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \end{cases}$$

(+) ускоренное, (-) замедленное  $\vec{a} \uparrow\uparrow OX \rightarrow a_x = a, \quad \vec{a} \uparrow\downarrow OX \rightarrow a_x = -a,$   
 $\vec{v}_0 \uparrow\uparrow OX \rightarrow v_{0x} = v_0, \vec{v}_0 \uparrow\downarrow OX \rightarrow v_{0x} = -v_0.$

**Ускоренное:**  $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , модуль  $v$  увеличивается, знаки  $v_x$  и  $a_x$  — одинаковые.

**Замедленное:**  $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{a}$ , модуль  $v$  уменьшается, знаки  $v_x$  и  $a_x$  — разные.

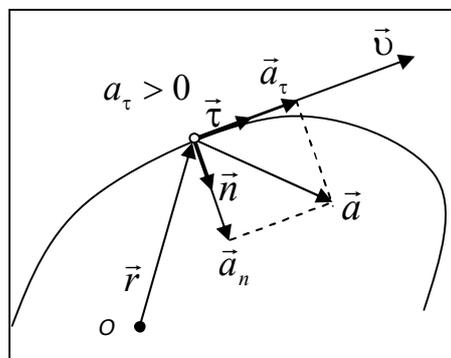
## Поступательное криволинейное движение

При криволинейном движении полное ускорение  $\vec{a}$  можно представить как сумму нормальной  $\vec{a}_n$  и тангенциальной  $\vec{a}_\tau$  составляющих.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$\vec{a}_n = a_n \vec{n}, \quad a_n = \frac{v^2}{r} > 0; \quad \vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} \quad \begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} > 0, \text{ если } \vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}, \\ a_\tau = \frac{dv}{dt} < 0, \text{ если } \vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}. \end{cases}$$

Здесь  $\vec{n} \perp \vec{v}$ ,  $\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}$ ,  $r$  — переменный радиус кривизны траектории. Если траектория — окружность, то  $r$  — радиус окружности.



$$\vec{v} = \vec{v}_\tau \quad v_\tau \vec{\tau} = v \vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$$

**Равномерное движение по окружности** ( $a_\tau = 0$ ):

$$\begin{cases} a_\tau = 0, a_n = \text{const} \\ v = \text{const} \\ S = vt. \end{cases}$$

**Равнопеременное движение по окружности** ( $a_\tau = \text{const}$ ):

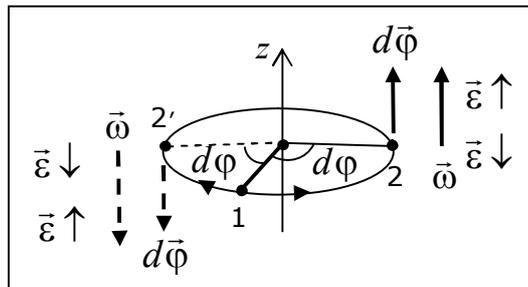
$$\begin{cases} a_\tau = \text{const}, a_n \neq \text{const} \\ v = v_0 \mp a_\tau t \quad v_0 \pm |a_\tau| t \\ S = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \quad v_0 t \pm \frac{|a_\tau| t^2}{2}. \end{cases}$$

**Ускоренное:**  $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{a}_\tau$ , модуль  $v$  увеличивается,  $a_\tau > 0$ .

**Замедленное:**  $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{a}_\tau$ , модуль  $v$  уменьшается,  $a_\tau < 0$ .

### Вращательное движение

Вектор бесконечно малого угла поворота  $d\vec{\varphi}$ . Направлен вдоль оси вращения по направлению поступательного движения правого винта, если его вращать по направлению поворота (Если 1-2, то вверх, если 1-2', то вниз). По модулю равен углу поворота  $d\varphi \geq 0$ , проекция  $d\varphi_z = \pm d\varphi$ .  $\Delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1$  – вектор конечного углового смещения или угла поворота.



**Угловая скорость**  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения по направлению  $d\vec{\varphi}$ ,

$$\omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt} = \pm \omega, \Delta\varphi_z = \varphi_{2z} - \varphi_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} \omega_z dt - \text{площадь под кривой } \omega_z \text{ от } t \text{ с}$$

учетом знака. Очень часто вместо  $\varphi_z$  пишут  $\varphi$ .

### Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  направлен вдоль оси вращения по направлению  $d\vec{\omega}$ .

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt} = \pm \varepsilon, \Delta\omega_z = \omega_{2z} - \omega_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_z dt - \text{площадь под кривой } \varepsilon_z \text{ от } t \text{ с учетом знака.}$$

### Угловой путь $\Phi$

$\Phi = \int_0^t \omega dt \geq 0$  – площадь под кривой  $\omega$  от  $t$ ,  $\omega = \frac{d\Phi}{dt} \geq 0$  – модуль угловой скорости. Если вращение без изменения направления, то

$$\Phi = |\Delta\vec{\varphi}| = |\Delta\varphi_z| = |\Delta\varphi|.$$

### Равномерное вращение точки ( $\vec{\varepsilon} = 0$ )

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \omega = \text{const} \\ \Phi = \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \omega_z = \pm\omega \\ \varphi_z = \varphi_{0z} + \omega_z t \text{ или } \Delta\varphi_z = \omega_z t \end{cases}$$

### Равнопеременное вращение точки ( $\vec{\varepsilon} = \text{const}$ )

$$\begin{cases} \varepsilon = \text{const} \\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \\ \Phi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_z = \pm\varepsilon, \omega_{0z} = \pm\omega_0 \\ \omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t \\ \varphi_z = \varphi_{0z} + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2} \text{ или } \Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2} \end{cases}$$

(+) ускоренное, (-) замедленное  $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow OZ \rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon$ ,  $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow OZ \rightarrow \varepsilon_z = -\varepsilon$ ,  
 $\vec{\omega}_0 \uparrow\uparrow OZ \rightarrow \omega_{0z} = \omega_0$ ,  $\vec{\omega}_0 \uparrow\downarrow OZ \rightarrow \omega_{0z} = -\omega_0$ .

**Ускоренное:**  $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$ , модуль  $\omega$  увеличивается, знаки  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$  – одинаковые.

**Замедленное:**  $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$ , модуль  $\omega$  уменьшается, знаки  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$  – разные.

## Связь линейных и угловых физических (в радианах) и технических (в оборотах) величин

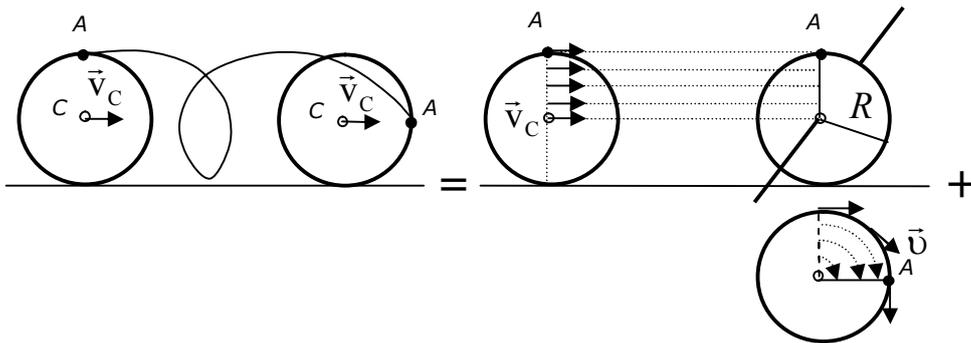
$\Phi$  – угловой путь в радианах,  $\omega$  – угловая скорость в радианах в секунду,  
 $N$  – угловой путь в оборотах,  $\nu, n$  – угловая скорость в оборотах в секунду,  
 $S$  – линейный путь в метрах,  $v$  – линейная скорость в метрах в секунду,  
 $r$  – радиус траектории движения точки.

$$\Phi = \frac{S}{r}, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad N = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad \nu = n = \frac{\omega}{2\pi},$$

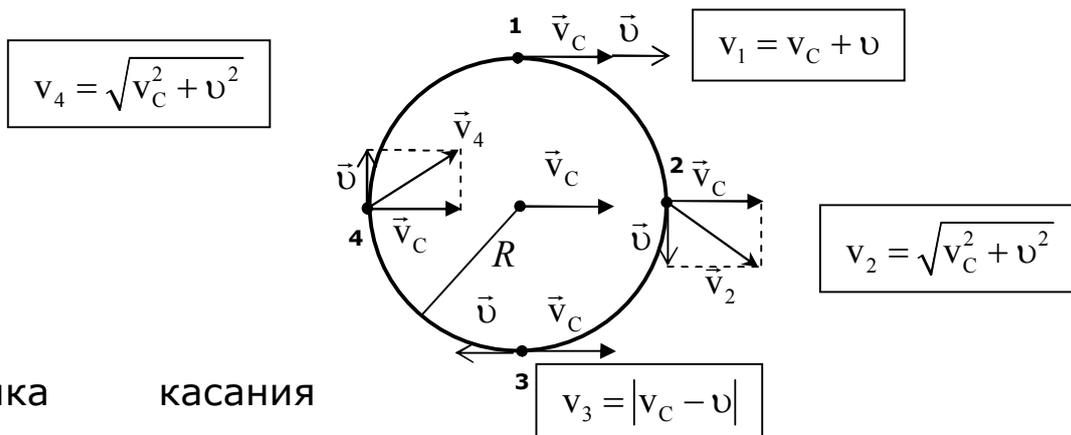
$$|a_\tau| = \varepsilon r, \quad a_n = \omega^2 r, \quad a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

### Плоское движение

Плоское движение (**качение тел**) – сумма **поступательного** движения тела со скоростью центра масс  $\vec{v}_C$  (все точки тела движутся одинаково) и **вращательного** вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела, с линейной скоростью  $\vec{v}$  ( $v = \omega R$ ,  $R$  – радиус колеса, шара, цилиндра и т. д.).



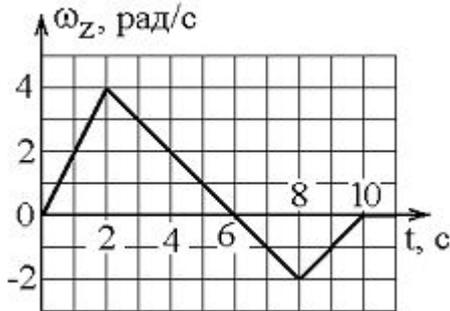
$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}$  – результирующая скорость для любой точки тела.



Если тело движется **без проскальзывания**, то в точке касания опоры его скорость равна нулю, т. е.  $v_3 = |v_C - v| = 0$ , а это значит, что  $v_C = v = \omega R$ . В этом случае сила трения скольжения есть, а ее **работа равна нулю**, так как нет движения одного тела по поверхности другого.

## Тесты с решениями

1. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью, проекция которой изменяется со временем, как показано на графике.



Угловое перемещение (в радианах) в промежутке времени от 4 с до 8 с равно..0

### Решение

По определению  $\Delta\varphi_z = \varphi_{2z} - \varphi_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} \omega_z dt$  – площадь под кривой  $\omega_z$  от  $t$ .

Площадь первого треугольника с учетом знака (от 4 с до 6 с) – это поворот на угол (угловое перемещение)

— — — — —

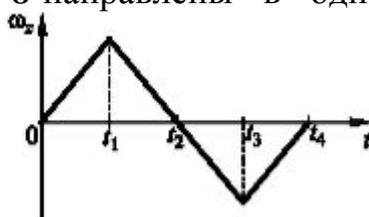
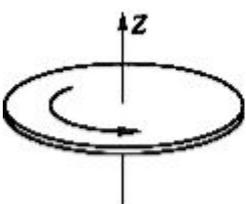
Площадь второго треугольника с учетом знака (от 6 с до 8 с) – поворот на угол

— — — — —

(т. е. в обратном направлении). Следовательно, с 4 с по 8 с тело повернется на угол  $0,5 - 0,5 = 0$  рад.

**Примечание.** Достаточно было посчитать площади треугольников в клеточках, чтобы понять, что ответ 0.

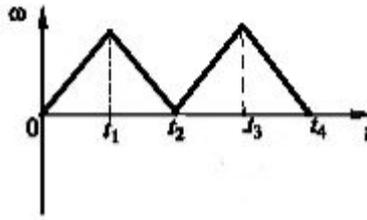
2. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию угловой скорости  $\omega_z(t)$  так, как показано на рисунке. Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектор углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  направлены в одну сторону в интервалы времени ...



- ✓ от 0 до  $t_1$  и от  $t_2$  до  $t_3$
- от 0 до  $t_1$  и от  $t_1$  до  $t_2$
- от  $t_1$  до  $t_2$  и от  $t_2$  до  $t_3$
- от 0 до  $t_1$  и от  $t_3$  до  $t_4$

### Решение

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  направлены в одну сторону при ускоренном вращении, т.е. когда модуль  $\omega$  растет со временем. Построим зависимость  $\omega = |\omega_z|$  от  $t$ .



Следовательно,  $\omega$  растет на участках от 0 до  $t_1$  и от  $t_2$  до  $t_3$ .

3. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса  $R = 2$  м с угловой скоростью, модуль которой изменяется с течением времени по закону  $\omega = 2t^2$ . Отношение нормального ускорения к тангенциальному через 2 секунды равно ...8

✓ 8

4

1

2

### Решение

Нормальное ускорение частицы равно

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = 4t^4 R,$$

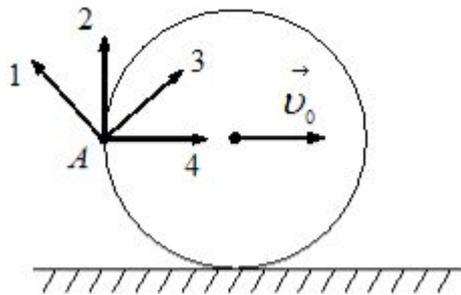
где  $R$  – радиус кривизны траектории. Тангенциальное ускорение определяется выражением

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = 4tR.$$

Следовательно, отношение нормального ускорения к тангенциальному через 2 с равно

$$\frac{a_n}{a_\tau} = t^3 = 8.$$

4. Диск катится равномерно по горизонтальной поверхности со скоростью  $\vec{V}_0$  без проскальзывания. Вектор скорости точки А, лежащей на ободе диска, ориентирован в направлении...



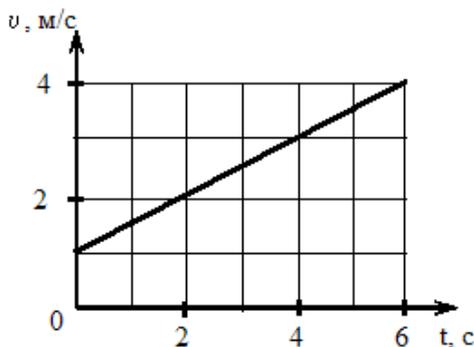
- ✓ 3
- 1
- 2
- 4

### Решение

Качение однородного кругового цилиндра (диска) по плоскости является плоским движением, которое можно представить как совокупность двух движений: поступательного, происходящего со скоростью  $\vec{V}_0$  центра масс, и вращательного вокруг оси, проходящей через этот центр (скорость направлена по касательной к окружности). Тогда  $\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{V}_{вр}$  (см. теоретическую часть). Вектор скорости  $\vec{V}_A$  точки A ориентирован в направлении 3.

**Примечание.** Отсутствие проскальзывания никакой роли не играет.

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Скорость точки, находящейся на расстоянии 10 см от оси, изменяется со временем в соответствии с графиком, представленным на рисунке. Угловое ускорение тела (в единицах СИ) равно ...



- ✓ 5
- 0,5
- 0,05
- 50

### Решение

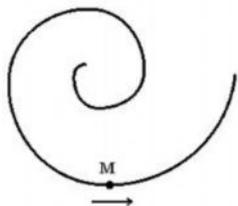
Так как модуль скорости растет линейно, то это равноускоренное движение по окружности. Тогда

$$v(t) = v_0 + a_\tau t \text{ и } a_\tau = \frac{v - v_0}{t} = |a_\tau| > 0.$$

Тангенциальное ускорение связано с угловым уравнением  $|a_\tau| = \varepsilon R$ . Тогда

$$\varepsilon = \frac{|a_\tau|}{R} = \frac{v - v_0}{tR} = \frac{4 - 1}{6 \cdot 0,1} = 5 \text{ рад/с}^2 \text{ или с}^{-2}.$$

6. Точка  $M$  движется по спирали с равномерно убывающей скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина полного ускорения точки ...



- ✓ уменьшается
- увеличивается
- не изменяется
- равна нулю

**Решение**

Величина полного ускорения определяется соотношением  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ , где  $a_\tau$  и  $a_n$  – проекция тангенциального и нормального ускорения соответственно

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории. Так как по условию скорость убывает равномерно (т. е. линейно с ростом  $t$ ), то

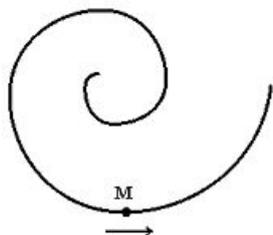
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \text{const.}$$

Так как по условию скорость убывает, а радиус кривизны траектории  $R$  растет (смотри рисунок), то

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

уменьшается. Таким образом, полное ускорение точки  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$  уменьшается.

7. Точка  $M$  движется по спирали с постоянной по величине скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина нормального ускорения ...



- ✓ увеличивается
- уменьшается
- не изменяется
- равна нулю

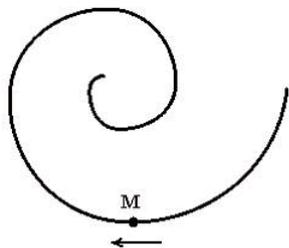
**Решение**

Так как по условию скорость постоянна, а радиус кривизны траектории  $R$  растет (смотри рисунок), то величина нормального ускорения

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

уменьшается.

8. Точка  $M$  движется по спирали с постоянным по величине нормальным ускорением в направлении, указанном стрелкой. При этом проекция тангенциального ускорения на направление скорости



- ✓ меньше нуля
- больше нуля
- равна нулю

**Решение**

Так как нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \text{const},$$

то

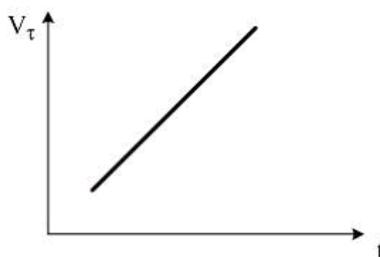
$$V = \text{const}\sqrt{R}.$$

Так как со временем (с ростом  $t$ ) радиус  $R$  (смотри рисунок) уменьшается, то уменьшается и  $V$ . Тогда проекция тангенциального ускорения на направление скорости

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} < 0.$$

9. Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{V}$ . График зависимости  $V_\tau$  от времени ( $\vec{\tau}$  – единичный вектор положительного направления,  $V_\tau$  – проекция  $\vec{V}$  на это направление) показан на рисунке. При этом для нормального  $a_n$  и тангенциального  $a_\tau$  ускорений выполняются условия

- $a_n = 0, a_\tau > 0$
- $a_n > 0, a_\tau = 0$
- $a_n = 0, a_\tau = 0$
- ✓  $a_n > 0, a_\tau > 0$



**Решение**

Так как  $V_\tau = V$  и линейно зависит от времени, то  $V = kt$ , где  $k$  – положительная константа.

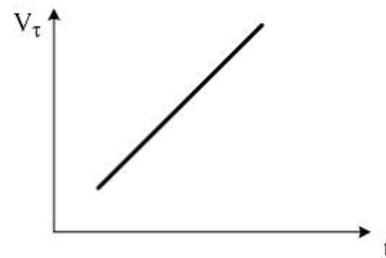
Тогда

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{k^2}{R} t^2 > 0, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = k > 0.$$

Следовательно,  $a_n > 0, a_\tau > 0$ .

10. Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{V}$ . График зависимости  $V_\tau$  от времени ( $\vec{\tau}$  – единичный вектор положительного направления,  $V_\tau$  – проекция  $\vec{V}$  на это направление) показан на рисунке. При этом для нормального  $a_n$  и тангенциального  $a_\tau$  ускорений выполняются условия

- ✓  $a_n$  – увеличивается,  $a_\tau$  – постоянно
- $a_n$  – постоянно,  $a_\tau$  – постоянно
- $a_n$  – увеличивается,  $a_\tau$  – увеличивается
- $a_n$  – постоянно,  $a_\tau$  – увеличивается



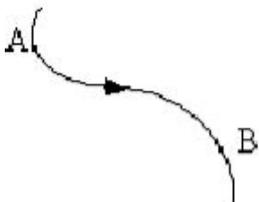
### Решение

Так как  $V_\tau = V$  и линейно зависит от времени, то  $V = kt$ , где  $k$  – положительная константа, и

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{k^2}{R} t^2, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = k.$$

Следовательно,  $a_n$  – увеличивается,  $a_\tau$  – постоянно.

11. Тело движется с постоянной по величине скоростью по траектории, изображенной на рисунке. Для величин полного ускорения  $a$  тела в точках А и В справедливо соотношение ...



- ✓  $a_A > a_B$
- $a_A < a_B$
- $a_A = a_B = 0$
- $a_A = a_B \neq 0$

### Решение

Величина полного ускорения  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ , где  $a_\tau$  и  $a_n$  – проекции тангенциального и нормального ускорения соответственно. По определению

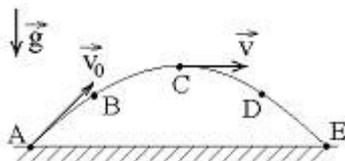
$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории. По условию скорость постоянна. Тогда

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = 0, \quad a = a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\text{const}}{R}.$$

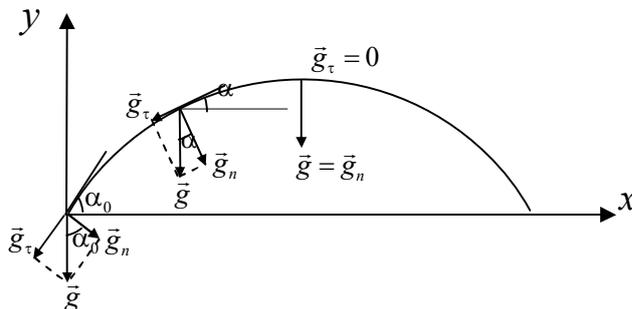
Так как радиус кривизны траектории в точке А (смотри рисунок) меньше, чем в точке В, то, следовательно, полное ускорение в точке А больше, чем в точке В.

**12.** Камень бросили под углом к горизонту со скоростью  $V_0$ . Его траектория в однородном поле тяжести изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет. Нормальное ускорение  $a_n$  на участке А-В-С ...



- уменьшается
- ✓ увеличивается
- не изменяется

**Решение**

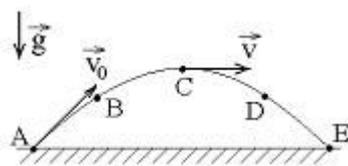


Разложим вектор ускорения  $a = g$  на нормальную и тангентиальную составляющие

$$a_n = g_n = g \cos \alpha, a_{\tau} = g_{\tau} = g \sin \alpha.$$

Так как угол  $\alpha$  уменьшается от  $\alpha_0$  до  $0$ , а  $\cos \alpha$  растёт от  $\cos \alpha_0$  до  $\cos 0 = 1$  на участке А-В-С, то  $a_n = g_n$  увеличивается на подъёме до  $g$ , а  $a_{\tau} = g_{\tau}$  уменьшается до  $0$ .

**13.** Камень бросили под углом к горизонту со скоростью  $V_0$ . Его траектория в однородном поле тяжести изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет. Модуль полного ускорения камня ...



- ✓ во всех точках одинаков
- максимален в точках А и Е
- максимален в точках В и D
- максимален в точке С

### Решение

Величина полного ускорения равна  $g$  так как определяется единственной силой тяжести, действующей на тело после начала броска. Следовательно, модуль полного ускорения камня во всех точках одинаков.

14. Материальная точка  $M$  движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Если проекция тангенциального ускорения на направление скорости отрицательна, то величина нормального ускорения

- ✓ уменьшается
- увеличивается
- не меняется

### Решение

Так как

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} < 0,$$

то

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

и скорость  $V$  уменьшается. Так как  $V^2$  уменьшается, а  $R = \text{const}$ , то

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

также уменьшается.

**Примечание.** Под постоянным тангенциальным ускорением, видимо, понимается модуль или проекция, так как вектор тангенциального ускорения при криволинейном движении всегда изменяется. Постоянство модуля (проекции) тангенциального ускорения никакой роли не играет. Важно только то, что проекция тангенциального ускорения отрицательна.

15. Частица движется вдоль окружности радиусом 1 м в соответствии с уравнением  $\varphi(t) = 2\pi(t^2 - 6t + 12)$ , где  $\varphi$  – в радианах,  $t$  – в секундах. Число оборотов, совершенных частицей до остановки, равно

- 3
- ✓ 9
- 1
- 6

**Решение**

Так как в момент остановки  $\omega = \omega_z = 0$ , то ( $\varphi_z = \varphi$ )

$$\omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt} = 4\pi(t - 3) = 0$$

и  $t = 3$  с. В начальный момент радиус-вектор, соединяющий частицу с центром вращения, был повернут на угол  $\varphi(0) = 2\pi(0 - 0 + 12) = 24\pi$ . Через  $t = 3$  с – на угол  $\varphi(3) = 2\pi(9 - 18 + 12) = 6\pi$ . По определению

$$N = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{|\Delta\varphi|}{2\pi} = \frac{\varphi_z(0) - \varphi_z(3)}{2\pi} = \frac{24\pi - 6\pi}{2\pi} = 9.$$

**Примечание.** Величина радиуса окружности, по которой движется частица, никакой роли не играет.

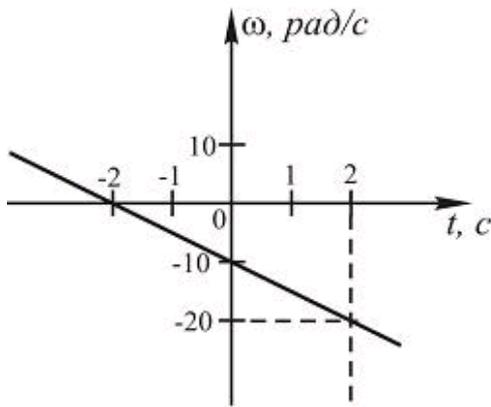
16. Частица движется вдоль окружности радиусом 1 м в соответствии с уравнением  $\varphi(t) = 2\pi(t^2 - 6t + 12)$ , где  $\varphi$  – в радианах,  $t$  – в секундах. Угловое ускорение частицы через 3 с после начала движения равно ( $\varphi_z = \varphi$ )

- 2π
- 6π
- 0
- ✓ 4π

**Решение**

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} = 4\pi \left( \frac{rad}{c^2} \right).$$

**Примечание.** Величина радиуса окружности, по которой движется частица, никакой роли не играет,  $\varepsilon_z = \varepsilon = \text{const}$ .



17. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Зависимость угловой скорости от времени  $\omega(t)$  приведена на рисунке. Угловое ускорение точек тела равно.. **5 рад/с<sup>2</sup>**; тангенциальное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения равно..... **5 м/с<sup>2</sup>**.

### Решение

Так как « $\omega$ » отрицательна на некотором интервале времени, то на рисунке представлен график зависимость  $\omega_z(t)$ . Так как  $\omega_z(t)$  линейно зависит от времени, то это равнопеременное вращение с постоянным угловым ускорением

$$\omega_z(t) = \omega_{0z} + \varepsilon_z t,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1}.$$

Выберем, например,  $t_1 = 0$  с и  $t_2 = 2$  с. Тогда  $\omega_{1z}(0) = -10$  (рад/с<sup>2</sup>),  $\omega_{2z}(2) = -20$  (рад/с<sup>2</sup>) и

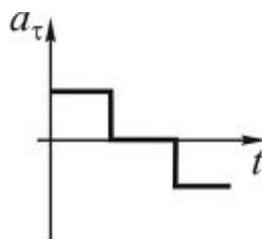
$$\varepsilon_z = \frac{-20 + 10}{2} = -5 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right).$$

$$\varepsilon = 5 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right).$$

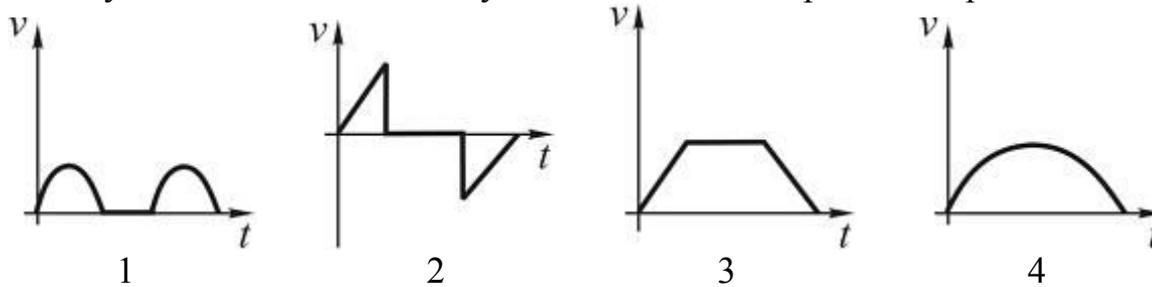
По определению  $|a_\tau| = \varepsilon r$ , т. е.  $|a_\tau| = 5 \cdot 1 = 5$  (м/с<sup>2</sup>).

**Примечание.** Отрицательное время на графике означает, что рассматривается движение и до начала отсчета времени ( $t = 0$  с). В этом интервале времени от  $t = -\infty$  до  $t = -2$  с вращение тела – равнозамедленное, от  $t = -2$  с до  $t = 0$  с – равноускоренное. Далее – равноускоренное. Соответственно проекция тангенциального ускорения при равнозамедленном движении  $a_\tau < 0$ , а при равноускоренном –  $a_\tau > 0$ .

18. Тангенциальное ускорение точки меняется согласно графику.



Такому движению соответствует зависимость скорости от времени ... на 3 рис.



### Решение

Так как проекция тангенциального ускорения на направление скорости (касательной к траектории) определяет производную модуля скорости по времени

$$a_{\tau} = dv/dt,$$

то при  $a_{\tau} = \text{const}$  имеем  $v(t) = v_0 + a_{\tau} \cdot t$  — линейная функция времени.

Если  $a_{\tau} > 0$ , то  $v(t)$  — монотонно возрастающая функция,

если  $a_{\tau} = 0$ , то  $v(t) = v_0 = \text{const}$  — постоянная функция,

если  $a_{\tau} < 0$ , то  $v(t)$  — монотонно убывающая функция.

Если  $a_{\tau}$  меняется скачком, то скачком меняется наклон зависимости  $v(t)$ .

Единственный график, соответствующий указанной выше последовательности зависимостей, представлен на третьем рисунке.

19. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Скорость точки, находящейся на расстоянии 10 см от оси, изменяется со временем в соответствии с графиком, представленным на рисунке. Зависимость угловой скорости тела от времени (в единицах СИ) задается уравнением ...

- ✓  $\omega = 10 + 5t$
- $\omega = 0,1(1 + 0,5t)$
- $\omega = 10 + 7,5t$
- $\omega = 0,1(1 + 7,5t)$

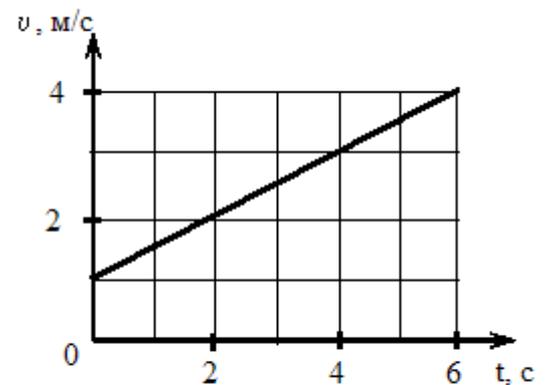
### Решение

Так как модуль скорости линейно возрастает со временем, то это равноускоренное движение по окружности и

$$v = v_0 + at,$$

где по графику  $v_0 = v(0) = 1 \text{ м/с}$ . Тогда  $a$  равно

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$



Пусть  $t = 2c$ . Тогда

$$v(2) = 2 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad a = (2 - 1)/2 = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

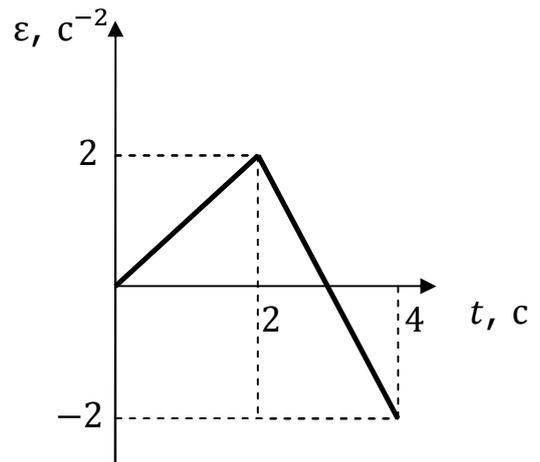
Следовательно,  $v = 1 + 0,5t$ . Так как  $\omega = v/r$ , то

$$\omega = \frac{1 + 0,5t}{0,1} = 10 + 5t.$$

**20.** На рисунке представлена зависимость углового ускорения от времени тела, которое покоилось в начальный момент времени. Максимальная угловая скорость тела в интервале времени от 0 до 4 с равна ...**3 рад/с**.

**Решение**

Так как значения углового ускорения отрицательны на некотором временном интервале, то указанная зависимость есть зависимость  $\varepsilon_z$  от  $t$ .



По определению  $\Delta\omega_z = \omega_{2z} - \omega_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_z dt$  — площадь под кривой  $\varepsilon_z$  от  $t$ . Для

нашего случая вращения из положения покоя —  $\omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt$ . Очевидно, что с

увеличением времени площадь под кривой растёт вплоть до максимального значения  $\omega_z = 3 \text{ рад/с}$  в момент  $t = 3 \text{ с}$ . Далее площадь под кривой уменьшается и к моменту  $t = 4 \text{ с}$   $\omega_z = 2 \text{ рад/с}$ .

**Примечание.** Мы ищем максимальное значение  $\omega = |\omega_z|$ , так что  $\omega_z$ , соответствующее максимальному  $\omega$ , может быть и отрицательным.

# ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

## Материальная точка

**Первый закон Ньютона:** существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется **равномерно и прямолинейно** или **покоится**. Такие системы отсчета называются инерциальными системами отсчета (ИСО). (Свободная материальная точка – не действуют никакие силы).

**Равнодействующая сила** – векторная сумма сил, приложенных к телу

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}, \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

**Второй закон Ньютона:**

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad ma_x = F_x, \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}.$$

**Импульс** материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}, \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}.$$

Так как  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , то  $m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{d(m\vec{v})}{dt} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  или

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \text{ – импульс силы.}$$

Если  $\vec{F} = \text{const}$  или  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{cp}} = \text{const}$ , то

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \Delta t, \quad \Delta p_x = F_x \Delta t.$$

**Третий закон Ньютона:** две материальные точки (м.т.) взаимодействуют друг с другом с силами: равными по модулю, противоположными по направлению и действующими вдоль одной прямой, соединяющей материальные точки. Силы приложены к разным материальным точкам

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \text{ т. е. } \vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{F}_{21} \text{ и } F_{12} = F_{21}.$$

## Силы в механике

Классификация сил:

- **контактные и полевые** (на расстоянии),
- **консервативные** (гравитационная, тяжести, упругости, натяжения, Кулона...) и **неконсервативные** (трения, сопротивления, тяги, живых существ, неупругой деформации...). Работа консервативных сил при перемещении тела по любой замкнутой траектории всегда равна нулю.

### Разложение сил

**Сила**, действующая на материальную точку, **двигающуюся по кривой**, может быть разложена на две составляющие:

$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$  – тангенциальная (касательная) составляющая, **меняет** только **модуль** скорости,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор вдоль направления скорости,

$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{n}$  – нормальная (центростремительная) составляющая, **меняет** только **направление** скорости,  $\vec{n}$  – единичный вектор перпендикулярный касательной к траектории движения. Вектор направлен в сторону центра кривизны траектории.

### Сила трения

Сила трения **покоя**  $\vec{F}_{\text{пок}}$  определяется из уравнения: сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0.$$

Если на тело вдоль некоторого направления действует только две силы: сдвигающей и трения, то сила трения равна по модулю и обратная по направлению **сдвигающей** силе. Сила трения покоя увеличивается при увеличении сдвигающей силы, оставляя тело в покое до достижения своего максимально значения, равного силе трения **движения**, которая уже не меняется. При дальнейшем увеличении сдвигающей силы тело начинает двигаться.

$$F_{\text{пок}} \leq \max F_{\text{пок}} = F_{\text{движ}}.$$

Сила трения **скольжения (движения)**  $\vec{F}_{\text{движ}}$

$$F_{\text{движ}} = \mu N, \vec{F} \uparrow \downarrow \vec{v},$$

$\vec{v}$  – скорость движения тела **относительно поверхности**, о которую оно трется,  
 $\vec{N}$  – нормальная составляющая силы реакции опоры.

## Сила упругости

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}, F_x = -k(x - x_0), F = k|x - x_0|,$$

$k$  – коэффициент жесткости,  $x$  – координата незакрепленного конца растянутой (сжатой) пружины,  $x_0$  – она же для нерастянутой (несжатой) пружины,  $\Delta\vec{x}$  – вектор деформации.

## Сила гравитационного притяжения тел

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

$G$  – гравитационная постоянная,  $r$  – расстояние между телами,  $m_1, m_2$  – массы взаимодействующих тел (для м.т. и сферически симметричных тел).

**Сила тяжести** ( $M_3$  и  $R_3$  – масса и радиус Земли)

$$F = mG \frac{M_3}{R_3^2} = mg, \quad g = G \frac{M_3}{R_3^2} = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Сила гравитационного притяжения тела, находящегося у поверхности Земли, к Земле без учета ее вращения. Состояние тела при движении только под действием силы тяжести называется **невесомостью**.

## Система материальных точек

**Центром масс** (инерции, тяжести) системы материальных точек ( $m_i, x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ ) называется геометрическая точка, радиус-вектор которой  $\vec{R}_C$  в некоторой системе отсчета, в которой определены координаты всех точек, равен (двумерный случай)

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad X_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

**Скорость центра масс** системы материальных точек  $\vec{V}_C$  равна

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{R}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad V_{Cx} = \frac{dX_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{ix}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad V_{Cy} = \frac{dY_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{iy}}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

**Импульс центра масс** системы материальных точек  $\vec{p}_C$  равен

$$\vec{p}_C = m\vec{V}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

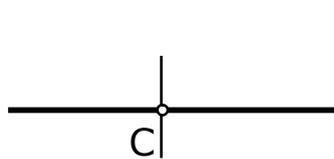
**Ускорение центра масс** системы материальных точек  $\vec{a}_C$  равно

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{F}^*}{m}, \quad a_{Cx} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{ix}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{F_x^*}{m}, \quad a_{Cy} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iy}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{F_y^*}{m}.$$

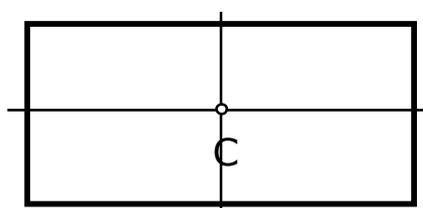
Здесь  $\vec{F}_i$  – равнодействующая сил, действующая на  $i$  материальную точку,

$\vec{F}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – равнодействующая сил, действующих на систему материальных точек.

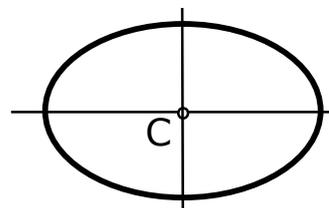
Если система материальных точек – абсолютно твердое **симметричное тело**, то центр масс системы (инерции, тяжести) находится в **центре симметрии** тела.



Отрезок  
прямой



Прямоуголь-  
ник



Эллипс

## Тесты с решениями

1. При механическом движении из указанных ниже пар величин всегда совпадают по направлению ...

сила и скорость

сила и перемещение

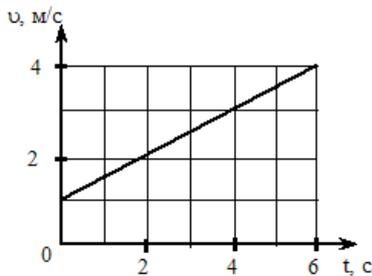
ускорение и перемещение

✓ сила и ускорение

### Решение

Сила и ускорение (2 закон Ньютона).

2. Под действием постоянной силы в 5 Н скорость тела изменялась с течением времени, как показано на графике:



Масса тела (в кг) равна ... **10**

### Решение

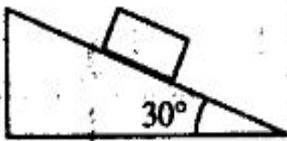
Так как скорость растет со временем линейно, то это равноускоренное движение

$$a = \frac{V - V_0}{t} = \frac{3 - 1}{4} = 0,5 \frac{м}{с^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует, что

$$m = \frac{F}{a} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ кг}.$$

3. Брусок массой 0,1 кг покоится на наклонной плоскости. Величина силы трения равна...



0

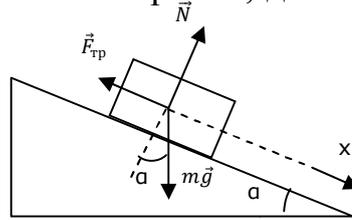
1 Н

2 Н

✓ 0,5 Н

### Решение

Так как брусок покоится, то сила трения, действующая на него, это сила трения покоя.



Из определения покоя (точнее равновесия) следует, что

$$\vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

Спроектируем это векторное равенство на ось X

$$-F_{тр} + mgsin\alpha = 0$$

или

$$F_{тр} = mgsin\alpha = 0,1 \cdot 10 \cdot 0,5 = 0,5Н.$$

4. Тело массой 2 кг движется с коэффициентом трения 0,5 по наклонной плоскости, расположенной под углом 60 градусов к горизонту. Сила трения (в Н) равна ... **5**

### Решение

В перпендикулярном наклонной плоскости направлении (ось Y на рисунке к предыдущей задаче) тело не движется с ускорением (и вообще не движется). Проектируя силы, действующие на тело, на это направление и записывая выражение для силы трения движения, получим

$$0 = N - mg \cos \alpha,$$
$$F_{тр} = \mu N.$$

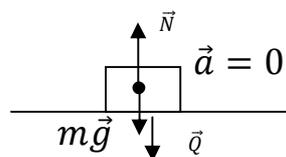
Тогда

$$F_{тр} = \mu mg \cos \alpha = 0,5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 5 Н.$$

5. Человек входит в лифт, который затем начинает двигаться равномерно вверх, при этом...

- вес человека уменьшится
- ✓ вес человека не изменится
- вес человека будет зависеть от скорости движения лифта
- вес увеличится

### Решение



Запишем 2 закон Ньютона (равномерно – значит нулевое ускорение)

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}.$$

По 3 закону Ньютона вес тела равен

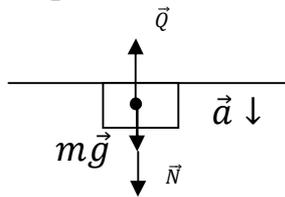
$$\vec{Q} = -\vec{N}.$$

Из 2 и 3 закона Ньютона следует, что  $\vec{Q} = m\vec{g}$ , т.е. вес человека не изменится.

6. Лифт движется вниз с ускорением  $a > g$ , при этом...

- тело будет находиться в невесомости
- с телом ничего не произойдет
- ✔ тело прижмется к потолку лифта
- тело прижмется к полу лифта

**Решение**



(Лифт падает быстрее тела)

Запишем 2 закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

По 3 закону Ньютона вес тела равен

$$\vec{Q} = -\vec{N}.$$

Из 2 и 3 закона Ньютона следует, что

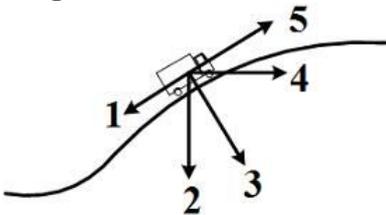
$$\vec{Q} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Так как, по условию,  $\vec{a} = k\vec{g}$ , где  $k > 1$ , то

$$\vec{Q} = m(\vec{g} - \vec{a}) = m(1 - k)\vec{g} = -m(k - 1)\vec{g} \uparrow \vec{g}.$$

Если вес (сила давления) тела направлен вверх, то очевидно, что тело прижимается к потолку лифта.

7. Автомобиль поднимается в гору по участку дуги с постоянной по величине скоростью.



Равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, ориентирована в направлении ...3.

### Решение

Разложим вектор ускорения на две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_\tau = (dV/dt)\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = (V^2/R)\vec{n}.$$

Так как  $V = \text{const}$ , то

$$\vec{a}_\tau = 0 \text{ и } \vec{a} = \vec{a}_n.$$

Нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  всегда направлено перпендикулярно касательной к траектории в сторону ее искривления (направление 3). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{a},$$

где  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сил, действующих на тело. Следовательно, равнодействующая всех сил направлена в сторону 3.

**8.** Тело массой 5 кг движется равномерно по вогнутому мосту со скоростью 10 м/с. В нижней точке сила давления тела на мост вдвое превосходит силу тяжести. Радиус кривизны моста (в м) равен ... **10**

### Решение

Согласно второму закону Ньютона в нижней точке моста

$$N - mg = \frac{mV^2}{R}.$$

Так как по 3 закону Ньютона и по условию задачи,

$$N = Q = 2mg,$$

то

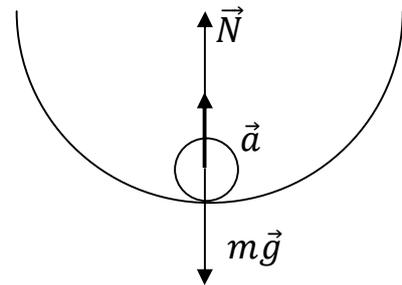
$$2mg - mg = \frac{mV^2}{R}.$$

Следовательно,

$$mg = \frac{mV^2}{R}$$

и

$$R = \frac{V^2}{g} = \frac{100}{10} = 10 \text{ м.}$$



**9.** Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{v}$ . На левом рисунке показан график зависимости  $v_\tau$  от времени ( $\vec{\tau}$  – единичный вектор положительного направления,  $v_\tau$  – проекция  $\vec{v}$  на это направление). Верные направления силы, действующей на точку  $M$  в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ , указаны на правом рисунке под номерами

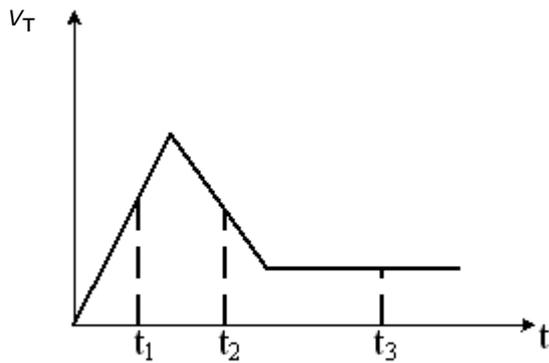


Рис. 1

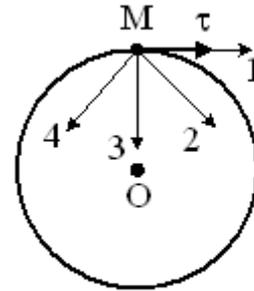


Рис. 2

$t_1$	$t_2$	$t_3$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

### Решение

Сила, действующая на материальную точку массой  $m$ , двигающуюся по окружности, может быть разложена на две составляющие:

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau},$$

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный к центру окружности. Первая – тангенциальная (касательная). В т.  $M$  может быть направлена по  $\vec{\tau}$  (вектор 1), если  $\frac{dv}{dt} > 0$  или против  $\vec{\tau}$  (вектор противоположный вектору 1), если  $\frac{dv}{dt} < 0$ . Вторая – нормальная (центростремительная). В т.  $M$  может быть направлена только по вектору 3. По условию задачи

$$\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\tau}, \text{ т. е. } v_\tau = v.$$

Тогда для  $t_1$  по графику имеем  $dv/dt < 0$ , т. е.

$$\vec{F}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\tau} \quad (\text{направление против 1}).$$

Для  $t_2$  имеем  $dv/dt > 0$ , т. е.

$$\vec{F}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\tau} \quad (\text{направление 1}).$$

Для  $t_3$  имеем  $dv/dt = 0$ , т. е.

$$\vec{F}_\tau = 0.$$

Так как  $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$ , и  $\vec{F}_n$  всегда направлен по 3, то складывая эти вектора по правилу параллелограмма, получим

$\vec{F} \parallel$  направлению 4 для  $t_1$ ,  $\vec{F} \parallel 2$  для  $t_2$  и  $\vec{F} \parallel 3$  для  $t_3$ .

**10.** Импульс материальной точки изменяется по закону  $\vec{p} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$  (кг·м/с). Модуль силы (в Н), действующей на точку в момент времени  $t = 1$  с, равен ... **5**.

### Решение

Согласно второму закону Ньютона скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 3\vec{i} + 4t\vec{j}.$$

Модуль силы  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9 + 16t^2}$ . В момент времени  $t = 1$  с

$$F = \sqrt{9 + 16 \cdot 1^2} = 5 \text{ Н}.$$

**11.** Материальная точка движется под действием силы, изменяющейся по закону  $\vec{F} = 10t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$  (Н). В момент времени  $t = 2$  с проекция импульса (в кг·м/с) на ось ОХ равна ... **20**.

### Решение

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

В проекции на ось ОХ

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x.$$

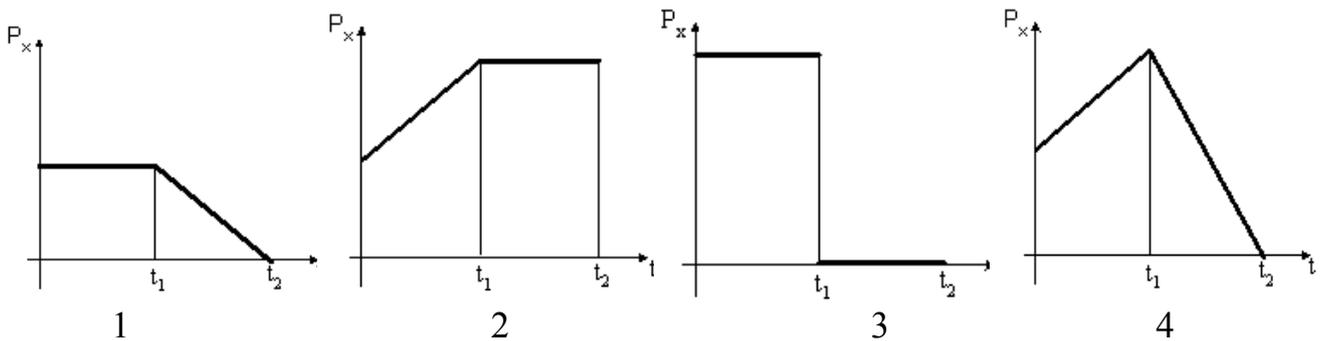
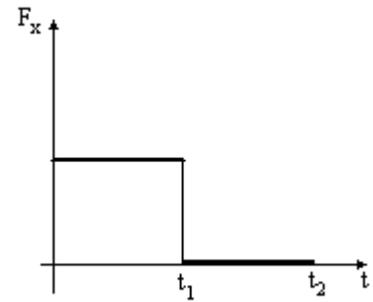
Тогда  $dp_x = F_x dt$  и, следовательно,

$$p_x - p_{0x} = \int_0^t F_x dt = \int_0^t 10t dt = \frac{10t^2}{2} = 20 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

**Примечание.** Нет начального импульса. Предполагаем, что он равен нулю. Тогда

$$p_x = 20 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

12. Материальная точка двигалась вдоль оси  $X$  равномерно с некоторой скоростью  $V_x$ . Начиная с момента времени  $t = 0$ , на нее стала действовать сила  $F_x$ , график временной зависимости которой представлен на рисунке. График, правильно отражающий зависимость величины проекции импульса материальной точки  $P_x$  от времени, представлен на ..... 2 рисунке.



### Решение

Так как по второму закону Ньютона

$$F_x = \frac{dp_x}{dt},$$

то

– если  $F_x = \text{const}$ , то  $p_x(t) = F_x t + p_x(0)$  – линейная функция времени,

если  $F_x > 0$ , то  $p_x(t)$  – монотонно возрастающая,

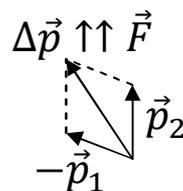
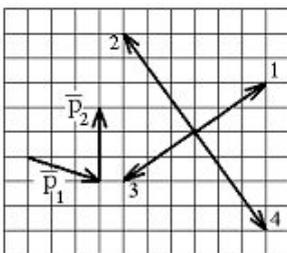
если  $F_x = 0$ , то  $p_x(t) = p_x(0)$  – постоянная,

если  $F_x < 0$ , то  $p_x(t)$  – монотонно убывающая функция,

– если  $F_x$  меняется скачком, то скачком меняется наклон зависимости  $p_x(t)$ .

Единственный график, соответствующий указанной выше последовательности зависимостей, представлен на втором рисунке.

13. Импульс тела  $\vec{p}_1$  изменился под действием кратковременного удара и стал равным  $\vec{p}_2$ , как показано на рисунке:



В момент удара сила действовала в направлении ... 2.

### Решение

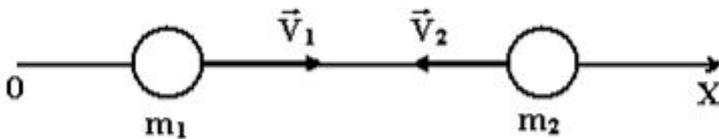
Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Следовательно,

$$\vec{F} \uparrow \Delta\vec{p}, \text{ а } \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1) \text{ направлено по } 2.$$

14. Вдоль оси OX навстречу друг другу движутся две частицы с массами  $m_1 = 4$  г и  $m_2 = 2$  г и скоростями  $V_1 = 5$  м/с и  $V_2 = 4$  м/с соответственно. Проекция скорости центра масс на ось OX (в единицах СИ) равна ... 2 м/с.



### Решение

Скорость центра масс механической системы равна отношению импульса системы к ее массе

$$\vec{V}_C = \frac{\vec{P}}{m}.$$

Для рассматриваемой системы из двух частиц

$$\vec{V}_C = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Проекция скорости центра масс на ось OX

$$V_{Cx} = \frac{m_1V_{1x} + m_2V_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{4 + 2} = 2 \frac{м}{с}.$$

15. Механическая система состоит из трех частиц, массы которых  $m_1 = 0,1$  г,  $m_2 = 0,2$  г,  $m_3 = 0,3$  г. Первая частица находится в точке с координатами (2, 3, 0), вторая – в точке (2, 0, 1), третья – в точке (1, 1, 0) (координаты даны в сантиметрах). Тогда  $y_C$  – координата центра масс (в см) – равна ... 1.

### Решение

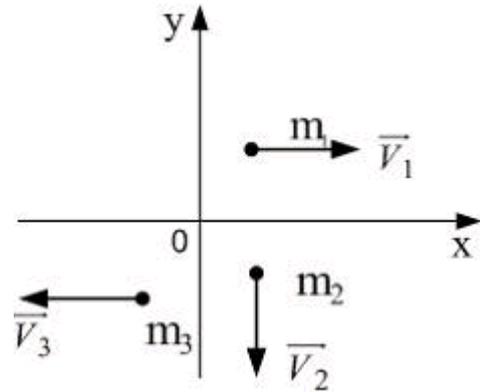
Центром масс системы материальных точек называется точка C, радиус-вектор которой определяется соотношением

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i.$$

Тогда

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0,1 \cdot 3 + 0,2 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1}{0,1 + 0,2 + 0,3} = 1 \text{ см.}$$

16. Система состоит из трех шаров с массами  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 3$  кг, которые движутся так, как показано на рисунке. Если скорости шаров равны  $V_1 = 3$  м/с,  $V_2 = 2$  м/с,  $V_3 = 1$  м/с, то вектор импульса центра масс направлен (или система будет двигаться в направлении)



вдоль оси + OX

✓ вдоль оси - OY

вдоль оси - OX

### Решение

По определению вектор импульса центра масс равен

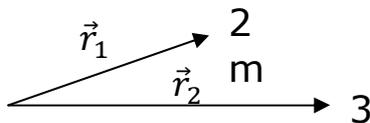
$$\vec{p}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + m_3 \vec{V}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Так как  $m_1 V_1 = 1 \cdot 3 = 3$  кг·м/с,  $m_3 V_3 = 3 \cdot 1 = 3$  кг·м/с и  $\vec{V}_1 \updownarrow \vec{V}_3$ , то

$$m_1 \vec{V}_1 + m_3 \vec{V}_3 = 0$$

и  $\vec{p}_c \upuparrows \vec{V}_2$ , т. е.  $\vec{p}_c$  направлен вдоль оси - OY.

17. Положение центра масс системы двух частиц относительно точки O, изображенных на рисунке, определяется радиусом-вектором.....



✓  $\vec{r}_c = (2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2)/5,$

$\vec{r}_c = (2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2)/5,$   
 $\vec{r}_c = (3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2)/5.$

### Решение

Центром масс системы материальных точек называется точка C, радиус-вектор которой определяется соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{2m\vec{r}_1 + 3m\vec{r}_2}{2m + 3m} = (2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2)/5.$$

18. Координаты частицы массы  $m$  при ее движении в плоскости  $XY$  изменяются по законам:  $x = A \sin \omega t$ ,  $y = B \cos \omega t$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  – постоянные. Модуль силы, действующей на частицу, равен...

$$F = m\omega^2(A + B)$$

$$F = m\omega^2 \sqrt{(A \sin \omega t)^2 - (B \cos \omega t)^2}$$

$$\checkmark F = m\omega^2 \sqrt{(A \sin \omega t)^2 + (B \cos \omega t)^2}$$

### Решение

По определению

$$a_x = x'' = -A \omega^2 \sin \omega t, \quad a_y = y'' = -B \omega^2 \cos \omega t.$$

Тогда

$$F = ma = m \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m \sqrt{(A \omega^2 \sin \omega t)^2 + (B \omega^2 \cos \omega t)^2}$$

или

$$F = m\omega^2 \sqrt{(A \sin \omega t)^2 + (B \cos \omega t)^2}.$$

19. Шарик падает вертикально вниз в жидкости. Если на него действует  $m\vec{g}$  – сила тяжести,  $\vec{F}_A$  – сила Архимеда и  $\vec{F}_c$  – сила сопротивления, то при равномерном движении шарика...

$$\begin{aligned} mg - F_A + F_c &= 0 \\ mg + F_A + F_c &= 0 \\ mg + F_A - F_c &= 0 \\ -mg + F_A + F_c &= 0. \end{aligned}$$

### Решение

Так как падение равномерное, то

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_c = 0.$$

Спроектируем это векторное равенство на вертикальную ось  $OY$

$$mg_y + F_{Ay} + F_{cy} = 0.$$

Так как сила Архимеда и сопротивления направлены против силы тяжести, то их проекции должны иметь противоположный силе тяжести знак. Таким образом, правильная запись **последняя**

$$-mg + F_A + F_C = 0.$$

**20.** Если центр масс системы материальных точек движется прямолинейно и равномерно, то импульс этой системы

- равномерно увеличивается
- равен нулю
- равномерно убывает
- не изменяется

### Решение

Так как импульс системы материальных точек равен

$$\vec{p}_C = m\vec{V}_C,$$

где  $m$  – масса системы, а  $\vec{V}_C$  – скорость центра масс, то при прямолинейном и равномерном движении импульс такой системы не изменяется.

**21.** На тело, брошенное под углом к горизонту, во время полета действует горизонтальная сила. Сопротивлением воздуха пренебречь. От величины этой силы зависит ...

- время полета
- дальность полета
- высота подъема

### Решение

В соответствии со вторым законом Ньютона горизонтальная сила создает горизонтально ускорение, что приводит к изменению горизонтальной скорости. Движение по горизонтали становится переменным. Так как время полета (и высота подъема) определяется исключительно вертикальной силой и вертикальной составляющей начальной скорости, то оно не меняется. Дальность полета зависит от времени полета и горизонтальной скорости. Таким образом, от величины горизонтальной силы зависит только дальность полета.

## ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### Материальная точка (произвольное движение)

**Момент  $\vec{L}$  импульса  $\vec{p}$**  материальной точки относительно т. О равен

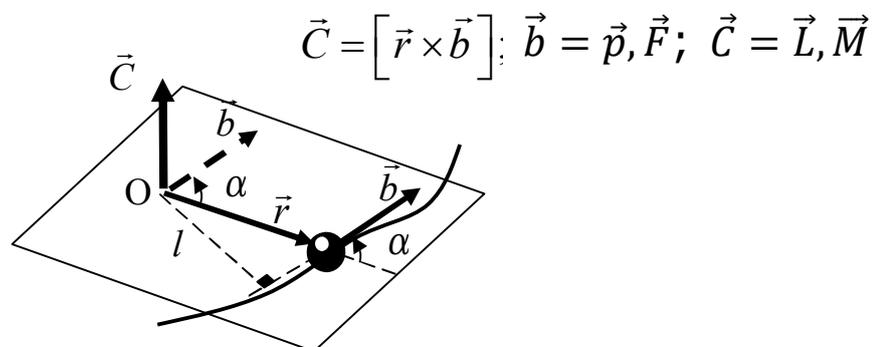
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad L = rp \sin\alpha = lp,$$

где  $l$  – плечо вектора  $\vec{p}$  (длина перпендикуляра, опущенного из т. О на линию вектора  $\vec{p}$ ),  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки относительно т. О. Если  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  параллельны ( $\alpha = 0$ ) или антипараллельны ( $\alpha = \pi$ ), то  $\vec{L} = 0$ .

**Момент  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$** , действующей на материальную точку, относительно т. О равен

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad M = rF \sin\alpha = lF,$$

где  $l$  – плечо вектора  $\vec{F}$  (длина перпендикуляра, опущенного из т. О на линию вектора  $\vec{F}$ ),  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы относительно т. О. Если  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  параллельны ( $\alpha = 0$ ) или антипараллельны ( $\alpha = \pi$ ), то  $\vec{M} = 0$ .



Можно показать, что  $M_z$  и  $L_z$  (**проекции векторов моментов силы  $\vec{M}$  и импульса  $\vec{L}$** ) **одинаковы** относительно **любых точек** лежащих на произвольной неподвижной оси OZ. Говорят, что  $M_z$  и  $L_z$  – это **моменты силы и импульса относительно оси**.

#### Связь моментов импульса и силы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \vec{L} = \vec{L}_0 + \int_0^t \vec{M} dt; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad L_z = L_{0z} + \int_0^t M_z dt.$$

Здесь  $\vec{M}$  – сумма моментов сил, приложенных к материальной точке. Моменты импульса и сил взяты относительно одной и той же точки пространства.

### Частный случай для произвольного движения

Если  $\vec{M} = \text{const}$  и  $\vec{L}_0 = 0$ , то  $\vec{L} = \vec{M}t$ ,  $L = Mt$  или  $\frac{dL}{dt} = M$  (движение из покоя).

### Закон сохранения момента импульса

Если  $\vec{M} = 0$ , то  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  ( $\vec{L} = \text{const}$ ,  $L = \text{const}$ ,  $L_z = \text{const}$ ).

Если  $M_z = 0$ , то  $\frac{dL_z}{dt} = 0$  ( $L_z = \text{const}$ ).

### Твердое тело

(вращение вокруг неподвижной оси)

Пусть материальная точка или твердое тело **вращается** с частотой  $\omega$  относительно неподвижной оси, **направленной по OZ**. Тогда проекция **момента импульса равна**

$$L_z = J\omega_z = \pm J\omega,$$

где  $\omega_z$  и  $J$  – проекция угловой скорости на ось вращения и момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

### Момент инерции твердого тела $J$ относительно оси

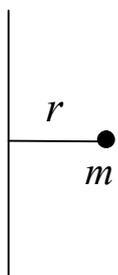
$$J = \int_V r^2 dm,$$

где  $r$  – расстояние от положения малой массы  $dm$  тела до оси.

Чем **дальше** части тела от **оси** и чем они **массивнее**, тем **больше момент инерции** относительно этой оси.

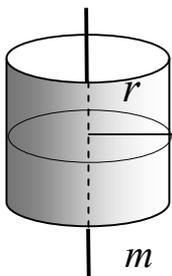
материальная точка

$$J = mr^2$$



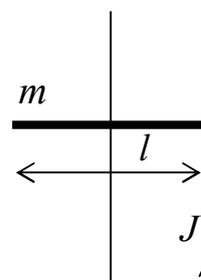
сплошной цилиндр

$$J = \frac{mr^2}{2}$$



стержень

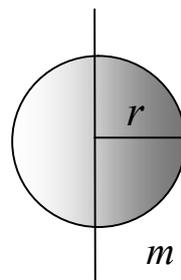
$$J = \frac{ml^2}{12}$$



цилиндрическая поверхность, труба

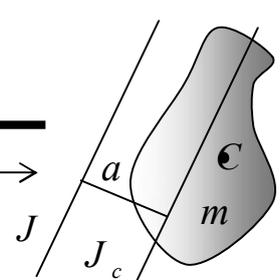
$$J = mr^2$$

шар  $J = \frac{2mr^2}{5}$



теорема Штейнера

$$J = J_c + ma^2$$



### Теорема Штейнера

$J$  — момент инерции тела относительно заданной оси,  $J_c$  — момент инерции тела относительно оси, параллельной заданной и проходящей через центр инерции (масс, тяжести) тела (точка  $C$ ),  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние между осями (длина перпендикуляра)

$$J = J_c + ma^2, \quad J \geq J_c.$$

### Связь моментов импульса и силы для вращательного движения (основное уравнение динамики вращательного движения)

$$J\varepsilon_z = M_z \quad (J\varepsilon = \pm M_z),$$

где  $\varepsilon_z = \pm\varepsilon$  — проекция вектора углового ускорения. Предполагаем, что момент инерции тела не меняется.

### Закон сохранения момента импульса для вращательного движения

Если  $M_z = 0$ , то  $L_z = J\omega_z = \text{const}$  ( $J\omega = \text{const}$ ).

Предполагаем, что момент инерции тела в общем случае может измениться.

### Частный случай для вращательного движения

Если ось симметрии тела совпадает с осью вращения и момент импульса тела и моменты сил рассчитываются относительно точки, лежащей на оси, и координатная ось  $Z$  направлена по  $\vec{L}$ , то

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad L = J\omega, \quad L_z = L, \quad M = |M_z|,$$

$$\frac{dL}{dt} = \pm M, \quad J\varepsilon = M.$$

Если  $M = 0$ , то  $L = J\omega = \text{const}$ .

**Ускоренное вращение:**  $\varepsilon_z = \varepsilon > 0$ ,  $\vec{L} \uparrow \uparrow \vec{M}$ ,  $L$  растет с  $t$ ,  $M_z = M > 0$ .

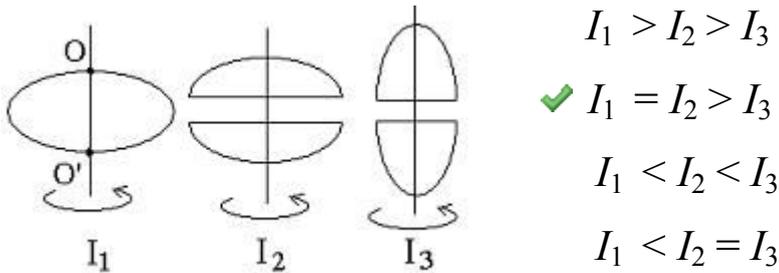
**Замедленное вращение:**  $\varepsilon_z = -\varepsilon < 0$ ,  $\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{M}$ ,  $L$  уменьшается с  $t$ ,  $M_z = -M < 0$ .

### Система твердых тел и материальных точек (вращение вокруг неподвижной оси)

Все уравнения, справедливые для вращения вокруг неподвижной оси одного тела, остаются справедливыми и для системы тел с **заменой** суммы моментов сил приложенных к одному телу  $\vec{M}$ ,  $M_z$  на сумму моментов только **внешних сил**, приложенных ко всем телам системы  $\vec{M}^{\text{внеш}}$ ,  $M_z^{\text{внеш}}$ . При выполнении условия сохранения момента импульса системы тел моменты импульса тел системы могут изменяться.

## Тесты с решениями

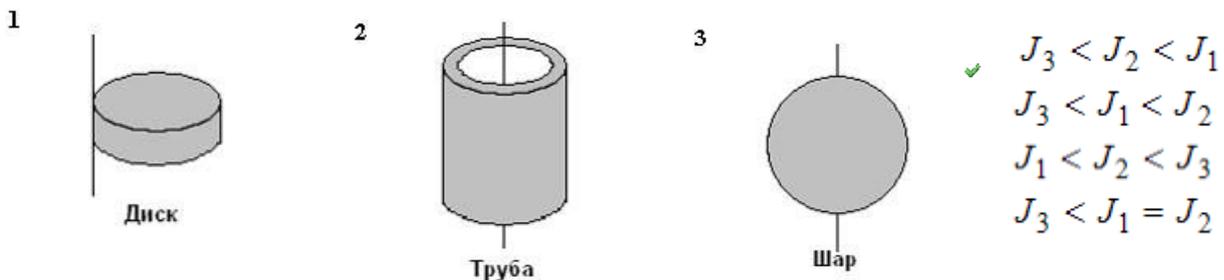
1. Из жести вырезали три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали пополам вдоль разных осей симметрии. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси  $OO'$ . (здесь момент инерции обозначен буквой  $I$ , а не  $J$ ). Для моментов инерции относительно оси  $OO'$  справедливо соотношение ...



### Решение

Так как на первом и втором рисунке все части тела (массы) находятся на одном и том же расстоянии от оси, то  $I_1 = I_2$  и сразу выбираем неравенство 2. При той же массе части тела на третьем рисунке расположены ближе к оси. Следовательно, момент инерции  $I_3$  меньше  $I_1$  и  $I_2$ .

2. Рассматриваются три тела: диск, тонкостенная труба и сплошной шар; причем массы  $m$  и радиусы  $R$  шара и оснований диска и трубы одинаковы. Верным для моментов инерции рассматриваемых тел относительно указанных осей является соотношение ...



### Решение

Момент инерции сплошного однородного кругового цилиндра (диска) массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно его оси

$$J = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции диска относительно указанной оси вычисляется с использованием теоремы Штейнера:

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = 1,5mR^2.$$

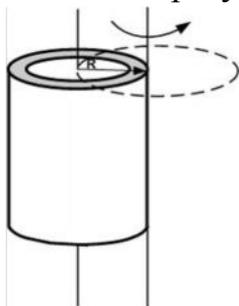
Момент инерции тонкостенного кругового цилиндра массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно его оси и момент инерции шара массы  $m$  и радиуса  $R$

$$J_2 = mR^2, \quad J_3 = \frac{2}{5}mR^2 = 0,4mR^2.$$

Таким образом, правильным соотношением для моментов инерции рассматриваемых тел относительно указанных осей является соотношение

$$J_3 < J_2 < J_1.$$

3. Если ось вращения тонкостенного кругового цилиндра перенести из центра масс на образующую, то момент инерции относительно новой оси... раза.



- ✓ увеличится в 2
- уменьшится в 2
- увеличится в 1,5
- уменьшится в 1,5

### Решение

Момент инерции тонкостенного кругового цилиндра массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через центр масс

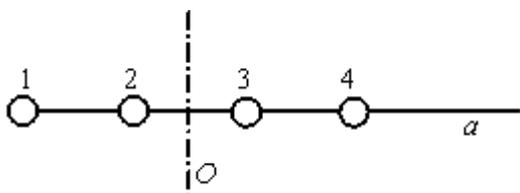
$$J_1 = mR^2.$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через образующую, найдем по теореме Штейнера

$$J_2 = J_1 + mR^2 = 2mR^2.$$

Тогда  $J_2/J_1 = 2$ , т. е. момент инерции увеличится в 2 раза.

4. Четыре шарика расположены вдоль прямой  $a$ . Расстояния между соседними шариками одинаковы. Массы шариков слева направо: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г. Если поменять местами шарики 1 и 4, то момент инерции этой системы относительно оси  $O$ , перпендикулярной прямой  $a$  и проходящей через середину системы ...



- увеличится
- ✓ не изменится
- уменьшится

### Решение

Моменты инерции системы шаров относительно оси  $O$  в первом и втором случае равны, так как шары 1 и 4 находятся на одинаковом расстоянии от оси

$$J = m_1 \left(\frac{3}{2}r\right)^2 + m_2 \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + m_3 \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + m_4 \left(\frac{3}{2}r\right)^2.$$

Следовательно, момент инерции системы не изменится.

**Примечание.** Если поменять местами 1 и 2, то момент инерции увеличится, так как более тяжелый шар будет находиться дальше от оси вращения.

5. Если момент инерции тела увеличить в 2 раза, а скорость его вращения уменьшить в 2 раза, то момент импульса тела

уменьшится в 4 раза

увеличится в 4 раза

уменьшится в 2 раза

✔ не изменится

### Решение

Проекция момента импульса тела для случая вращательного движения вокруг неподвижной оси имеет вид

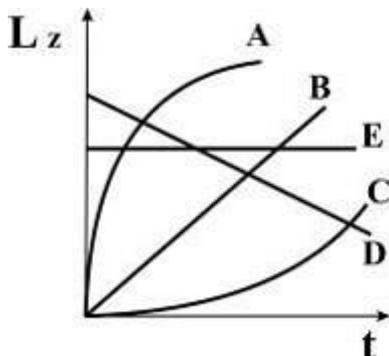
$$L_z = J\omega_z.$$

Тогда получаем, что

$$L'_z = 2J \frac{\omega_z}{2} = J\omega_z = L_z.$$

Для частного случая вращательного движения  $L_z = \pm L$ , следует, что  $L = L'$ .

6. Диск начинает вращаться вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением. Зависимость момента импульса диска от времени представлена на рисунке линией ...



- ✔ B
- A
- C
- D
- E

### Решение

Проекция момента импульса тела для случая вращательного движения вокруг неподвижной оси имеет вид

$$L_z = J\omega_z.$$

Так как диск начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, то это равноускоренное вращение без начальной скорости, т. е.

$$\omega_z = \varepsilon_z t.$$

Следовательно,

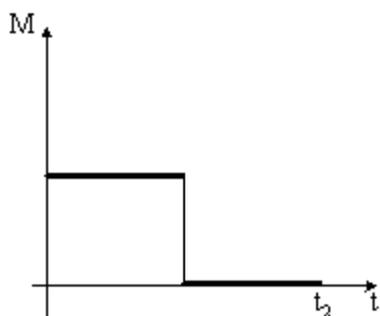
$$L_z = J\varepsilon_z t,$$

т. е. линейно возрастающая функция времени (линия В).

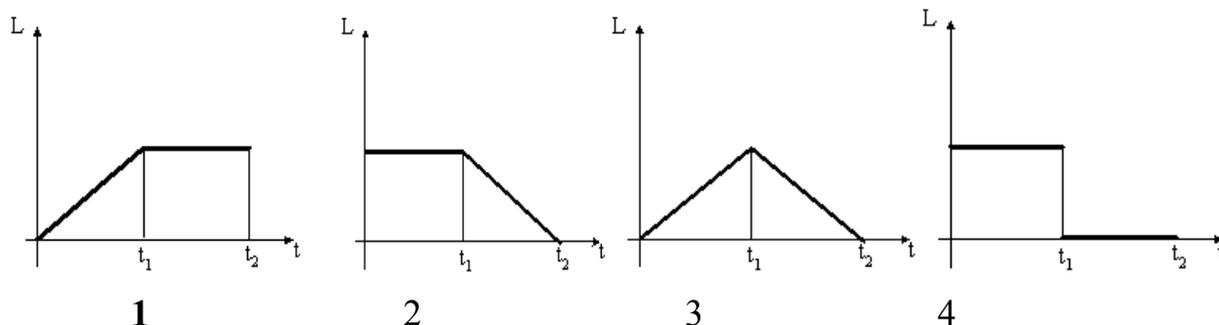
**Примечание 1.** В условии задачи говорится о моменте импульса, а на графике – проекция момента на ось Z.

**Примечание 2.** Так как диск **начинает вращаться**, то момент импульса вначале равен **нулю**, т. е. только **линия В**. Если бы в задаче диск **тормозил**, то момент импульса стремился бы к нулю, т. е. только **линия Д**.

7. Диск начинает вращаться под действием момента сил, график временной зависимости которого представлен на рисунке:



Правильно отражает зависимость момента импульса диска от времени график.



**Решение**

Если диск начинает вращаться, то

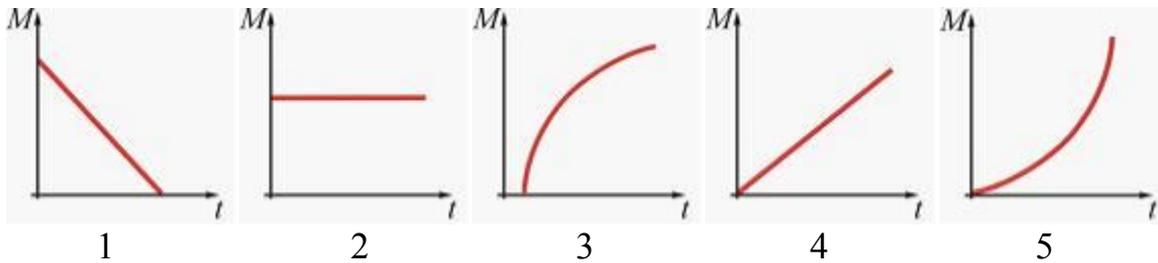
$$L(0) = 0.$$

Так как от  $t_1$  до  $t_2$   $M = 0$ , то

$$L = \text{const}.$$

Следовательно, правильный график – 1.

8. Абсолютно твердое тело вращается с угловым ускорением, изменяющимся по закону  $\beta = \beta_0 - \alpha t$ , где  $\alpha$  — некоторая положительная константа. Момент инерции тела остается постоянным в течение всего времени вращения. Зависимость от времени момента сил, действующих на тело, определяется графиком...



### Решение

Так как  $\beta = \beta_0 - \alpha t < 0$  при  $t > \beta_0/\alpha$ , то это **проекция** углового ускорения, т. е.  $\beta_z = \beta_0 - \alpha t$ . Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$M_z = \beta_z J = (\beta_0 - \alpha t)J.$$

Будем считать, что имеет место **частный случай** для вращательного движения и  $M = |M_z|$ . **Предположим, что  $\beta_0 > 0$** , и  $t < \beta_0/\alpha$ , т. е.  $\beta_z > 0$ . Тогда

$$M_z = M = (\beta_0 - \alpha t)J > 0$$

и это линейно убывающая от значения  $M(0) = \beta_0$  до нуля функция (график 1).

### Полное решение

Если  $\beta_0 = 0$  ( $\beta_z = -\alpha t < 0$ ), то

$$M_z = -\alpha t J, M = \alpha t J$$

и это линейно возрастающая из нуля функция, т. е. график 4. Если  $\beta_0 < 0$  ( $\beta_z = \beta_0 - \alpha t = -(|\beta_0| + \alpha t) < 0$ ), то

$$M_z = -(|\beta_0| + \alpha t)J, M = (|\beta_0| + \alpha t)J$$

и это линейно возрастающая от значения  $M(0) = |\beta_0|$  функция (такого графика нет). Если  $\beta_0 > 0$ , то

для  $t < \beta_0/\alpha$  ( $\beta_z = \beta_0 - \alpha t = \alpha(\beta_0/\alpha - t) > 0$ ) имеем

$$M_z = M = (\beta_0 - \alpha t)J > 0$$

и это линейно убывающая от значения  $M(0) = \beta_0$  до нуля функция (график 1);

для  $t \geq \beta_0/\alpha$  ( $\beta_z = \beta_0 - \alpha t = -\alpha(t - \beta_0/\alpha) < 0$ ) имеем

$$M_z = -\left(t - \frac{\beta_0}{\alpha}\right)J, M = \left(t - \frac{\beta_0}{\alpha}\right)J$$

и это линейно возрастающая от значения  $M(\beta_0/\alpha) = 0$  функция (такого графика нет).

9. Величина момента импульса тела изменяется с течением времени по закону  $L = 2t^2 + 7t - 5$  (в единицах СИ). Если в момент времени 2 с угловое ускорение составляет  $3 \text{ с}^{-2}$ , то момент инерции тела (в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ) равен ...

- ✓ 5
- 6
- 0,2
- 0,5

### Решение

Указанная зависимость относится к проекции момента импульса, а не к модулю, так как при  $L(0) = -5$  (в единицах СИ), т. е.

$$L_z = 2t^2 + 7t - 5.$$

Так как

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = 4t + 7,$$

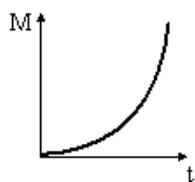
то

$$M_z(2) = 4 \cdot 2 + 7 = 15 \text{ (кг} \cdot \text{м)}.$$

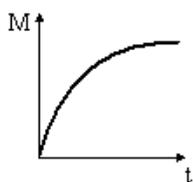
Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$J = \frac{M_z}{\varepsilon_z} = \frac{M_z(2)}{\varepsilon_z(2)} = \frac{15}{3} = 5 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2).$$

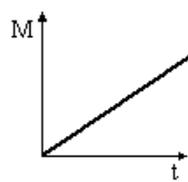
10. Момент импульса тела относительно неподвижной оси изменяется по закону:  $L_1 = c$ ,  $L_2 = ct$ ,  $L_3 = ct^{3/2}$ ,  $L_4 = ct^2$ , где  $c$  – константа. (Речь идет о проекциях момента импульса на ось, но индекс  $z$  не указан). Укажите графики, правильно отражающие зависимость от времени величины момента сил, действующих на тело.



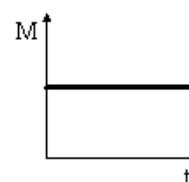
1



2



3



4

## Решение

Основное уравнение вращательного движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dL_{1z}}{dt} = M_{1z} = 0, & & \frac{dL_{2z}}{dt} = M_{2z} = c, \\ \frac{dL_{3z}}{dt} = M_{3z} = \frac{3}{2}ct^{1/2}, & & \frac{dL_{4z}}{dt} = M_{4z} = 2ct, \end{aligned}$$

Для **частного случая** вращательного движения  $M = |M_z|$ . Тогда независимо от знака  $c$  для  $L_1$  — нет соответствующей зависимости, для  $L_2$  — четвертая, для  $L_3$  — вторая и для  $L_4$  — третья.

**11.** Однородный диск массы  $m$  и радиуса  $R$  вращается под действием постоянного момента сил вокруг оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости диска. Если ось вращения перенести параллельно на край диска, то (при неизменном моменте сил) для момента инерции  $J$  и углового ускорения  $\varepsilon$  диска справедливы соотношения ...

- ✓  $J_2 > J_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$
- $J_2 > J_1, \varepsilon_2 > \varepsilon_1$
- $J_2 < J_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$
- $J_2 < J_1, \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

## Решение

Если тело не меняется, то по теореме Штейнера ( $a = R$  — расстояние между осями)

$$J = J_C + ma^2,$$

где  $J = J_2, J_C = J_1$ . Тогда

$$J_2 > J_1.$$

Исходя из основного уравнения **вращательного движения для частного случая**, имеем

$$\varepsilon = \frac{M}{J}.$$

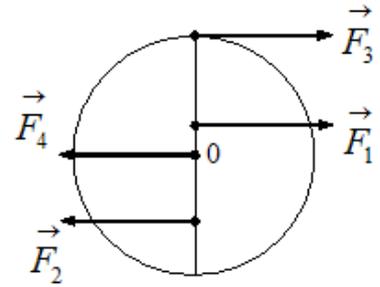
Так как по условию задачи  $M = \text{const}$  и  $J_2 > J_1$ , то

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

**12.** Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. К нему прикладывают одну из сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  или

$\vec{F}_4$ ), лежащих в плоскости диска и равных по модулю. Верным для угловых ускорений диска является соотношение ...

- ✓  $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \varepsilon_4 = 0,$
- $\varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_4,$
- $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_4,$
- $\varepsilon_3 > \varepsilon_1; \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_4.$



### Решение

Считаем момент сил относительно точки O. Для **частного случая вращательного движения**, основное уравнение динамики имеет вид

$$\varepsilon = \frac{M}{J}.$$

Так как

$$M = F \cdot l,$$

где  $l$  — плечо силы, т. е. длина перпендикуляра опущенного из т. O на линию действия силы, то

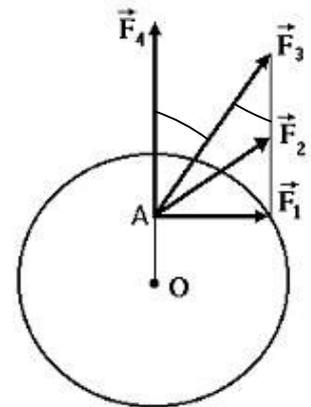
$$l_3 > l_2 > l_1 > l_4 = 0.$$

Так как все силы равны по модулю, то

$$\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > \varepsilon_4 = 0.$$

**13.** Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. В точке A прикладывают одну из сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  или  $\vec{F}_4$ ), лежащих в плоскости диска. Верным для моментов этих сил относительно рассматриваемой оси является соотношение ...

- ✓  $M_1 = M_2 = M_3, M_4 = 0$
- $M_1 < M_2 < M_3 < M_4$
- $M_1 > M_2 > M_3, M_4 = 0$
- $M_1 < M_2 < M_3, M_4 = 0$



### Решение

По определению

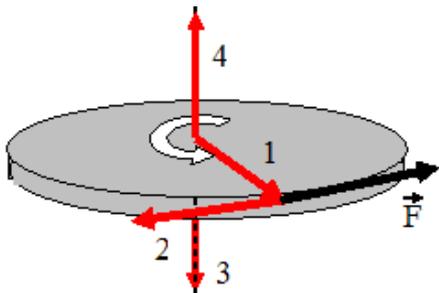
$$M = rF \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением радиус-вектора точки приложения силы (совпадает с направлением  $\vec{F}_4$ ) и направлением силы. С другой стороны  $F \sin \alpha$  — это проекция силы на направление, перпендикулярное радиус-вектору, т. е. на направление, совпадающее с  $\vec{F}_1$ .

Из рисунка видно, что проекции сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  на направление, совпадающее с  $\vec{F}_1$ , одинаковые, а проекция  $\vec{F}_4$  на это направление равна нулю. Таким образом, имеем

$$M_1 = M_2 = M_3, M_4 = 0.$$

**14.** Диск равномерно вращается вокруг вертикальной оси в направлении, указанном на рисунке белой стрелкой. В некоторый момент времени к ободу диска была приложена сила, направленная по касательной. При этом правильно изображает направление углового ускорения диска вектор ...



- ✓ 4  
1  
2  
3

**Решение**

В частном случае основное уравнение вращательного движения

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{J}.$$

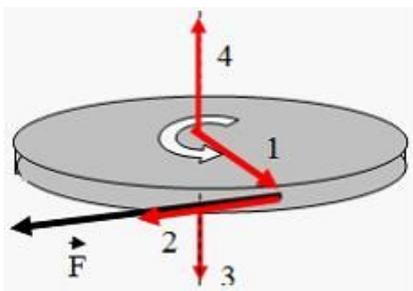
Так как

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

то  $\vec{M}$  направлено вдоль вектора 4 (правило правого винта) и, следовательно,  $\vec{\epsilon}$  направлено вдоль вектора 4.

**Дополнение.** Соединяем вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  началами и вращаем правый винт по кратчайшему пути от первого вектора в векторном произведении  $\vec{r}$  ко второму вектору  $\vec{F}$ . Тогда поступательное движение правого винта укажет на направление вектора  $\vec{M}$ .

**15.** Диск равномерно вращается вокруг вертикальной оси в направлении, указанном на рисунке белой стрелкой. В некоторый момент времени к ободу диска была приложена сила, направленная по касательной. До остановки диска правильно изображает направление угловой скорости вектор

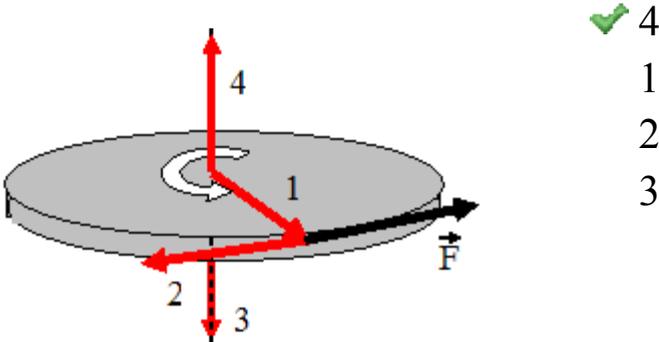


- ✓ 4  
1  
2  
3

**Решение**

Направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  связано с направлением вращения тела правилом правого винта (см. теорию). В данном случае вектор  $\vec{\omega}$  ориентирован в направлении 4. После приложения силы движение становится замедленным, но тело продолжает вращаться в ту же сторону вплоть до остановки.

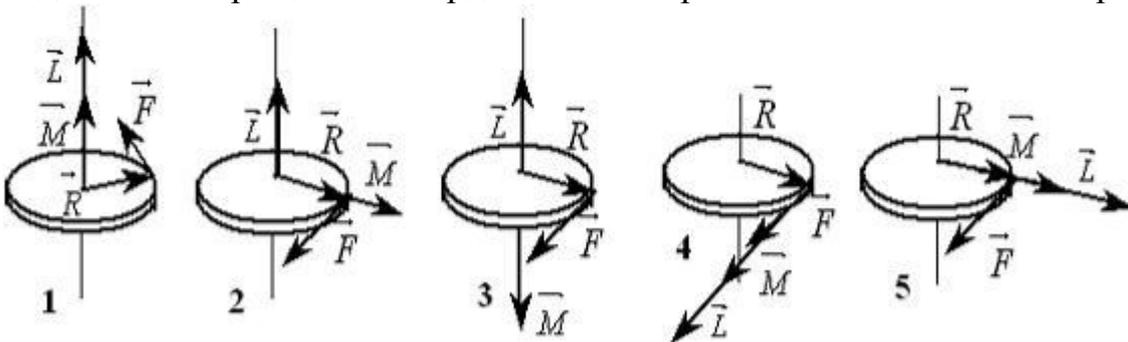
16. Диск вращается вокруг вертикальной оси в направлении, указанном на рисунке белой стрелкой. К ободу колеса приложена сила  $\vec{F}$ , направленная по касательной. Правильно изображает направление момента силы  $\vec{F}$  вектор ...



**Решение**

Момент  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  определяется соотношением  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы. Направление вектора момента силы можно определить по правилу векторного произведения или по правилу правого винта (буравчика). Таким образом, момент силы  $\vec{F}$  правильно изображает вектор 4.  
**Дополнение.** Смотри задачу 14.

17. Направления векторов момента импульса  $\vec{L}$  и момента силы  $\vec{M}$  для равнозамедленного вращения твердого тела правильно показаны на рисунке ...



- ✓ 3
- 1
- 4
- 5

## Решение

Так как сила  $\vec{F}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то при задании момента относительно центра диска  $\vec{M} = [\vec{R} \times \vec{F}]$ , он направлен вдоль оси, т. е. 1 или 3 вариант. Точнее направления  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  связаны правилом правого винта. При задании момента  $\vec{L}$  относительно центра диска при замедленном вращательном движении имеем  $\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{M}$ . Этому условию соответствует только рисунок 3.

**18.** Алюминиевый и стальной цилиндры имеют одинаковую высоту и равные массы. На цилиндры действуют одинаковые по величине силы, направленные по касательной к их боковой поверхности. Относительно моментов сил, действующих на цилиндры, справедливо одно из следующих суждений

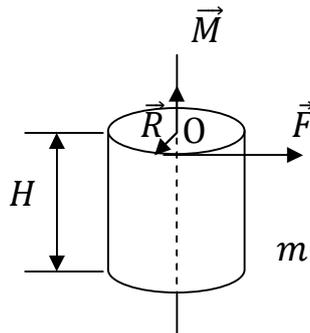
моменты сил, действующие на цилиндры, равны нулю

на стальной цилиндр действует больший момент сил, чем на алюминиевый

**на алюминиевый цилиндр действует больший момент сил, чем на стальной**

моменты сил, действующие на цилиндры, одинаковы

## Решение



Так как цилиндры имеют одинаковую массу и высоту  $H$ , и объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, то из условия  $m_{Fe} = m_{Al}$  следует ( $m = \rho V, V = \pi r^2 H$ ),

$$\rho_{Fe} \pi r_{Fe}^2 H = \rho_{Al} \pi r_{Al}^2 H,$$

$$\frac{r_{Fe}}{r_{Al}} = \frac{\sqrt{\rho_{Al}}}{\sqrt{\rho_{Fe}}}.$$

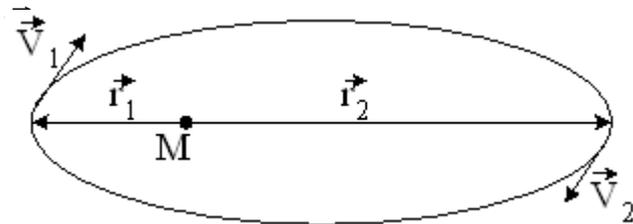
Так как  $\rho_{Fe} > \rho_{Al}$ , то  $r_{Al} > r_{Fe}$ . По определению модуль момента силы относительно точки  $O$  равен

$$M = rF \left( \sin \frac{\pi}{2} \right) = rF,$$

и на цилиндры действуют одинаковые силы  $F$ , то при условии, что  $r_{Al} > r_{Fe}$ , получаем

$$M_{Al} > M_{Fe}.$$

19. Планета массой  $m$  движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов



которой находится звезда массой  $M$ . Если  $\vec{r}$  – радиус-вектор планеты, то справедливым является утверждение:

момент импульса планеты относительно центра звезды при движении по орбите изменяется;

**момент силы тяготения, действующей на планету, относительно центра звезды равен нулю;**

соотношение, связывающее скорости планеты  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  в точках минимального и максимального ее удаления от звезды с расстояниями  $r_1$  и  $r_2$ , имеет вид  $V_1/V_2 = r_1/r_2$ .

### Решение

**Примечание.** Буквой  $M$  обозначается масса звезды (для решения задачи не понадобится) и модуль момента силы, действующей на планету.

По определению момент силы тяготения, действующей на тело, относительно звезды равен

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad M = rF \sin \alpha,$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки относительно т. О,  $\alpha$  – угол между радиус-вектором и силой тяготения. Так как радиус-вектор направлен от звезды к телу, а сила притяжения – от тела к звезде, то угол равен  $180^\circ$ . Тогда

$$M = rF \sin 180^\circ = 0,$$

т. е. момент силы тяготения, действующей на планету, относительно центра звезды равен нулю. (Второе утверждение верно).

## Полное решение

Так как

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0, \text{ то } \vec{L} = \text{const},$$

т. е. момент импульса планеты относительно центра звезды при движении по орбите не изменяется. (Первое утверждение не верно). По определению момент импульса тела относительно звезды равен

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad L = rps \sin \alpha,$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки относительно т. О,  $\alpha$  – угол между радиус-вектором и импульсом тела. Тогда в точках минимального и максимального удаления от звезды (см. рисунок)  $\alpha$  равен  $90^\circ$ , т. е.

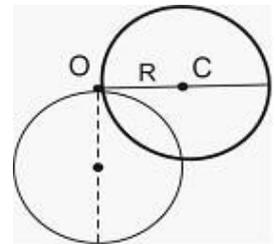
$$L_1 = r_1 p_1 \sin 90^\circ = r_1 m V_1, \quad L_2 = r_2 p_2 \sin 90^\circ = r_2 m V_2.$$

Так как  $\vec{L} = \text{const}$ , т. е.  $L_1 = L_2$ , то

$$r_1 m V_1 = r_2 m V_2 \text{ или } V_1/V_2 = r_2/r_1.$$

Следовательно, третье утверждения неверно.

20. Диск радиусом 1 м, способный свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку О перпендикулярно плоскости рисунка, отклонили от вертикали на угол  $\pi/2$  и отпустили. В начальный момент времени угловое ускорение диска равно .....  $\text{с}^{-2}$



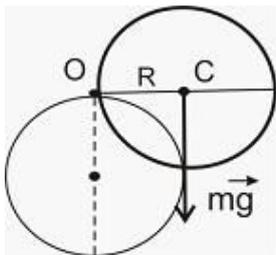
✔ 7

10

5

20

### Решение



Сила тяжести и импульсы точек диска лежат в вертикальной плоскости, перпендикулярной горизонтальной оси вращения, проходящей через т. О.

Модуль момента силы тяжести относительно точки О, в начальный момент времени равен

$$M = mgR,$$

где  $R$  – радиус диска (плечо силы). Момент инерции диска относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести (точку С), равен

$$J_c = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент инерции диска относительно горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , найдем по теореме Штейнера:

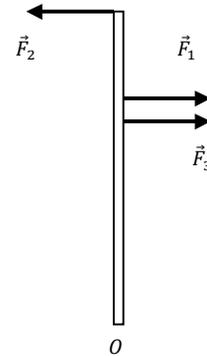
$$J_0 = J_c + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}.$$

Для **частного случая** основной закон вращательного движения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{2mgR}{3mR^2} = \frac{2g}{3R} \approx 7 \text{ с}^{-2}.$$

**21.** К стержню приложены три одинаковые по модулю силы, как показано на рисунке. Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через точку  $O$ . Вектор углового ускорения направлен....

- вдоль оси вращения «к нам»
- ✓ вдоль оси вращения «от нас»
- влево
- вправо

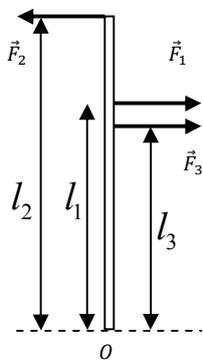


**Решение**

По определению момент силы равен

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad M = lF,$$

где  $l$  – плечо вектора  $\vec{F}$  (длина перпендикуляра, опущенного из т.  $O$  на линию вектора  $\vec{F}$ ),  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы относительно т.  $O$ . Как следует из рисунка



$$l_3 + l_1 > l_2.$$

Суммарный момент сил, действующий на стержень равен

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3.$$

Вектор  $\vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2]$  ( $M_2 = l_2 F$ ) направлен вдоль оси вращения «к нам» (по определению направления векторного произведения векторов, т. е. правила правого винта), а вектора  $\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1]$

$(M_1 = l_1 F)$  и  $\vec{M}_3 = [\vec{r}_3 \times \vec{F}_3](M_3 = l_3 F)$  направлены одинаково вдоль оси вращения «от нас».

Пусть

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_3 = \vec{M}'.$$

Тогда

$$M' = (l_1 + l_3)F > l_2 F = M_2.$$

Так как вектора  $\vec{M}_2$  и  $\vec{M}'$  направлены вдоль одной прямой, но в разные стороны, то их сумма

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}_2$$

направлена в сторону большего по модулю вектора, т. е.  $\vec{M}'$ . Из основного уравнения вращательного движения следует, что

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J},$$

где  $J > 0$  – момент инерции стержня. Следовательно,  $\vec{\varepsilon}$  направлен как  $\vec{M}$  вдоль оси вращения «от нас».

## РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

### Произвольное движение

**Работа  $A$  силы  $\vec{F}$**  по перемещению материальной точки из т.1 в т.2

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy) \text{ [Дж]}.$$

Если  $\vec{F} = \text{const}$  ( $F_x = \text{const}$ ,  $F_y = \text{const}$ ), то

$$A_{1,2} = F_x \Delta x + F_y \Delta y \text{ [Дж]}, \quad \text{где } \Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1.$$

Если  $F = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ , то

$$A_{1,2} = FS \cos \alpha \text{ [Дж]}, \quad \text{где } \alpha \text{ — угол между } \vec{F} \text{ и } \vec{v}, S \text{ — путь.}$$

Если  $\vec{F} = \vec{i}F_x$ , то

$$A_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \text{ — площадь под кривой } F_x \text{ от } x \text{ с учетом знака.}$$

**Мгновенная мощность  $N$  силы  $\vec{F}$**

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y = F v \cos \alpha \text{ [Вт]}, \quad \text{где } \alpha \text{ — угол между } \vec{F} \text{ и } \vec{v}.$$

**Средняя мощность  $\langle N \rangle$  силы  $\vec{F}$**

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} \text{ [Вт]}.$$

**Определение знака работы и мощности**

Если угол  $\alpha$  между  $\vec{F}$  и  $\vec{v}$  острый, то  $A, N > 0$ , тупой, то  $A, N < 0$ .

### Вращательное движение

**Работа  $A$  силы  $\vec{F}$**  при повороте тела вокруг неподвижной оси на угол  $\varphi$  от положения 1 до положения 2

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = \int_0^\varphi \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_0^\varphi \vec{M} \vec{\omega} dt = \int_0^\varphi M_z d\varphi_z \text{ [Дж]},$$

где  $\vec{M}$  — момент силы.

$$\text{Если } M_z = \text{const}, \text{ то } A_{1,2} = \int_0^\varphi M_z d\varphi_z = M_z \Delta\varphi \text{ [Дж]}.$$

## Определение знака работы $A$ и мощности $N$

( $\vec{L}, \vec{\omega}$  – вектора момента импульса и угловой скорости)

Если  $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{L}, \vec{\omega}$ , то  $A, N > 0$ ,  $\vec{M} \uparrow\downarrow \vec{L}, \vec{\omega}$ , то  $A, N < 0$ .

## Потенциальная энергия тела $U$ в поле консервативной силы $\vec{F}$

$U = mgh$  – в поле силы тяжести,  $h$  – высота над нулевым уровнем,

$U = \frac{kx^2}{2}$  – в поле силы упругости,  $x, k$  – деформация и жестк. пружины.

Связи консервативной силы  $\vec{F}(x, y, z)$  и потенциальной энергии  $U(x, y, z)$  тела в поле этой силы

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \vec{F} = -\left(\vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}\right);$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

## Кинетическая энергия

$T = \frac{mv^2}{2}$  – поступательного движения тела со скоростью  $v$ .

$T = \frac{1}{2} J \omega^2$  – вращательное движения вокруг неподвижной оси с частотой  $\omega$ .

$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$  – плоского движения тела, катящегося по плоскости со скоростью центра масс  $v_c$  и вращающегося с частотой  $\omega$  относительно оси, проходящей через центр масс.

$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \Big|_{v_c = \omega r}$  – плоского движение тела, катящегося без

проскальзывания,  $r$  – радиус колеса, цилиндра, шара. Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий тел системы.

**Законы изменения кинетической  $T$ , потенциальной  $U$  и полной механической  $E = U + T$  энергии.** (Другой способ вычисления работы).

$\Delta T = E_2 - T_1 = A_{1,2}$  – работа всех сил;

$-\Delta U = U_1 - U_2 = A_{1,2}$  – работа консервативных(ной) сил(ы);

$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{1,2}$  – работа неконсервативных(ной) сил(ы).

**Консервативные** силы: гравитационная, тяжести, упругости, натяжения, Кулона.

**Неконсервативные** силы: трения, сопротивления, тяги, живых существ, неупругой деформации.

Пример. Для работы **силы трения** ( $A_{1,2} < 0$ ) имеем:  $\Delta E = E_2 - E_1 = A_{1,2} - Q$ , где  $Q > 0$  – выделившееся при трении тепло.

**Законы сохранения кинетической  $T$ , потенциальной энергии  $U$  и полной  $E = U + T$  механической энергии**

Если работа всех сил равна нулю, то  $T_2 = T_1 = \text{const}$ .

Если работа консервативных сил равна нулю, то  $U_1 = U_2 = \text{const}$ .

Если работа неконсервативных сил равна нулю, то  $E_2 = E_1 = \text{const}$ .

**Закон сохранения полной энергии (механической, внутренней и т. д.).**

**Полная энергия** тела или системы тел **не меняется**, а только **переходит от одного тела к другому** или из **одной формы в другую**.

Пример: Остановка тела при ударе.

$T_1 = T_2 + Q$  – переход части энергии упорядоченного движения (кинетической,  $T_1 > T_2$ ) в энергию неупорядоченного (внутреннюю с выделением тепла  $Q > 0$ ).

**Импульс материальной точки (тела) и системы материальных точек**

$\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс м.точки,  $\vec{p} = \sum_{i=1} \vec{p}_i$  – импульс системы материальных точек.

**Закон изменения импульса**

Пусть  $\vec{F}$  – или равнодействующая **сил**, действующих на материальную точку **или** равнодействующая только **внешних сил**, действующих на систему материальных точек;  $\vec{p}$  – или **импульс материальной точки** **или** **импульс системы материальных точек**. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad \text{– импульс сил (внешних сил)}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \quad \text{или} \quad \Delta p_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \quad \text{– площадь под кривой } F_x \text{ от } t \text{ с учетом знака.}$$

Если  $\vec{F} = \text{const}$  или  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{сред}} = \text{const}$ , то

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \Delta t, \quad \Delta p_x = F_x \Delta t.$$

## Законы сохранения импульса

Если материальная точка **свободная** (не действуют силы) или система материальных точек **замкнутая** (не действуют внешние силы); если силы (внешние силы) действуют, но их **равнодействующая** равна нулю; если **равнодействующая** сил (внешних сил) **не равна нулю**, но **ограничена** по величине, а процесс очень **быстрый** ( $\Delta t$  малая величина), то

$$\vec{p} = \text{const} \text{ или } \vec{p}_1 = \vec{p}_2, (\text{точка}) \quad \vec{p} = \text{const} \text{ или } \vec{p}_I = \vec{p}_{II} (\text{система})$$
$$p_x = \text{const} \text{ или } p_{1x} = p_{2x}, (\text{точка}) \quad p_x = \text{const} \text{ или } p_{Ix} = p_{IIx} (\text{система})$$

Отметим, что если импульс системы точек **не меняется**, то импульсы точек системы могут **меняться**.

## Быстрое столкновение двух материальных точек (тел)

При **абсолютно упругом** соударении двух м. т. (тел) полный импульс системы и механическая энергия сохраняются

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$
$$\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1\right) + \left(\frac{m_2 v_2^2}{2} + U_2\right) = \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + U_1'\right) + \left(\frac{m_2 u_2^2}{2} + U_2'\right),$$

где  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, U_1, U_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2, U_1', U_2'$  – скорости и потенциальные энергии 1 и 2 м. т. до и после удара. Чаще всего имеют место равенства:  $U_1 = U_1', U_2 = U_2'$ .

При **абсолютно неупругом** (после удара тела двигаются вместе  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$ ) соударении двух м. т. (тел) полный импульс системы сохраняется, а механическая энергия уменьшается.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$
$$\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1\right) + \left(\frac{m_2 v_2^2}{2} + U_2\right) > \left(\frac{m_1 u^2}{2} + U_1'\right) + \left(\frac{m_2 u^2}{2} + U_2'\right).$$

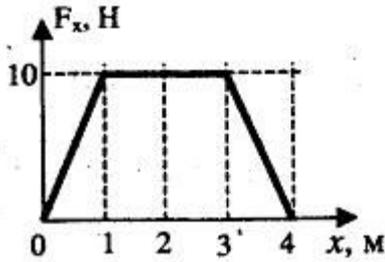
При **относительно (частично) неупругом** (после удара тела двигаются отдельно) соударении двух м. т. (тел) полный импульс системы сохраняется, а механическая энергия уменьшается

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$
$$\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1\right) + \left(\frac{m_2 v_2^2}{2} + U_2\right) > \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + U_1'\right) + \left(\frac{m_2 u_2^2}{2} + U_2'\right).$$

**Момент импульса. Закон сохранения**  
(см. динамику вращательного движения).

## Тесты с решениями

1. Тело движется под действием силы, зависимость проекции которой от координаты представлена на графике:



Работа силы (в Дж) на пути 4 м равна ... **30**

**Решение**

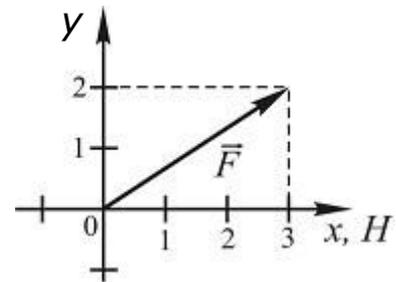
Работа переменной силы на участке  $[x_1, x_2]$  определяется как интеграл:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Используя геометрический смысл определенного интеграла, можно найти работу, которая численно равна площади трапеции:

$$A = \frac{4 + 2}{2} \cdot 10 = 30 \text{ Дж.}$$

2. На рисунке показан вектор силы, действующей на частицу. Работа, совершенная этой силой при перемещении частицы из начала координат в точку с координатами  $(5; 2)$ , равна .... **19 Дж**.



**Решение**

По определению  $d\vec{A} = \vec{F} d\vec{r}$ . С учетом того, что  $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = \text{const}$  (см. рис.),

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = 3(5 - 0) + 2(2 - 0) = 19 \text{ Дж.}$$

3. Частица совершила перемещение по некоторой траектории из точки  $M(3, 2)$  в точку  $N(2, -3)$ . При этом на нее действовала сила  $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$  (координаты точек и сила  $\vec{F}$  заданы в единицах СИ). Работа, совершенная силой  $\vec{F}$ , равна .. **21 Дж**.

**Решение**

По определению  $d\vec{A} = \vec{F} d\vec{r}$ . С учетом того, что  $\vec{F} = \text{const}$ ,

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = 4(2 - 3) + (-5)(-3 - 2) = 21 \text{ Дж.}$$

4. Материальная точка массой  $m = 100$  г начинает двигаться под действием силы  $\vec{F} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$  (Н). Если зависимость радиус-вектора материальной точки от времени имеет вид  $\vec{r} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$  (м), то мощность (Вт), развиваемая силой в момент времени  $t = 1$  с равна ... **12**

**Решение**

Мощность, развиваемая силой в некоторый момент времени, равна

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

где  $\vec{v}$  – скорость материальной точки. По определению

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}, \quad \text{т. е. } v_x = 2t, v_y = 3t^2.$$

Так как  $\vec{F}\vec{v} = F_x v_x + F_y v_y$ , то

$$N(t) = 3t \cdot 2t + 2t^2 \cdot 3t^2 = 6t^2 + 6t^4,$$

$$N(1) = 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^4 = 12 \text{ Вт.}$$

5. Тело массы  $m = 100$  г бросили с поверхности земли с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Если пренебречь сопротивлением воздуха, средняя мощность, развиваемая силой тяжести за время падения тела на землю, равна ... **0**

**Решение**

По определению средняя мощность, развиваемая силой за некоторый промежуток времени, равна отношению работы, совершаемой силой за рассматриваемый промежуток времени, к длительности этого промежутка

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Так как сила тяжести – консервативная сила, и потенциальная энергия тела, поднятого над землей на не очень большую высоту равна  $U = mgh$ , где  $h$  – высота, то

$$A = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = mgh_2 - mgh_1 = 0,$$

так как по условию задачи  $h_2 = h_1$  (поверхность Земли). Следовательно, и  $N = 0$ .

6. Потенциальная энергия частицы задается функцией  $U = -3xy^2z$ .  $F_y$  – компонента (в Н) вектора силы, действующей на частицу в точке  $A(3, 1, 2)$ , равна ... **36**. (Функция  $U$  и координаты точки  $A$  заданы в единицах СИ.)

**Решение**

Связь между потенциальной энергией частицы и соответствующей ей потенциальной силой имеет вид  $\vec{F} = -\text{grad}U$ , или

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Таким образом,

$$F_y(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(-3xy^2z) = 6xyz,$$

$$F_y(3,1,2) = 6xyz = 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 36 \text{ Н.}$$

7. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле задана функцией  $U = -x^2 - y^2 + z^2$ . Работа потенциальной силы (в Дж) по перемещению частицы из точки  $B(1, 1, 1)$  в точку  $C(2, 2, 2)$  равна ... **3**. (Функция  $U$  и координаты точки  $A$  заданы в единицах СИ.)

**Решение**

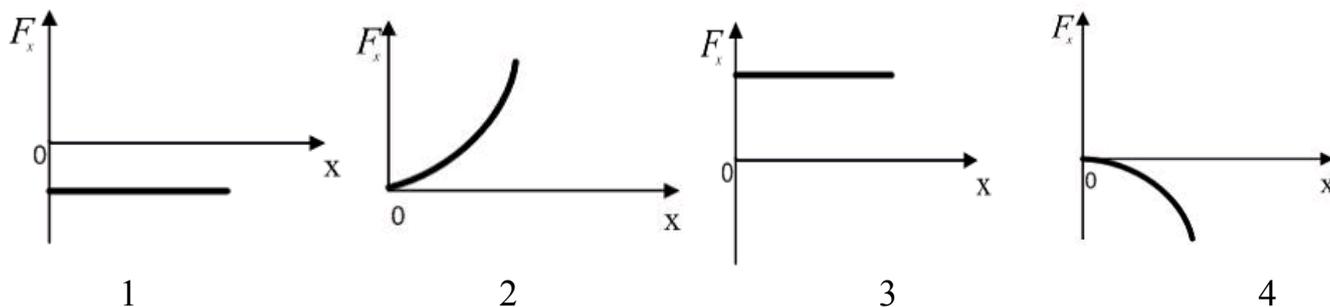
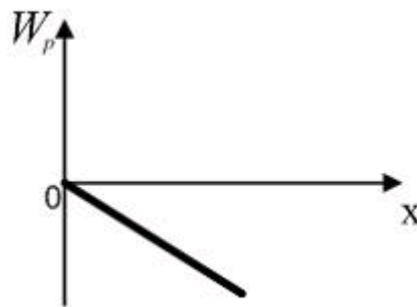
Работа потенциальной силой совершается за счет убыли потенциальной энергии частицы:

$$A_{1,2} = -\Delta U = U_1 - U_2 = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2).$$

Тогда

$$A_{1,2} = (-1^2 - 1^2 + 1^2) - (-2^2 - 2^2 + 2^2) = -1 + 4 = 3 \text{ Дж.}$$

8. В потенциальном поле сила  $\vec{F}$  пропорциональна градиенту потенциальной энергии  $W_p$ . Если график зависимости потенциальной энергии от координаты  $X$  приведен на рисунке, то зависимость проекции силы  $F_x$  на ось  $X$  верно показана на...**3** графике.



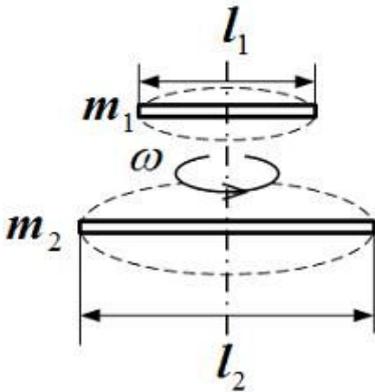
## Решение

Так как

$$F_x = -\frac{dW_p}{dx},$$

и производная  $dW_p/dx$  линейно убывающей функции  $W_p$  является отрицательной константой, то правильный график – 3.

9. Для того чтобы раскрутить стержень массы  $m_1$  и длины  $l_1$  (см. рисунок) вокруг вертикальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину, до угловой скорости  $\omega$ , необходимо совершить работу  $A_1$ .



Для того чтобы раскрутить до той же угловой скорости стержень массы  $m_2 = 2m_1$  и длины  $l_2 = 2l_1$ , необходимо совершить работу в **..8 раз бóльшую**, чем  $A_1$ .

## Решение

Совершенная работа равна приращению кинетической энергии вращательного движения стержня

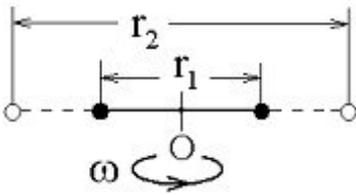
$$A_1 = T_2 - T_1 = \frac{J_1 \omega^2}{2} - 0 = \frac{J_1 \omega^2}{2}, \quad J_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12},$$

$$A_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2} - 0 = \frac{J_2 \omega^2}{2}, \quad J_2 = \frac{m_2 l_2^2}{12} = \frac{2m_1 (2l_1)^2}{12} = 8 \frac{m_1 l_1^2}{12} = 8J_1.$$

Следовательно,

$$A_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2} = 8 \frac{J_1 \omega^2}{2} = 8A_1.$$

10. Два маленьких массивных шарика закреплены на невесомом длинном стержне на расстоянии  $r_1$  друг от друга. Стержень может вращаться без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей посередине между шариками. Стержень раскрутили из состояния покоя до угловой скорости  $\omega$ , при этом была совершена работа  $A_1$ . Шарика раздвинули симметрично на расстояние  $r_2 = 2r_1$  и раскрутили до той же угловой скорости.



При этом была совершена работа ...

$$A_2 = A_1/3 \quad A_2 = 2A_1 \quad A_2 = 4A_1 \quad A_2 = A_1/4$$

### Решение

Совершенная работа равна приращению кинетической энергии вращательного движения стержня

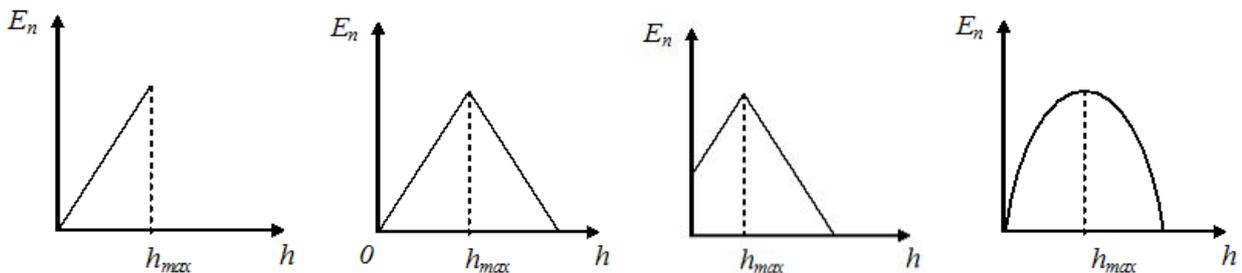
$$A_1 = \frac{J_1 \omega^2}{2} - 0 = \frac{J_1 \omega^2}{2}, \quad J_1 = m \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + m \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 = m \frac{r_1^2}{2},$$

$$A_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2} - 0 = \frac{J_2 \omega^2}{2}, \quad J_2 = 2m \left(\frac{r_2}{2}\right)^2 = 2m \frac{(2r_1)^2}{4} = m \frac{4r_1^2}{2} = 4J_1$$

Следовательно,

$$A_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2} = 4 \frac{J_1 \omega^2}{2} = 4A_1.$$

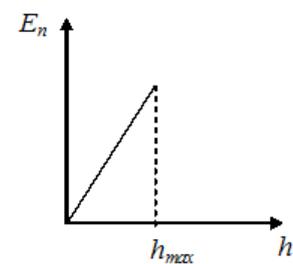
11. График зависимости потенциальной энергии тела, брошенного с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, от высоты подъема имеет вид, показанный на рисунке



### Решение

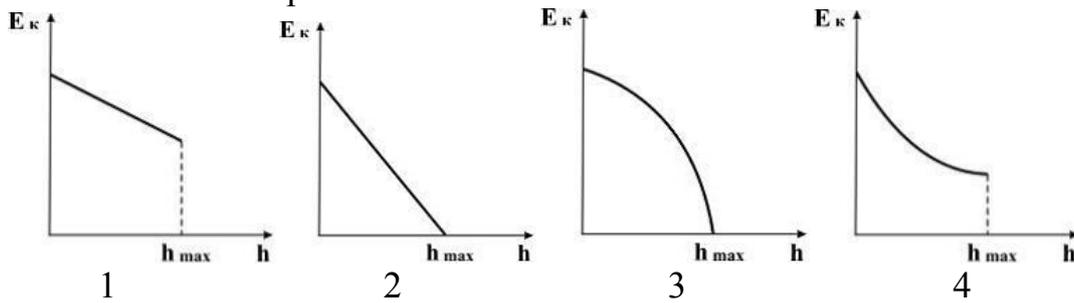
Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести

$$E_n = mgh.$$



Для тела, брошенного под углом к горизонту и упавшего на землю, график зависимости потенциальной энергии от высоты подъема имеет вид, представленный на данном рисунке, т.к. сначала  $h$  и  $E_n$  растут до максимума, а потом уменьшаются до нуля.

12. График зависимости кинетической энергии тела, брошенного с поверхности земли под некоторым углом к горизонту от высоты подъема, имеет вид, показанный на рис. ...1



**Решение**

Так единственная сила, действующая на тело, есть консервативная сила тяжести, то имеет место закон сохранения полной механической энергии

$$E_2 - E_1 = A^{\text{неконс}} = 0.$$

Здесь

$$E = E_k + E_n, \quad E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_n = mgh.$$

Тогда, сравнивая начальный и произвольный момент времени, имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Следовательно,

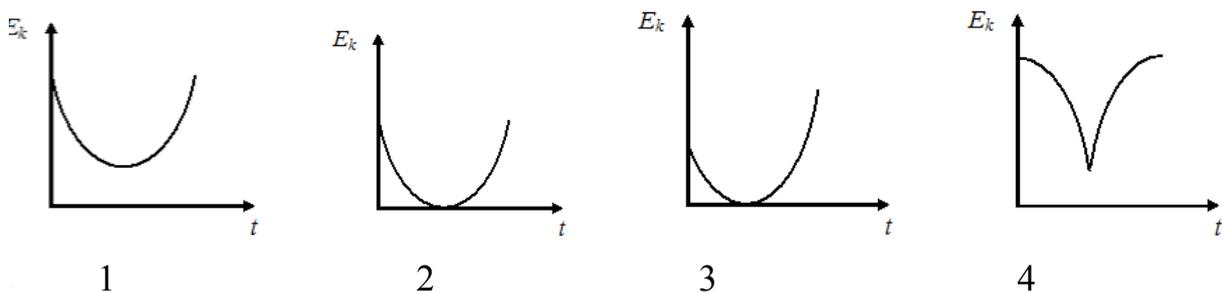
$$E_k(h) = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh,$$

т. е.  $E_k(h)$  — линейно-убывающая функция  $h$ . Причем, если  $h = h_{\text{max}}$  (в верхней точке движения), то

$$E_k(h_{\text{max}}) = \frac{mv_{0x}^2}{2} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \neq 0.$$

(Исключение  $\alpha = 90^\circ$ . В этом случае в точке максимального подъема кинетическая энергия (и скорость) равны нулю.) Таким образом, правильный график зависимости (в общем случае) показан на первом рисунке.

13. График зависимости кинетической энергии от времени для тела, брошенного с поверхности земли под некоторым углом к горизонту, имеет вид, показанный на рис. ...1



### Решение

Так как даже в верхней точке траектории у тела имеется горизонтальная составляющая скорости, то кинетическая энергия его не равна нулю на любой точке траектории. (2 и 3 графики не верны).

На последнем графике существует точка, где производная  $dE_k/dt$  слева не равна производной справа (разрыв) и  $d^2E_k/dt^2 < 0$  (выпуклая функция) на всем временном промежутке. Для кинетической энергии тела имеем

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = m \frac{v_x^2 + v_y^2}{2},$$

где  $v_x$  и  $v_y$  – проекции скорости тела на оси OX и OY соответственно. Если тело брошено под углом к горизонту, то  $v_x = v_{0x}$ ,  $v_y = v_{0y} - gt$  и

$$E_k = \frac{m(v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2)}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{2mv_{0y}g}{2}t + \frac{mg^2}{2}t^2,$$

$$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{2mv_{0y}g}{2} + mg^2t, \quad \frac{d^2E_k}{dt^2} = mg^2.$$

Очевидно, что  $dE_k/dt$  – непрерывная функция от  $t$ , а  $d^2E_k/dt^2 > 0$ . Любой критерий позволяет утверждать, что правильный график – первый.

14. Тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине с жесткостью  $k$ , может без трения двигаться по горизонтальной поверхности (пружинный маятник).

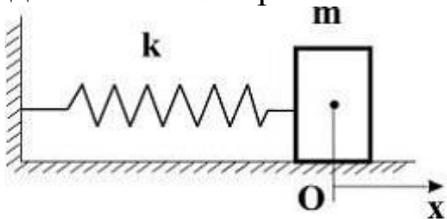
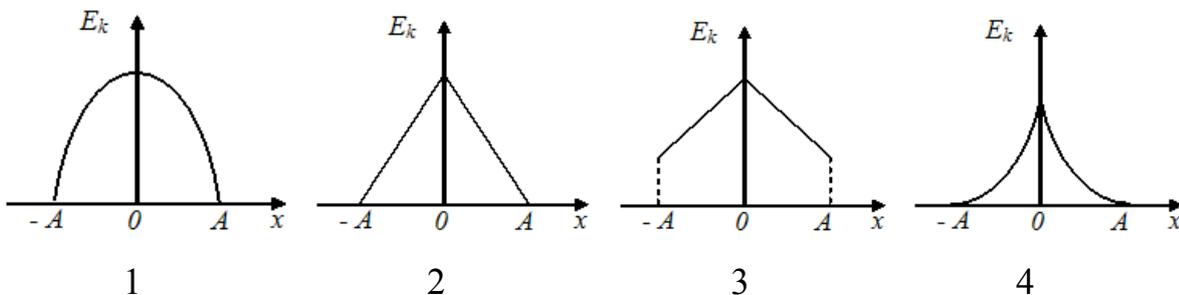


График зависимости кинетической энергии тела от величины его смещения из положения равновесия имеет вид, показанный на рисунке ...1



### Решение

Так как единственная сила, действующая на тело, есть консервативная сила упругости, то имеет место закон сохранения полной механической энер-

гии. Дополнительно предполагаем, что первоначально тело отклонили от положения равновесия на  $x = A$  и отпустили ( $v = 0$ ).

$$E_2 - E_1 = A^{\text{неконс}} = 0.$$

Здесь

$$E = E_k + E_n, \quad E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_n = \frac{kx^2}{2}.$$

Тогда

$$0 + \frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Следовательно,

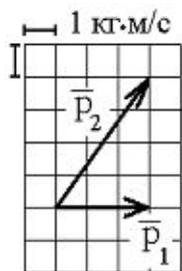
$$E_k(x) = \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}(A^2 - x^2).$$

Для оценки поведения данной функции рассмотрим ее вторую производную.

$$E_k''(x) = -k.$$

Следовательно, это выпуклая функция, что соответствует первому рисунку.

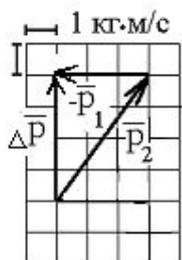
15. Теннисный мяч летел с импульсом  $\vec{p}_1$  в горизонтальном направлении, когда теннисист произвел по мячу резкий удар длительностью  $\Delta t = 0,1$  с. Изменившийся импульс мяча стал равным  $\vec{p}_2$  (масштаб указан на рисунке).



Средняя сила удара равна ... **40Н**

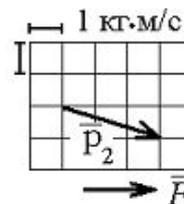
- 40 Н
- 30 Н
- 0,4 Н
- 0,2 Н

**Решение**



Изменение импульса мяча  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$ . Из построения следует, что  $|\Delta \vec{p}|$  — катет в прямоугольном треугольнике, равный  $|\Delta \vec{p}| = 4$  кг·м/с (см. рис. 4 клеточки). Для  $\vec{F} = \text{const}$ ,  $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$  и  $F = |\Delta \vec{p}| / \Delta t = 4 / 0,1 = 40$  Н.

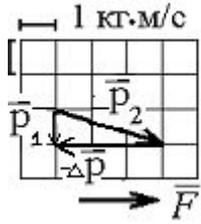
16. На теннисный мяч, который летел с импульсом  $\vec{p}_1$ , на короткое время  $\Delta t = 0,01$  с подействовал порыв ветра с постоянной силой  $F = 300$  Н, и импульс мяча стал равным  $\vec{p}_2$  (масштаб и направление указаны на рисунке). Величина импульса  $p_1$  была равна ...



- 33,2 кг·м/с; 6,2 кг·м/с; 6,1 кг·м/с; **1 кг·м/с**; 5 кг·м/с

**Решение**

Так как  $\vec{F} = \text{const}$ , то  $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ ,  $|\Delta\vec{p}| = F \cdot \Delta t = 300 \cdot 0,01 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$  (т. е. 3 клеточки) и  $\Delta\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{F}$ .

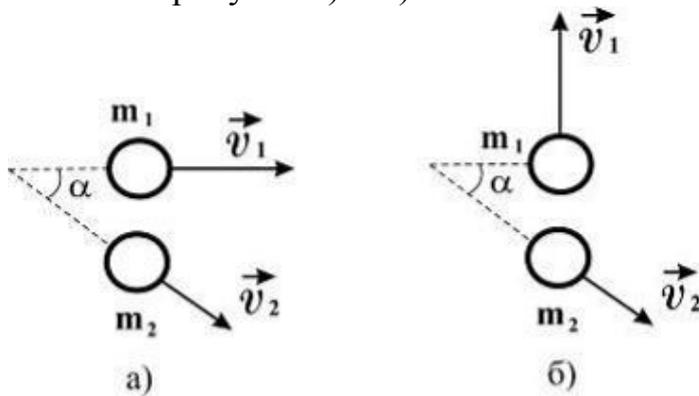


С другой стороны  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ , т.е.  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\Delta\vec{p})$ . Построим  $\vec{p}_1$ . Из построения следует, что  $p_1$  занимает одну клеточку, т. е.  $p_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

17. Шар массы  $m_1$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , налетает на покоящийся шар массы  $m_2$ .



Могут ли после соударения скорости шаров,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  иметь направления, показанные на рисунке а) и б)?



могут в случае б)

могут в случае а)

могут в обоих случаях

не могут ни в одном из указанных случаев

**Решение**

Считаем, что удар был кратковременным, поэтому имеет место закон сохранения импульса. Тогда

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

Так как левый вектор в равенстве направлен по условиям задачи по горизонтали, то и сумма векторов в правой части должна давать горизонтальный вектор. Очевидно, что для рисунка а) это невозможно. Правильный ответ – первый.

18. На неподвижный бильярдный шар налетел другой такой же со скоростью  $v = 1$  м/с. После удара шары разлетелись под углом  $90^\circ$  так, что импульс одного шара  $P_1 = 0,3$  кг·м/с, а другого  $P_2 = 0,4$  кг·м/с. Массы шаров равны ...

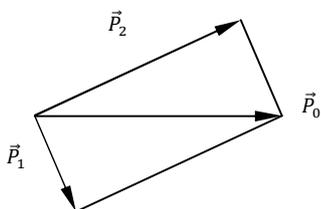
- ✔ 0,5 кг
- 0,2 кг
- 1 кг
- 0,1 кг

**Решение**

Считаем, что удар был кратковременным и, поэтому, имеет место закон сохранения импульса. Тогда

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2.$$

Проведем сложение векторов (уравнение закона сохранения импульса) методом параллелограмма. Пусть  $\vec{P}_0 = m\vec{v}$ ,  $\vec{P}_1 = m\vec{v}_1$ ,  $\vec{P}_2 = m\vec{v}_2$



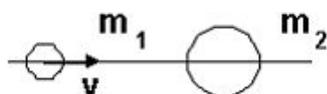
Так как параллелограмм – прямоугольник, то запишем теорему Пифагора

$$P_0^2 = P_1^2 + P_2^2.$$

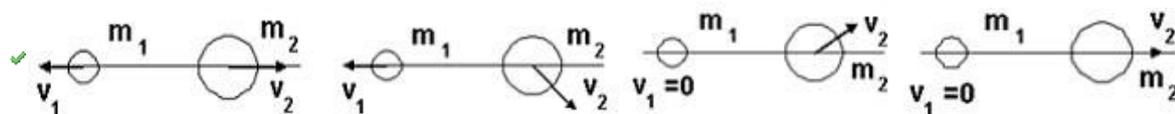
Следовательно,

$$m = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}{v} = \frac{\sqrt{0,3^2 + 0,4^2}}{1} = \sqrt{0,25} = 0,5 \text{ кг.}$$

19. Шар массы  $m_1$ , имеющий скорость  $v$ , налетает на неподвижный шар массы  $m_2$  >  $m_1$ :



После соударения шары будут двигаться так, как показано на рисунке ...



**Решение**

Считаем, что удар был кратковременным и, поэтому, имеет место закон сохранения импульса, а так же упругим и, поэтому, имеет место закон сохранения энергии. (Рассмотрим только кинетическую энергию, так как потенциальная не меняется при ударе.)

Тогда

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2, \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Импульс до удара направлен по горизонтали слева направо. Значит второй и третий рисунки неправильны.

На четвертом рисунке импульс одной частицы целиком передан импульсу другой. Запишем закон сохранения импульса и энергии системы частиц:

$$m_1 v = m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Решением последних уравнений являются равенства:  $v_2 = v$  и  $m_1 = m_2$ .

По условию задачи  $m_1 > m_2$ , т. е. четвертый рисунок также неправильный.

Следовательно, только первый рисунок движения частиц после удара не противоречит законам сохранения

**20.** Горизонтально летящая пуля пробивает брусок, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности. В системе «пуля – брусок» ...

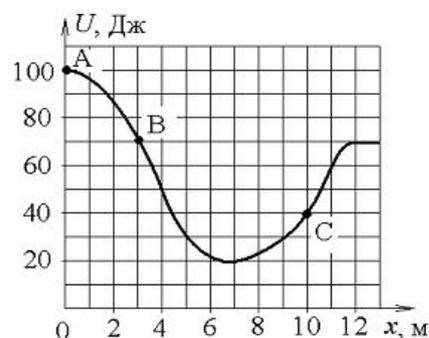
- ✓ импульс сохраняется, механическая энергия не сохраняется
- импульс сохраняется, механическая энергия сохраняется
- импульс не сохраняется, механическая энергия сохраняется
- импульс не сохраняется, механическая энергия не сохраняется

### Решение

В горизонтальном направлении (направление движения) на систему не действуют никакие силы. Значит, имеет место закон сохранения импульса.

При пробивании пулей бруска на оба тела действуют неконсервативные силы неупругой (необратимой) деформации, работа которых не равна нулю (тела деформируются). Следовательно, механическая энергия не сохраняется (уменьшается).

**21.** Небольшая шайба начинает движение без начальной скорости по гладкой ледяной горке из точки *A*. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии шайбы от координаты *x* изображена на графике  $U(x)$ . Кинетическая энергия шайбы в точке *C* ....., чем в точке *B*.



- ✓ в 2 раза больше
- в 2 раза меньше
- в 1,75 раза больше
- в 1,75 раза меньше

### Решение

Так как на шайбу действуют только консервативные силы, то имеет место закон сохранения механической энергии. В точке  $A$  шайба имеет только потенциальную энергию.

Приравняем энергию в т.  $A$  к энергии в т.  $B$  и т.  $C$

$$U_A = T_B + U_B \text{ и } U_A = T_C + U_C.$$

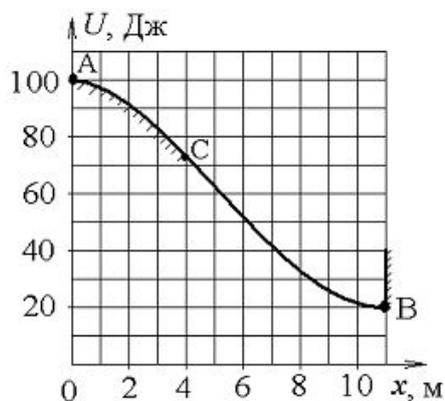
Отсюда

$$T_B = U_A - U_B = 100 - 70 = 30 \text{ Дж},$$

$$T_C = U_A - U_C = 100 - 40 = 60 \text{ Дж}.$$

Следовательно, кинетическая энергия в точке  $C$  в 2 раза больше, чем в точке  $B$ .

22. С ледяной горки с небольшим шероховатым участком  $AC$  из точки  $A$  без начальной скорости скатывается тело. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии шайбы от координаты  $x$  изображена на графике  $U(x)$ . При движении тела сила трения совершила работу  $A_{тр} = 20$  Дж. После абсолютно неупругого удара тела со стеной в точке  $B$  выделилось ...



- 120 Дж тепла
- 80 Дж тепла
- 100 Дж тепла
- ✓ 60 Дж тепла

**Примечание.** В условии задачи содержится ошибка:  $A_{тр} = -20$  Дж, а не 20 Дж.

### Решение

В точке  $A$  шайба имеет только потенциальную энергию.

$$E_A = U_A = 100 \text{ Дж}.$$

Так как на шайбу на участке  $AC$  действует неконсервативная сила трения, то механическая энергия шайбы уменьшается на величину модуля работы силы трения

$$E_C - E_A = E_C - U_A = A_{тр} \text{ или } E_C = U_A + A_{тр} = 100 + (-20) = 80 \text{ Дж}.$$

Так как на шайбу на участке  $CB$  действуют только консервативные силы, то имеет место закон сохранения механической энергии

$$E_B(\text{до}) = E_C = 80 \text{ Дж}.$$

В точке  $B$  шайба в процессе абсолютно неупругого удара останавливается, т.е. теряет всю кинетическую энергию упорядоченного движения и

$$E_B(\text{после}) = U_B + 0 = 20 \text{ Дж.}$$

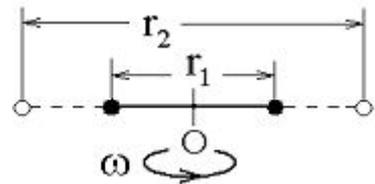
Кинетическая энергия упорядоченного движения (движение шайбы как целое) переходит в кинетическую энергию неупорядоченного теплового движения атомов шайбы, т.е. выделяется тепло  $Q$ . Вследствие закона сохранения полной энергии имеем

$$E_B(\text{до}) = E_B(\text{после}) + Q$$

или

$$Q = E_B(\text{до}) - E_B(\text{после}) = 80 - 20 = 60 \text{ Дж.}$$

**23.** Два маленьких массивных шарика закреплены на невесомом длинном стержне на расстоянии  $r_1$  друг от друга, как показано на рисунке. Стержень вращается без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей посередине между шариками, с угловой скоростью  $\omega_1$ . Если шары раздвинуть симметрично на расстояние  $r_2 = 2r_1$ , то угловая скорость  $\omega_2$  будет равна ...



✓  $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$      $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$      $\omega_2 = 4\omega_1$      $\omega_2 = 2\omega_1$

### Решение

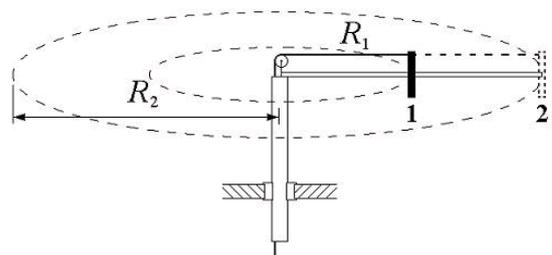
Так как проекция момента внешних, раздвигающих шары по горизонтали сил на вертикальную ось вращения равна нулю  $M_z = 0$ , то имеет место закон сохранения проекции момента импульса при переменном моменте инерции

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

здесь  $J$  – момент инерции шариков относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг этой оси. Отсюда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{4}\omega_1.$$

**24.** Вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega_1$  свободно вращается система из невесомого стержня и массивной шайбы, которая удерживается нитью на



расстоянии  $R_1$  от оси вращения. Отпустив нить, шайбу перевели в положение 2, и она стала двигаться по окружности радиусом  $R_2 = 2R_1$ . Отношение кинетических энергий шайбы в положениях 2 и 1,  $W_2/W_1$ , равно

- 4
- ✓ 1/4
- 1/2
- 2

### Решение

Считаем, что шайба и невесомый стержень свободно по инерции вращаются вокруг неподвижной оси. Модуль момента равнодействующей сил, приложенных к шайбе, равен

$$M = rF \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между радиус-вектором, направлен от оси к шайбе, и равнодействующей сил трения и натяжения, направленной от шайбы к оси, т.е.  $\alpha = 180^\circ$ . Силы, действующие по вертикали, уравновешены. Тогда

$$M = rF \sin 180^\circ = 0.$$

Так как  $M = 0$ , то

$$\frac{dL}{dt} = M = 0,$$

т. е. имеет место закон сохранения момента импульса. Для вращения вокруг неподвижной оси момент импульса равен

$$L = J\omega = \text{const}$$

и, тогда,

$$J_2\omega_2 = J_1\omega_1$$

или

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2}$$

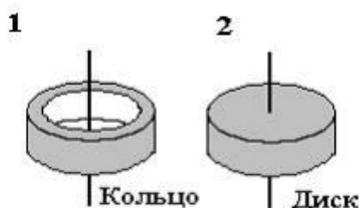
Так как кинетическая энергия вращения материальной точки, вращающейся с частотой  $\omega$  равна

$$W = \frac{J\omega^2}{2},$$

а момент инерции  $J = mR^2$ , то

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{J_2 \omega_2^2 \cdot 2}{J_1 \omega_1^2 \cdot 2} = \frac{J_2 J_1^2}{J_1 J_2^2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{mR_1^2}{mR_2^2} = \frac{R_1^2}{(2R_1)^2} = \frac{1}{4}.$$

25. На рисунке показаны тела одинаковой массы и размеров, вращающиеся вокруг вертикальной оси с одинаковой частотой. Момент импульса первого тела  $L_1 = 0,1$  Дж·с. Если  $m = 1$  кг,  $R = 10$  см, то кинетическая энергия второго тела (в мДж) равна ... **250**



### Решение

Моменты инерции  $J_1$  и импульса  $L_1$  кольца, вращающегося относительно указанной на рисунке оси с частотой  $\omega$ , равны, соответственно,

$$J_1 = mR^2, L_1 = J_1 \omega.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{L_1}{J_1}.$$

Момент инерции диска  $J_2$  и кинетическая энергия  $W_2$  его вращательного движения с частотой  $\omega$  равны, соответственно,

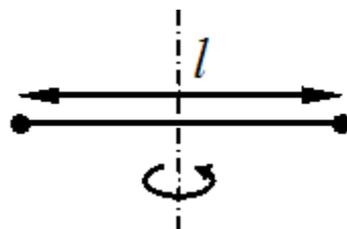
$$J_2 = \frac{mR^2}{2} = \frac{J_1}{2}, W_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2}.$$

Следовательно, имеем

$$W_2 = \frac{J_2 \omega^2}{2} = \frac{J_1 \omega^2}{2 \cdot 2} = \frac{J_1}{4} \left( \frac{L_1}{J_1} \right)^2 = \frac{L_1^2}{4J_1} = \frac{L_1^2}{4mR^2} = \frac{0,1^2}{4 \cdot 1 \cdot (0,1)^2} = \frac{1}{4} \text{ Дж.}$$

$$W_2 = 250 \text{ мДж.}$$

26. На концах невесомого стержня длины  $l$  закреплены два маленьких массивных шарика. Стержень может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Стержень раскрутили до угловой скорости  $\omega_1$ . Под действием трения стержень остановился, при этом выделилось 4 Дж теплоты. Если стержень раскрутить до угловой скорости  $\omega_2 = 0,5\omega_1$ , то при остановке стержня выделится количество теплоты (в Дж), равное ... **1**



### Решение

Согласно закону изменения полной механической энергии (или кинетической энергии, так как потенциальная в данном процессе не меняется)

$$Q_1 = -A_1 = T_1 - T_2 = \frac{J\omega_1^2}{2} - 0 = \frac{J\omega_1^2}{2}, J = \frac{ml^2}{12},$$

$$Q_2 = \frac{J\omega_2^2}{2} = \frac{J(0,5\omega_1)^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{J\omega_1^2}{2} = \frac{1}{4} Q_1.$$

Следовательно,

$$Q_2 = \frac{1}{4} Q_1 = \frac{4}{4} = 1 \text{ Дж.}$$

27. Сплошной цилиндр и шар, имеющие одинаковые массы и радиусы, вкатываются без проскальзывания с одинаковыми скоростями на горку. Если трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то отношение высот  $h_1/h_2$ , на которые смогут подняться эти тела, равно ...

✔ 15/14

5/4

3/4

1

### Решение

В рассматриваемой системе «тело, горка, Земля» действуют не только консервативные силы тяжести и нормальная составляющая реакции опоры, но и неконсервативная сила трения. Тогда

$$E = T + U, T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, U = mgh,$$
$$\Delta E = E_2 - E_1 = A^{\text{трения}},$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс,  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг этой оси,  $v = v_c$  – скорость центра масс,  $h$  – высота, на которую сможет подняться тело относительно основания горки. Так как отсутствует проскальзывание, то  $A^{\text{трения}} = 0$  и  $\omega = v_c/R$ .

Тогда

$$\frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + 0 = 0 + mgh.$$

Подставляя  $\omega = v_c/R$ , находим величину  $h$ :

$$h = \frac{v_c^2}{2g} \left( 1 + \frac{J}{mR^2} \right).$$

Для сплошного цилиндра и шара имеем:

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2, \quad J_2 = \frac{2}{5} mR^2,$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{v_c^2}{2g} \left( 1 + \frac{J_1}{mR^2} \right)}{\frac{v_c^2}{2g} \left( 1 + \frac{J_2}{mR^2} \right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14}.$$

**Примечание.** Трением в данной задаче пренебречь нельзя, так как в противном случае тело просто не будет катиться, а будет скользить по наклонной плоскости.

**28.** Сплошной и полый цилиндры, имеющие одинаковые массы и радиусы, скатываются без проскальзывания с горки с одной и той же высоты. Если трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то отношение скоростей  $v_1/v_2$ , которые будут иметь эти тела у основания горки, равно ...

✓  $\sqrt{4/3}$   
 $\sqrt{15/4}$   
 $\sqrt{10/7}$   
 1

### Решение

В рассматриваемой системе «тело, горка, Земля» действуют не только консервативные силы тяжести и нормальная составляющая реакции опоры, но и неконсервативная сила трения. Тогда

$$E = T + U, \quad T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad U = mgh$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A^{\text{трения}}$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс,  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг этой оси,  $v = v_c$  – скорость центра масс,  $h$  – высота, на которую сможет подняться тело относительно основания горки. Так как отсутствует проскальзывание, то  $A^{\text{трения}} = 0$  и  $\omega = v_c/R$ .

Тогда

$$0 + mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + 0.$$

Подставляя  $\omega = v_c/R$ , находим величину  $v_c$ :

$$gh = \frac{v_c^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mR^2} \right), \quad v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{J}{mR^2}}}.$$

Для сплошного и полого цилиндра имеем:

$$J_1 = \frac{1}{2}mR^2, \quad J_2 = mR^2.$$

Пусть  $v_c = v_1$  для полого и  $v_c = v_2$  для сплошного цилиндра. Тогда

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh \left( 1 + \frac{J_2}{mR^2} \right)}}{\sqrt{\left( 1 + \frac{J_1}{mR^2} \right) 2gh}} = \sqrt{\frac{1+1}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

**Примечание.** Трением в данной задаче пренебречь нельзя, так как в противном случае тело просто не будет катиться, а будет скользить по наклонной плоскости.

**29.** Обруч скатывается без проскальзывания с горки высотой 2,5 м. Скорость обруча (в м/с) у основания горки при условии, что трением можно пренебречь, равна ...

✓ 5

$$5\sqrt{2}$$

$$10/\sqrt{2}$$

$$5/\sqrt{2}$$

**Решение**

В рассматриваемой системе «тело, горка, Земля» действуют не только консервативные силы тяжести и нормальная составляющая реакции опоры, но и неконсервативная сила трения. Тогда

$$E = T + U, T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, U = mgh,$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A^{\text{трения}}.$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс,  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг этой оси,  $v = v_c$  – скорость центра масс,  $h$  – высота, на которую сможет подняться тело относительно основания горки. Так как отсутствует проскальзывание, то  $A^{\text{трения}} = 0$  и  $\omega = v_c/R$ .

Тогда

$$0 + mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + 0.$$

Подставляя  $\omega = v_c/R$ , находим величину  $v_c$ :

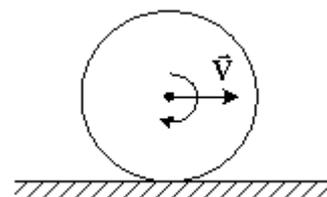
$$gh = \frac{v_c^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mR^2} \right), \quad v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{J}{mR^2}}}.$$

Учитывая, что момент инерции обруча  $J = mR^2$ , получаем

$$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{mR^2}{mR^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 1}} = \sqrt{gh} = \sqrt{10 \cdot 2,5} = \sqrt{25} = 5 \text{ м/с}.$$

**Примечание.** Трением в данной задаче, пренебречь нельзя, так как в противном случае тело просто не будет катиться, а будет скользить по наклонной плоскости.

30. Обруч массой  $m = 0,3$  кг и радиусом  $R = 0,5$  м привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж, и опустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если обруч начал двигаться без проскальзывания, имея кинетическую энергию вращения 200 Дж, то сила трения совершила работу, равную



- 600 Дж
- ✓ 800 Дж
- 1000 Дж
- 1400 Дж

**Решение**

**Примечание.** Так как тело привели во вращение (энергия вращательного движения  $T_0$ ), а потом опустили на пол (энергия вращательного  $T_1$ , поступательного  $T_2$  движения и потери  $Q$ ), то тело начинает двигаться поступательно, с нулевой начальной скоростью и разгоняется до некоторого фиксированного значения. Это сложный процесс, который невозможно описать в рамках модели абсолютно твердого тела, и который, по-видимому, включает в себя и **потери энергии** на деформацию обруча и на **трение о пол при наличии проскальзы-**

**вания в первоначальный момент.** При дальнейшем движении из-за отсутствия проскальзывания **сила трения работу не производит.**

Если обруч движется без проскальзывания, то кинетическая энергия обруча, двигающегося по полу

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c^2,$$

где  $J = mR^2$ ,  $v_c = \omega R$ . Таким образом

$$T_1 = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2.$$

Таким образом, если  $T_1 = T_2$  и  $T_2 = 200$  Дж, то

$$T = T_1 + T_2 = 200 + 200 = 400 \text{ Дж и}$$

$$Q = T_0 - T = 1200 - 400 = 800 \text{ Дж.}$$

**Примечание.** Физические характеристики диска для решения задачи не нужны.

**31.** Два тела двигались к стенке с одинаковыми скоростями и при ударе остановились. Первое тело катилось, второе скользило. Если при ударе выделилось одинаковое количество тепла, то больше масса тела ...

одинаковы

✔ второго

первого

невозможно определить

### Решение

При ударе часть механической энергии перешла в тепловую. Так как потенциальная энергия в поле тяжести Земли и потенциальная энергия упругой деформации (**считаем**, что тела после удара не поменяли форму) не меняются, то выделившееся тепло – это разница между начальной и конечной кинетической энергией, равной нулю.

Если тело катится, то

$$T_1 = \frac{m_1 v_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad T_1' = 0.$$

Если тело скользит, то

$$T_2 = \frac{m_2 v_c^2}{2}, \quad T_2' = 0.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$T_1 = T_1' + Q_1 = Q_1,$$

$$T_2 = T_2' + Q_2 = Q_2.$$

Так как

$$Q_1 = Q_2,$$

то

$$\frac{m_1 v_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m_2 v_c^2}{2}$$

или

$$(m_2 - m_1) \frac{v_c^2}{2} - \frac{J\omega^2}{2} > 0.$$

Следовательно, масса тела при скольжении  $m_2$  больше массы при качении  $m_1$ .

**32.** Фигурист вращается вокруг вертикальной оси с определенной частотой. Если он прижмет руки к груди, уменьшив тем самым свой момент инерции относительно оси вращения в 2 раза, то ...

частота вращения фигуриста и его кинет. энергия вращения возрастут в 2 раза  
 частота вращения фигуриста возрастет в 2 раза, а его кинет. энергия вращения – в 4 раза

частота вращения фигуриста уменьшится в 2 раза, а его кинет. энергия вращения – в 4 раза

частота вращения фигуриста и его кинет. энергия вращения уменьшатся в 2 раза

### Решение

Так как силы, действующие на фигуриста вертикальны (сила тяжести и нормальная составляющая силы реакции опоры (льда), силой трения о лед пренебрегаем), и их сумма равна нулю, то момент этих сил

$$M = 0.$$

Следовательно, проекция момента импульса на эту ось постоянна

$$L_z = \text{const.}$$

Так как движение фигуриста – вращение вокруг неподвижной оси, то

$$L_z = J\omega_z.$$

Таким образом ( $\omega_z = \pm\omega$ ),

$$J_1\omega_{1z} = J_2\omega_{2z} \rightarrow J_1\omega_1 = J_2\omega_2.$$

По условию задачи  $J_1 = 2J_2$ . Тогда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2} = 2.$$

Отношение кинетических энергий вращательного движения равно

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{J_2 \omega_2^2 / 2}{J_1 \omega_1^2 / 2} = \frac{J_2 \omega_2^2}{J_1 \omega_1^2} = \frac{J_2 (2\omega_1)^2}{2J_2 \omega_1^2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Следовательно, правильное утверждение – первое.

**33.** Человек, стоящий в центре вращающейся скамьи Жуковского, держит в руках длинный шест. Если он повернет шест из вертикального положения в горизонтальное, то ...

- ✔ угловая скорость скамьи и кинетическая энергия уменьшатся
- угловая скорость скамьи уменьшится, кинетическая энергия увеличится
- угловая скорость скамьи увеличится, кинетическая энергия уменьшится
- угловая скорость скамьи и кинетическая энергия увеличатся

**Решение**

Так как внешние силы, действующие на человека и шест вертикальны (сила тяжести и нормальная составляющая силы реакции опоры), и их сумма равны нулю, то момент этих сил (аналогия с предыдущей задачей, как если бы фигуристка разводила руки)

$$M = 0.$$

Следовательно, проекция момента импульса системы тел на эту ось (и сам вектор) постоянны

$$L_z = \text{const.}$$

Так как движение человека и шеста – вращение вокруг неподвижной оси, и момент импульса системы тел равен сумме моментов импульса тел системы, то момент импульса системы тел при вертикальном шесте

$$L_z = J_1 \omega_z = J_1 \omega,$$

где  $J_1$  – момент инерции человека относительно оси вращения. Момент инерции шеста, расположенного на оси вращения равен нулю. Момент импульса системы тел при горизонтальном шесте

$$L'_z = (J_1 + J_2) \omega'_z = (J_1 + J_2) \omega',$$

где  $J_2 > 0$  – момент инерции горизонтального шеста относительно оси вращения. Так как проекция момента инерции системы тел постоянна, то

$$J_1 \omega = (J_1 + J_2) \omega',$$

$$\omega' = \frac{J_1}{J_1 + J_2} \omega < \omega$$

Кинетическая энергия системы тел при вертикальном и горизонтальном шесте

$$T = \frac{J_1 \omega^2}{2},$$

$$T' = \frac{J_1 \omega'^2}{2} + \frac{J_2 \omega'^2}{2} = \frac{J_1 + J_2}{2} \omega'^2 = \frac{J_1 + J_2}{2} \left( \frac{J_1}{J_1 + J_2} \right)^2 \omega^2 = \frac{J_1^2 \omega^2}{2(J_1 + J_2)}$$

$$= \frac{J_1 \omega^2}{2(1 + \frac{J_2}{J_1})} < \frac{J_1 \omega^2}{2} = T.$$

Следовательно, угловая скорость скамьи и кинетическая энергия уменьшаются.

**34.** Постоянная сила 10 Н приложенная по касательной к твердому шару радиусом 1 см, заставила шар совершить один полный оборот вокруг своей оси. Работа этой силы равна то ... **0,628 Дж.**

### Решение

По определению для постоянной проекции момента силы  $M_z = \text{const}$

$$A = M_z \Delta \varphi.$$

Выберем ось  $Z$  вдоль оси вращения шара и рассчитаем момент сил  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$  относительно т.  $O$  (см. рисунок). Тогда направление момента совпадает с осью  $Z$  и

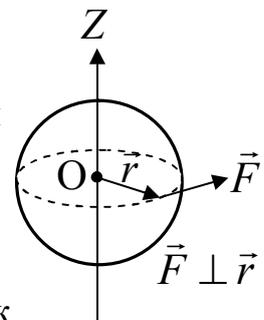
$$M_z = M = Fr \sin \frac{\pi}{2} = Fr.$$

Направление угла поворота шара также совпадает с осью  $Z$  и

$$\Delta \varphi = 2\pi.$$

Подставляя данные значения в выражение для  $A$ , получаем

$$A = M_z \Delta \varphi = Fr \cdot \Delta \varphi = 10 \cdot 0,01 \cdot 2\pi = 0,628 \text{ Дж.}$$



## ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

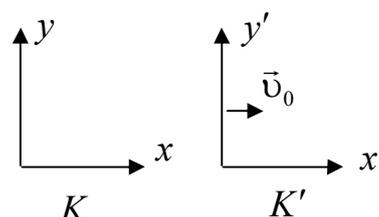
Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (ИСО). Скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источника и приемника света.

### Кинематика

#### Преобразования Лоренца

Если ИСО  $K'$  движется относительно ИСО  $K$  со скоростью  $\vec{v}_0$ , то (оси  $x$  и  $x'$  направлены вдоль  $\vec{v}_0$ , часы в обеих системах включены в момент, когда совпадали начала координат этих систем) координаты положения одного и того же объекта и время совершения одного и того же события в разных ИСО связаны как

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$



Обратные преобразования

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$

Следствия преобразования Лоренца

#### Сокращение длины тела

Наибольшую длину  $l_0$  имеет тело в ИСО, относительно которой оно покоится (собственная длина). В ИСО, относительно которой тело движется со скоростью  $v$ , оно имеет всегда меньшую длину  $l$ , если тело расположено вдоль направления движения. Если поперек – то никакой разницы в измерении длины в разных ИСО нет, т. е.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad l \leq l_0.$$

## Замедление времени процесса

**Наименьший интервал времени**  $\tau_0$  между двумя событиями, происходящими с телом, имеет место в ИСО, относительно которой **оно покоится (собственное время)**. В ИСО, относительно которой **тело движется** со скоростью  $v$ , интервал времени между этими же событиями  $\tau$  всегда **больше**, т. е.

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tau \geq \tau_0.$$

## Сложение скоростей

Пусть  $v$  – скорость тела в ИСО  $K$ , а  $v'$  – скорость тела в ИСО  $K'$ , движущейся относительно первой со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x(x')$ . Тогда

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}, \quad v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c^2}} \quad (\text{Эйнштейн}),$$

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v'_x = v_x - v_0 \quad (\text{Галилей}),$$

где  $v' = \pm v$ ,  $v'_x = \pm v'_x$ .

## Динамика

Для частицы имеющей **ненулевую массу**  $m_0$  (**массу покоя**) и движущейся со скоростью  $v < c$  (в полную энергию **не включается** потенциальная энергия тела):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ — релятивистская масса,}$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ — импульс,} \quad E_0 = m_0 c^2 \text{ — энергия покоя,}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ — полная энергия,}$$

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 \text{ — кинетическая энергия.}$$

Следствие введения массы покоя  $m_0$

**Изменение энергии покоя** (например, нагрев тела) **приводит к изменению его массы покоя**, т. е.

$$\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2.$$

**Связь  $E$  и  $p$ :**

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0 c^2}.$$

**Критерий использования релятивистских формул для случая  $v < c$**

$$v > 0,5c \quad \text{или} \quad T \geq m_0 c^2.$$

Для частицы, **не имеющей  $m_0$  (массу покоя)** и всегда движущейся со скоростью  $v \equiv c$  (в полную энергию **не включается** потенциальная энергия тела):

$$m_0 = 0, \quad p = mc, \quad E_0 = 0, \quad E = T = mc^2.$$

**Связь  $E$  и  $p$ :**

$$E = pc.$$

## Тесты с решениями

1. Скорость релятивистской частицы  $v = 0,8c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Отношение кинетической энергии частицы к ее полной энергии равно ... **0,4**.

### Решение

Полная энергия релятивистской частицы, энергия покоя и кинетическая энергия имеют вид

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad E_0 = m_0 c^2, \quad E_k = E - E_0.$$

Тогда

$$\frac{E_k}{E} = \frac{E - E_0}{E} = 1 - \frac{E_0}{E} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - 0,6 = 0,4.$$

2. Частица движется со скоростью  $0,8c$  ( $c$  – скорость света в вакууме). Тогда ее масса по сравнению с массой покоя изменилась на ... **67 %**.

### Решение

Динамическая масса релятивистской частицы имеет вид

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Тогда относительное изменение массы частицы

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 = 1,67 - 1 = 0,67.$$

Следовательно, масса частицы увеличится на 67 %.

**Примечание.** Решение (см. ниже), данное на сайте [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru) некорректно.

$$\frac{m - m_0}{m} = 1 - \frac{m_0}{m} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - 0,6 = 0,4.$$

3. Нестабильная частица движется со скоростью  $0,6c$  ( $c$  – скорость света в вакууме). Тогда время её жизни в системе отсчета, относительно которой частица движется, увеличится (уменьшится) на ...**25** %.

### Решение

Из преобразований Лоренца следует, что в системе отсчета, относительно которой частица движется со скоростью  $v$ , время ее жизни  $\tau$  больше, чем  $\tau_0$  – время жизни в системе отсчета, относительно которой частица покоится. Тогда

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Относительное изменение времени жизни частицы составит

$$\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{\tau}{\tau_0} - 1 = 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1 = 1,25 - 1 = 0,25.$$

Следовательно, время жизни частицы увеличится на 25%.

**Примечание:** Решение (см. ниже), данное на сайте [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru) некорректно

$$\frac{\tau - \tau_0}{\tau} = 1 - \frac{\tau_0}{\tau} = 1 - \frac{\tau_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\tau_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - 0,8 = 0,2$$

4. Предмет движется со скоростью  $0,6c$  ( $c$  – скорость света в вакууме). Тогда его длина для наблюдателя в неподвижной системе отсчета ... %.

- ✔ уменьшится на 20
- увеличится на 20
- уменьшится на 40
- увеличится на 40

### Решение

**Примечание.** Неподвижная система отсчета – это, видимо, система отсчета относительно которой предмет движется.

Движение макроскопических тел со скоростями, соизмеримыми со скоростью света в вакууме, изучается релятивистской механикой. Одним из следст-

вий преобразований Лоренца является так называемое лоренцево сокращение длины, состоящее в том, что линейные размеры тела сокращаются в направлении движения

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

где  $l_0$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело неподвижно;  $l$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью  $v$ . При этом поперечные размеры тела не изменяются. Относительное изменение длины составит

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - 0,8 = 0,2,$$

т. е. длина уменьшится на 20 %.

5. Релятивистское сокращение длины ракеты составляет 20 %. При этом скорость ракеты равна ...

- 0,6  $c$
- 0,8  $c$
- 0,2  $c$
- 0,4  $c$

### Решение

Одним из следствий преобразований Лоренца является так называемое Лоренцево сокращение длины, состоящее в том, что линейные размеры тела в системе отсчета, относительно которой тело движется, уменьшаются в направлении движения, по сравнению с линейными размерами тела в системе, относительно которой тело неподвижно:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Здесь  $l_0$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело неподвижно;  $l$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью  $v$ . При этом поперечные размеры тела не изменяются. По условию относительное релятивистское сокращение длины ракеты

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 0,2$$

или

$$\frac{l_0 - l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0,2.$$

Решая это уравнение, получаем  $v = 0,6 c$ .

6. Космический корабль летит со скоростью  $v = 0,8 c$  ( $c$  – скорость света в вакууме) в системе отсчета, связанной с некоторой планетой. Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное направлению движения. Длина этого стержня с точки зрения другого космонавта ...

- ✓ равна 1,0 м при любой его ориентации
- изменяется от 1,0 м в положении 1 до 1,67 м в положении 2
- изменяется от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2
- изменяется от 0,6 м в положении 1 до 1,0 м в положении 2

### Решение

**Примечание.** Стержень имеет длину 1 метр, видимо, с точки зрения первого космонавта.

Так как второй космонавт не движется относительно первого, то результаты их измерений идентичны, т. е. длина этого стержня равна 1,0 м при любой его ориентации с точки зрения другого космонавта.

7. Космический корабль летит со скоростью  $v = 0,8 c$  ( $c$  – скорость света в вакууме) в системе отсчета, связанной с некоторой планетой. Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное направлению движения. Длина этого стержня с точки зрения наблюдателя, находящегося на планете, ...

- ✓ изменяется от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2
- изменяется от 1,0 м в положении 1 до 1,67 м в положении 2
- равна 1,0 м при любой его ориентации
- изменяется от 0,6 м в положении 1 до 1,0 м в положении 2

### Решение

Линейные размеры тела в системе отсчета, относительно которой тело движется, уменьшаются в направлении движения, по сравнению с линейными размерами тела в системе, относительно которой тело неподвижно:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Здесь  $l_0$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело неподвижно;  $l$  – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью  $v$ . При этом поперечные размеры тела не изменяются.

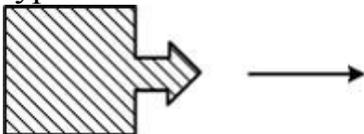
Для космонавта стержень будет иметь метровые размеры  $l_0$  в любом положении. Поскольку с точки зрения наблюдателя на земле стержень (вместе с космонавтом и ракетой) движется относительно него, то в положении 2 (стержень расположен вдоль движения ракеты) его длина для наблюдателя на земле вычисляется как:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l_0 \sqrt{1 - 0,64} = 0,6l_0 = 0,6 \text{ м},$$

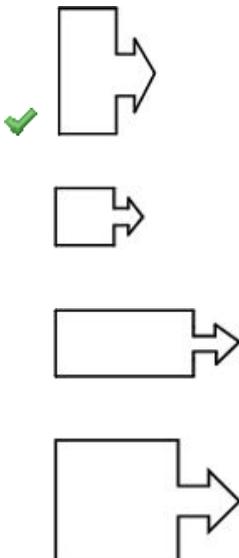
а в положении 1 (поперек) –  $l = l_0 = 1 \text{ м}$ .

Таким образом, длина стержня с точки зрения наблюдателя, находящегося на планете, изменяется от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2.

8. На борту космического корабля нанесена эмблема в виде геометрической фигуры:



Если корабль движется в направлении, указанном на рисунке стрелкой, со скоростью, сравнимой со скоростью света, то в неподвижной системе отсчета эмблема примет форму, указанную на рисунке



## Решение

**Примечание.** Неподвижная система отсчета – это та, относительно которой корабль движется.

Линейные размеры тела в системе отсчета, относительно которой тело движется, уменьшаются в направлении движения, по сравнению с линейными размерами тела в системе, относительно которой тело неподвижно. Поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, поэтому форма тела изменится, как показано на первом рисунке.

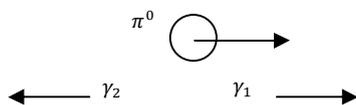
9.  $\pi^0$ -мезон, двигавшийся со скоростью  $0,8c$  ( $c$  – скорость света в вакууме) в лабораторной системе отсчета, распадается на два фотона:  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . В системе отсчета мезона фотон  $\gamma_1$  был испущен вперед, а фотон  $\gamma_2$  – назад относительно направления полета мезона. Скорость фотона  $\gamma_1$  в лабораторной системе отсчета равна ...

- ✔  $1,0 c$
- $+1,8 c$
- $-0,2 c$
- $-1,0 c$

## Решение

Выражение: **скорость фотона в лабораторной системе отсчета** означает нахождение **проекции** скорости фотона на направление скорости мезона, вдоль которой направлена ось ОХ лабораторной системы отсчета.

Фотон является частицей, которая может существовать, только двигаясь со скоростью  $c$ , т. е. со скоростью света в вакууме. Кроме того, согласно одному из постулатов специальной теории относительности – принципу постоянства скорости света – скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и, следовательно, одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому скорость фотона  $\gamma_1$  с учетом направления его движения в лабораторной системе отсчета равна  $1,0 c$ , а скорость фотона  $\gamma_2$  равна  $-1,0 c$ .



10. Относительной величиной является ...

- скорость света в вакууме
- барионный заряд
- длительность события
- электрический заряд

### Решение

Длительность события.

11. Относительно неподвижного наблюдателя тело движется со скоростью  $v$ . Зависимость массы этого тела от скорости при массе покоя  $m_0$  выражается соотношением...

$$m = m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$m = m_0,$$

$$m = m_0 \frac{v}{c},$$

$$m = m_0 \frac{c}{v}.$$

### Решение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

12. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость  $V = 0,4c$  ( $c$  – скорость света в вакууме). В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения  $\beta$ -частицу, скорость которой  $v = 0,75c$  относительно ускорителя. Скорость  $\beta$ -частицы относительно ядра равна ...

✔  $0,5c$

$0,27c$

$0,88c$

$1,64c$

### Решение

Переобозначим скорости в соответствии с выражением для сложения скоростей Эйнштейна (см. теоретический материал).

Пусть ускоритель – неподвижная система отсчета  $K$  и скорость  $\beta$ -частицы относительно нее  $v = 0,75c$ . Пусть ядро – движущаяся система  $K'$  и ее скорость относительно неподвижной системы  $K$  (ускорителя)  $v_0 = 0,4c$ .

Тогда скорость частицы относительно ядра, т. е. относительно движущейся системы отсчета  $K'$  равна

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c^2}}$$

Положительное направление оси  $Ox$  – это направление движения системы  $K'$  (ядра) относительно неподвижной системы  $K$  (ускорителя), т. е. направление скорости ядра  $\vec{v}_0$ . Так как скорость  $\beta$ -частицы  $\vec{v}$  по условию задачи направлена в ту же сторону, то

$$v_x = 0,75c.$$

Тогда

$$v'_x = \frac{0,75c - 0,4c}{1 - \frac{0,75c \cdot 0,4c}{c^2}} = \frac{0,75 - 0,4}{1 - 0,75 \cdot 0,4} c = \frac{0,35}{0,7} c = 0,5c.$$

Следовательно,

$$v' = 0,5c.$$

13. Скорость релятивистской частицы  $v = \sqrt{3/4} c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Отношение кинетической энергии частицы к ее энергии покоя равно..

- ✓ 1
- 2
- 3
- 4

**Решение**

Кинетическая энергия релятивистской частицы  $E_k = E - E_0$ , где

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$E$  – полная энергия частицы, движущейся со скоростью  $v$ ,  $E_0 = m_0 c^2$  – ее энергия покоя. Тогда отношение кинетической энергии частицы к ее энергии покоя

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

14. Тело начало двигаться со скоростью, при которой его масса возросла на 30%. При этом длина тела в направлении движения ...

- ✔ уменьшилась в 1,3 раза
- увеличилась в 1,3 раза
- уменьшилась на 30 %
- увеличилась на 30 %

### Решение

Так как

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

то

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 = 0,3.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{1,3}.$$

Так как

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

то

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - \frac{1}{1,3} = \frac{0,3}{1,3} = \frac{1}{4,3} = 0,23,$$

т. е. длина тела в направлении движения уменьшилось на 23 % или

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{1,3},$$

т. е. уменьшилось в 1,3 раза.

15. Объем воды в Мировом океане равен  $1,37 \cdot 10^9$  км<sup>3</sup>. Если температура воды повысится на 1°C, увеличение массы воды составит.....(Плотность морской воды 1,03 г/см<sup>3</sup>, удельная теплоемкость 4,19 кДж/(кг·К).)

- ✓  $6,57 \cdot 10^7$  кг
- 65,7 т
- 65,7 кг
- $6,57 \cdot 10^{-2}$  кг

### Решение

Из закона взаимосвязи массы и энергии следует, что изменение энергии покоя сопровождается изменением массы покоя тела, причем эти изменения пропорциональны друг другу:  $\Delta E_0 = c^2 \Delta m_0$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Изменение температуры воды в Мировом океане означает, что вода получила количество теплоты, равное  $Q = cm_0 \Delta T = c\rho V \Delta t$ , где  $c$  – удельная теплоемкость воды,  $\rho$  – ее плотность,  $V$  – объем. Тогда увеличение массы воды составит

$$\Delta m_0 = \frac{Q}{c^2} = \frac{c\rho V \Delta t}{c^2} = \frac{4,19 \cdot 10^3 \cdot 1,03 \cdot 10^3 \cdot 1,37 \cdot 10^{18}}{9 \cdot 10^{16}} = 6,57 \cdot 10^7 \text{ кг.}$$

Отметим, что изменение массы составляет порядка  $10^{-12}$  процента, так как

$$m_0 = \rho V = 1,03 \cdot 10^3 \cdot 1,37 \cdot 10^{18} = 1,41 \cdot 10^{21} \text{ кг.}$$

16. Самая близкая к Земле звезда Проксима Центавра – одна из звезд созвездия Альфа Центавра. Расстояние до нее составляет приблизительно 4,3 световых года. Если бы космический корабль летел от Земли к этой звезде со скоростью  $v = 0,95c$  ( $c$  – скорость света в вакууме), то путешествие по земным часам и по часам космонавта продлилось бы ..... соответственно.

- ✓ 4,5 года и 1,4 года
- 1,4 года и 4,5 года
- 4,1 года и 1,3 года
- 1,3 года и 4,1 года

## Решение

Световой год – внесистемная единица длины, применяемая в астрономии; 1 с. г. равен расстоянию, проходимому светом за один год. Длительность путешествия по часам земного наблюдателя:

$$\Delta t = \frac{S}{v} = \frac{4,3 \cdot c \cdot 1}{0,95c} = 4,5 \text{ года.}$$

Длительность путешествия по часам космонавта (собственное время): года.

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 4,5\sqrt{1 - 0,95^2} = 1,4 \text{ года.}$$

*Учебное издание*

**Фишбейн Лев Абрамович**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Механика**

Сборник задач  
для студентов очной, заочной форм обучения  
и дистанционного образования

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать 06.10.12. Формат 60x84/16.  
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,8.  
Тираж 130 экз. Заказ 258.

Издательство УрГУПС  
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66