Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Физика и химия»

Л. А. Фишбейн

ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Механические и электромагнитные колебания и волны

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Физика и химия»

Л. А. Фишбейн

ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Механические и электромагнитные колебания и волны

Сборник задач
для студентов очной, заочной форм обучения
и дистанционного образования

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

УДК 531
Ф 68

Фишбейн, Л. А.

Ф 68 Подготовка к Интернет-экзамену по физике в сфере профессионального образования. Механические и электромагнитные колебания и волны : сб. задач / Л. А. Фишбейн. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012. – 49,[3] с.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов очной и заочной форм обучения к Интернет-экзамену по механическим и электромагнитным колебаниям и волнам в сфере профессионального образования. Содержится теоретический материал и тестовые задания с решениями. Все тесты взяты с сайта www.i-exam.ru. Материал разбит на отдельные темы в соответствии с тематической структурой АПИМ (аттестационно-педагогические и измерительные материалы).

УДК 531

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

Автор: Л. А. Фишбейн, доцент кафедры «Физика и химия», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

Рецензент: В. К. Першин, зав. кафедрой «Физика и химия», д-р физ.-мат. наук, УрГУПС

Оглавление

Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	Федеральный компонент	
ЕН.Ф.03	Физика: физика колебаний и волн: кинематика гармонических колебаний, свойства и распространение электромагнитных волн, в том числе оптического диапазона	400

Тематическая структура АПИМ

N ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	N задания	Тема задания
4	Механические и электромагнитные колебания и волны	17	Свободные и вынужденные колебания
		18	Сложение гармонических колебаний
		19	Волны. Уравнение волны
		20	Энергия волны. Перенос энергии волной

КОДИФИКАТОР

Кодификатор элементов содержания дисциплины «Физика» цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин высшего профессионального образования

В кодификаторе зафиксирована преемственность между содержанием дисциплины «Физика» в государственных образовательных стандартах (ГОС) высшего профессионального образования (ВПО) и аттестационных педагогических измерительных материалах (АПИМ), используемых в рамках Интернет-экзамена в сфере профессионального образования. Кодификатор отражает содержание дисциплины в ГОС и содержит контролируемое содержание дисциплины, перечень контролируемых учебных элементов. Преемственность дидактических единиц, зафиксированных в кодификаторе, положена в основу содержания АПИМ единого Федерального банка заданий, используемого для проведения Интернет-экзамена в сфере профессионального образования.

Контролируемое содержание дисциплины включает код элемента содержания и наименование элемента содержания (темы задания). *Первый разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер группы заданий, связанный с объемом часов в ГОС, выделяемых на изучение дисциплины. В дисциплине «Физика» предложено выделить три группы (1 группа – от 100 до 279 часов, 2 группа – от 280 до 699 часов, 3 группа – от 700 до 1000 часов). *Второй разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер дидактической единицы (раздела) дисциплины, а *третий разряд в записи кода элемента содержания* идентифицирует номер темы задания. Все коды элементов содержания и их наименование распределяются в предложенном порядке для каждой дидактической единицы.

Перечень контролируемых учебных элементов отражает требования к знаниям, которые студент должен приобрести в результате освоения дисциплины или отдельных ее разделов. При этом уровень сложности заданий должен быть БАЗОВЫМ, то есть, все предлагаемые задания должны контролировать обязательную подготовку студентов на уровне требований, задаваемом государственными образовательными стандартами.

Ниже приведен кодификатор для 2 группы заданий (от 280 до 699 часов).

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен…
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ (СТАТИСТИЧЕСКАЯ) ФИЗИКА И ТЕРМОДИНМКА		
2.4.1	Свободные и вынужденные колебания	**знать**: формулы для смещения, скорости, ускорения и их взаимосвязь при гармонических колебаниях; зависимость частоты собственных колебаний от параметров колебательных систем; виды и величину энергии для механических и электрических колебательных систем; уравнение затухающих колебаний и его параметры (коэффициент затухания, время релаксации); условия резонанса. **уметь:** анализировать информацию, представленную в виде графика; вычислять параметры колебательных систем; определять изменение характера затухающих колебаний при изменении параметров системы; определять энергию колебательной системы.
2.4.2	Сложение гармонических колебаний	**знать:** метод векторных диаграмм при сложении колебаний одного направления; метод векторных диаграмм для сложения напряжений при вынужденных колебаниях в контуре из последовательно соединенных сопротивления, индуктивности и емкости. **уметь:** вычислять амплитуду результирующего колебания (при сложении одинаково направленных колебаний одинаковой частоты), пользуясь методом векторных диаграмм; вычислять ампли-

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен…
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
		туду результирующего напряжения вынужденных колебаний в последовательном контуре, пользуясь методом векторных диаграмм
2.4.3.	Волны. Уравнение волны	**знать:** уравнение плоской синусоидальной волны; параметры, входящие в уравнение волны (частота, циклическая частота, период, длина волны, волновое число), и соотношения между ними; закон преломления волн на границе раздела сред; **уметь:** вычислять частоту, циклическую частоту, период, длину волны, волновое число по уравнению волны; вычислять скорости распространения волн по закону преломлении; определять размерность физических величин на основе их определений.
2.4.4.	Энергия волны. Перенос энергии волной	**знать:** электромагнитная волна; вектор плотности потока энергии электромагнитной волны (вектор Пойнтинга) и упругих волн; единицы измерения объемной плотности энергии и плотности потока энергии; функциональную зависимость объемной плотности энергии. **уметь:** анализировать информацию, представленную в виде рисунка; находить направление вектора плотности потока энергии электромагнитной волны в условиях конкретной задачи; определять плотность потока энергии при изменении параметров волны; определять размерность физических величин.

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Свободные незатухающие колебания

Пружинный маятник	**Математический матник**	**Идеальный LC контур**
$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0^2\varphi=0, \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2q=0, \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}$

$x-$координата, $\varphi-$угол, $q-$заряд

$m-$масса, $g-$ускорение свободного падения $C-$емкость

$k-$коэффициент упругости $l-$длина нити $L-$индуктивность

Кинематика свободных незатухающих колебаний

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, $-A\le x\le A$, $x_{\max}=A$

$\mathrm{v}_x(t)=x'(t)=-\omega A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=\omega A\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi/2)$, $-A\omega\le \mathrm{v}_x\le \omega A$,

$\mathrm{v}_{\max}=\omega A$

$a_x(t)=x''(t)=-\omega^2A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=\omega^2A\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi), -A\omega^2\le a_x\le A\omega^2, a_{\max}=\omega^2A$

$W_{\text{П}}=\frac{kx^2}{2}=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)-$потенциальная энергия колеблется с частотой 2ω

$W_{\text{К}}=\frac{m\mathrm{v}^2}{2}=\frac{m\omega_0^2A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)-$кинетическая энергия колеблется с частотой 2ω

$W=W_{\text{П}}+W_{\text{К}}=\frac{m\mathrm{v}_{\max}^2}{2}=\frac{kA^2}{2}=\text{const}$, $A_{1,2}=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_2^2}{2}-$работа упругой силы.

$F_x=-kx-$проекция силы упругости на ось OX.

Свободные затухающие колебания (с потерей энергии)

$\beta-$коэффициент затухания

Пружинный маятник (с сопротивлением)	**Математический маятник** (с сопротивлением)	RLC **контур** (с тепловыделением)
$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$ $\beta=\frac{r}{2m}$, $r_{\text{крит}}=2\sqrt{mk}$	$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\beta\frac{d\varphi}{dt}+\omega_0^2\varphi=0$	$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0$ $\beta=\frac{R}{2L}$, $R_{\text{крит}}=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$r-$коэффициент сопротивления ($F_x^{\text{сопр}}=-r\mathrm{v}_x$) $R-$омическое сопротивление

Если (большое затухание)

$$\beta^2\ge\omega_0^2, \text{ т. е. } \beta\ge\omega_0 \;(r\ge r_{\text{крит}}, R\ge R_{\text{крит}}),$$

то имеет место **апериодическое затухающее движение (не колебание).**

Если (малое затухание)

$$\beta^2<\omega_0^2, \text{ т. е. } \beta<\omega_0 \;(r<r_{\text{крит}}, R<R_{\text{крит}}),$$

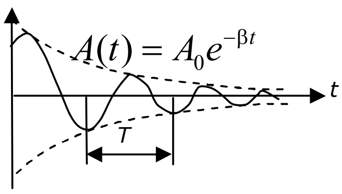
то имеет место **периодическое затухающее движение (колебание).**

Решение дифференциального уравнения для периодических механических и электрических затухающих колебаний ($\beta < \omega_0$)

$$x(t) = \varphi(t) = q(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$ – частота, $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0$ – период затухающих колебаний.



Характеристики амплитуды затухающих колебаний

Время затухания (релаксации) $\tau = \dfrac{1}{\beta}$ – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Декремент затухания – отношение значений амплитуд, соответствующие моментам времени, отличающимся на период $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} = e^{\frac{T}{\tau}}$.

Логарифмический декремент затухания $\lambda = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \dfrac{T}{\tau}$.

Число колебаний за время затухания (релаксации) $N_e = \dfrac{\tau}{T} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Добротность системы $Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$ - величина пропорциональная числу колебаний, совершаемых системой за время τ.

Определение	**Механические ($T \approx T_0$)**	**Электрические ($T \approx T_0$)**
$\tau = \dfrac{1}{\beta}$	$\tau = \dfrac{2m}{r}$	$\tau = \dfrac{2L}{R}$
$\lambda = \beta T = \dfrac{T}{\tau}$	$\lambda = \dfrac{\pi r}{\sqrt{mk}}$	$\lambda = \pi R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
$N_e = \dfrac{\tau}{T} = \dfrac{1}{\lambda}$	$N_e = \dfrac{\sqrt{mk}}{\pi r}$	$N_e = \dfrac{1}{\pi R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
$Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$	$Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{r}$	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Если затухание очень мало ($\beta \ll \omega_0$), то

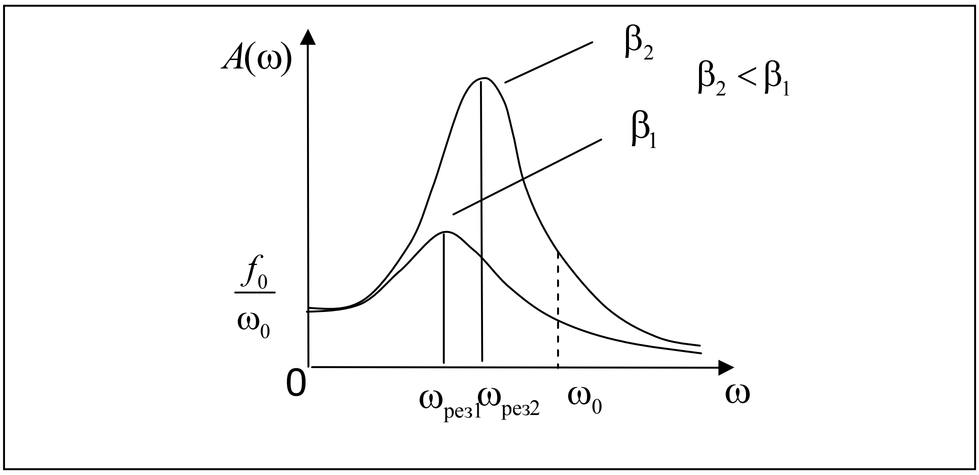
$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)},\ \text{где}\ W = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},\ W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Вынужденные механические колебания тела массой m

$\omega -$ частота внешней вынуждающей силы F, $\omega_0 -$ частота собственных свободных незатухающих колебаний системы, $\beta < \omega_0$

Уравнение	Решение	Условия резонанса
$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, $F_x^{\text{внеш}} = F_0 \cos \omega t$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$.	$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$, $A(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \le \omega_0$ $A_{\text{рез}} = A(\omega_{\text{рез}}) = \dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ **Слабые потери** – $\beta \ll \omega_0$ $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, $A_{\text{рез}} \approx \dfrac{f_0}{2\beta\omega_0}$. **Нет потерь** – $\beta = 0$ $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$, $A_{\text{рез}} = \infty$.

Резонанс – зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.



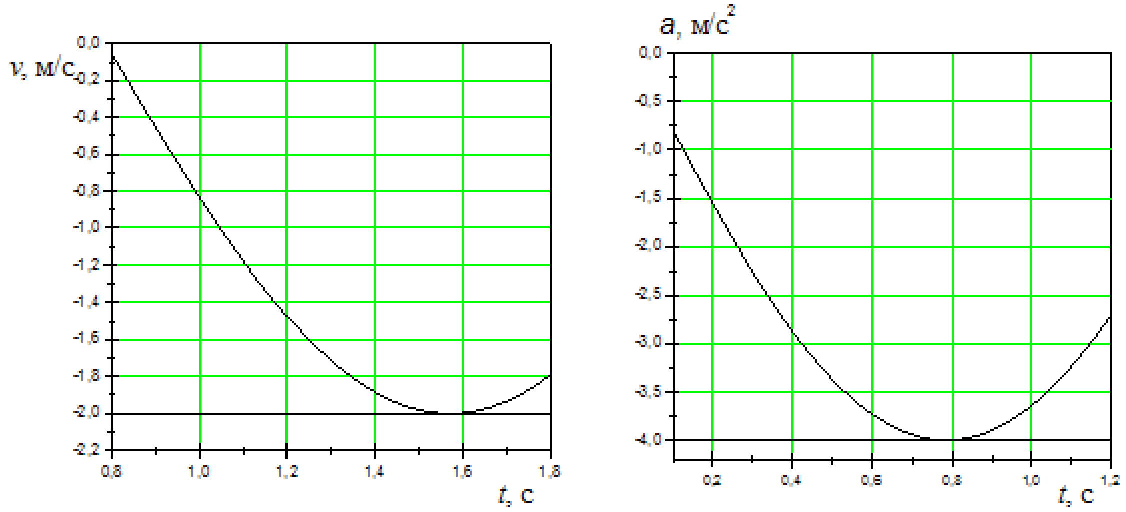
Характеристики резонанса

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \le \omega_0, \quad A_{\text{рез}} = A(\omega_{\text{рез}}) = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

1. Резонанс возможен, когда в системе могут существовать свободные незатухающие колебания.
2. Чем меньше коэффициент затухания β, тем ближе частота $\omega_{\text{рез}}$ резонанса к собственной ω_0 частоте свободных незатухающих колебаний и тем больше значение амплитуды колебаний $A(\omega_{\text{рез}})$.

Тесты с решениями
Свободные незатухающие механические

1. На рисунках изображены зависимости от времени скорости и ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону.



Циклическая частота колебаний точки равна ….**2 с-1.**

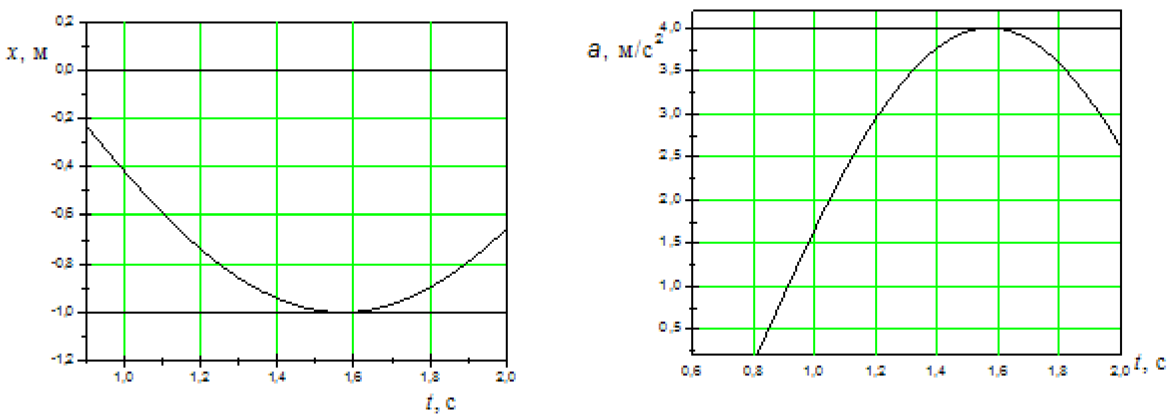
Решение

Амплитудные значения скорости и ускорения определяются по формулам $v_{\max} = A\omega$, $a_{\max} = A\omega^2$, где $A -$ амплитуда координаты (максимальное смещение материальной точки), $\omega -$ циклическая частота. Используя графики, находим: $v_{\max} = 2$ м/с; $a_{\max} = 4$ м/с^2. Амплитуда – величина положительная по определению. Следовательно,

$$\omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{4}{2} = 2c^{-1}.$$

Примечание. На рисунке изображены зависимости от времени проекций.

2. На рисунках изображены зависимости от времени координаты и ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону.



Циклическая частота колебаний точки равна …**2**

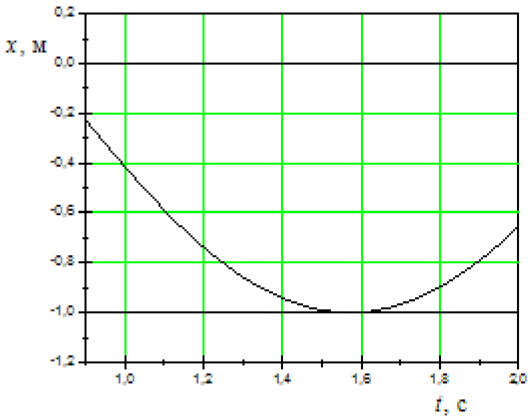
Решение

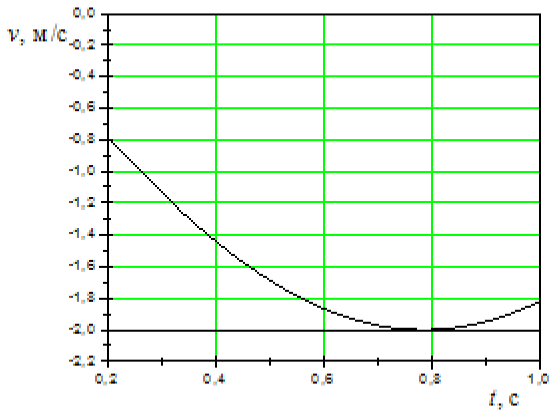
Амплитудное значение ускорения определяется по формуле $a_{\max} = A\omega^2$, где A – амплитуда координаты (максимальное смещение материальной точки), ω – циклическая частота. Используя графики, находим: $A = 1$м, $a_{\max}$ =4 м/с2. Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

Примечание. На рисунке изображены зависимости от времени проекций.

3. На рисунках изображены зависимости от времени координаты и скорости материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону:





Циклическая частота колебаний точки (в с^{-1}) равна …**2**

Решение

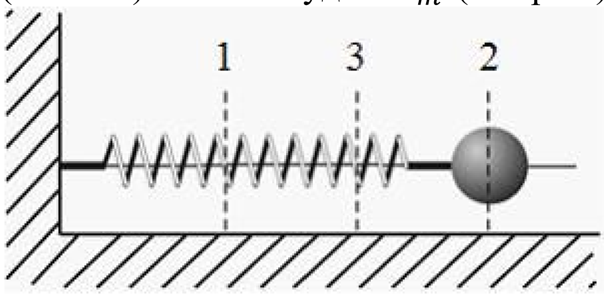
При гармонических колебаниях смещение точки от положения равновесия изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Пусть $x = x_m \cos\omega t$. Скорость есть первая производная по времени от смещения точки: $v_x = -\omega x_m \sin\omega t$. Тогда амплитудное значение скорости $v_m = \omega x_m$ и $\omega = v_m / x_m$.

Приведенные графики позволяют найти $v_m = 2$ м/с и $x_m = 1$м. Тогда циклическая частота колебаний точки $\omega = 2\ \text{с}^{-1}$.

Примечание. На рисунке изображены зависимости от времени проекций.

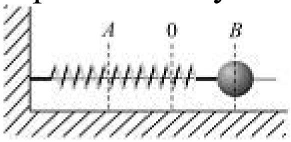
4. Тело совершает гармонические колебания около положения равновесия (точка 3) с амплитудой x_m (см. рис.). Ускорение тела равно нулю в точке …**3**



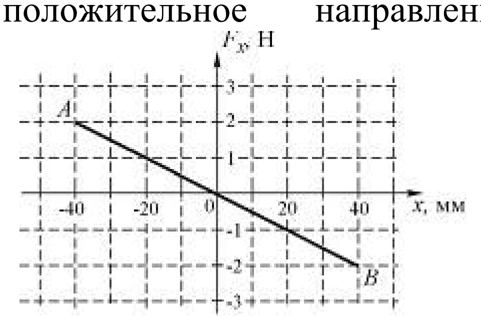
Решение

При гармонических колебаниях смещение тела от положения равновесия изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Пусть $x = x_m \cos\omega t$. Ускорение тела равно второй производной от координаты по времени, зависимость ускорения от времени дается выражением $a_x = -\omega^2 x_m \cos\omega t = -\omega^2 x$. Отсюда следует, что ускорение равно нулю в тех точках траектории, в которых равна нулю величина смещения тела из положения равновесия, то есть в точке 3.

5. Шарик, прикрепленный к пружине (пружинный маятник) и насаженный на горизонтальную направляющую, совершает гармонические колебания.



На графике представлена зависимость проекции силы упругости пружины на положительное направление оси X от координаты шарика.



В положении О энергия пружинного маятника (в мДж) равна …**40**

Решение

В положении О пружинный маятник обладает кинетической энергией, потенциальная энергия равна нулю. По закону сохранения энергии кинетическая энергия в положении О равна потенциальной энергии в положении B. Потенциальную энергию можно найти по формуле $П = kx^2/2$, где $k -$ коэффициент жесткости пружины, $x -$ растяжение (сжатие) пружины. Жесткость пружины можно определить, используя график: $F_x = -kx$ и

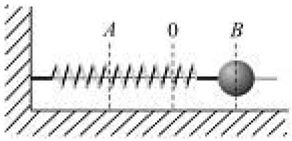
$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-2}{40 \cdot 10^{-3}} = 50\frac{Н}{м}.$$

Величину растяжения пружины в положении B также можно определить из графика: $x = 40 \cdot 10^{-3}$м. Тогда

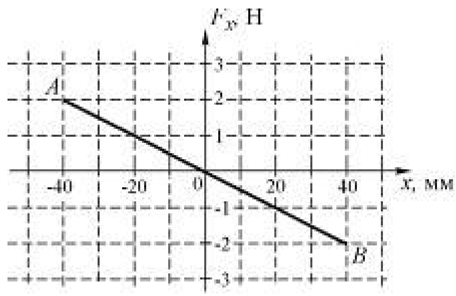
$$П = \frac{kx^2}{2} = \frac{50 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{2} = 4 \cdot 10^{-2}\text{Дж} = 0{,}04 \text{ Дж} = 40 \text{ мДж}.$$

Следовательно, кинетическая энергия в положении О равна: $K = 40$ мДж.

6. Шарик, прикрепленный к пружине и насаженный на горизонтальную направляющую, совершает гармонические колебания.



На графике представлена зависимость проекции силы упругости пружины на ось X от координаты шарика.



Работа силы упругости при смещении шарика из положения В в положение О (в мДж) составляет …**40**

Решение

Так как сила упругости консервативная, то ее работа по перемещению шарика из точки 1 в точку 2 равна $A_{12} = W_1 - W_2$. Тогда

$$A_{BO} = W_B - W_O = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_O^2}{2}, \; x_B = 40 \text{ мм} = 40\cdot 10^{-3}\text{м}, \; x_O = 0 \text{ мм}.$$

Жесткость пружины можно определить, используя график: $F_x = -kx$ и

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-2}{40 \cdot 10^{-3}} = 50\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$A_{BO} = W_B - W_O = \frac{kx_B^2}{2} = \frac{50\cdot(40\cdot 10^{-3})^2}{2} = \frac{50\cdot 16\cdot 10^{-4}}{2} = 40\cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 40\text{мДж}.$$

7. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Если смещение точки в момент времени, принятый за начальный, равно 2 см, то точка колеблется в соответствии с уравнением (в СИ)…

1. $\boldsymbol{x = 0{,}04\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})}$,

2. $x = 0{,}04\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3})$,

3. $x = 0{,}04\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$,

4. $x = 0{,}04\cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3})$.

Решение

Так период колебаний T = 2 с, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\frac{\text{рад}}{c}$$

и единственно возможное решение – 1.
Проверим. Пусть $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. По условию задачи

$$x(0) = A\sin(0 + \varphi_0) = \frac{A}{2},$$

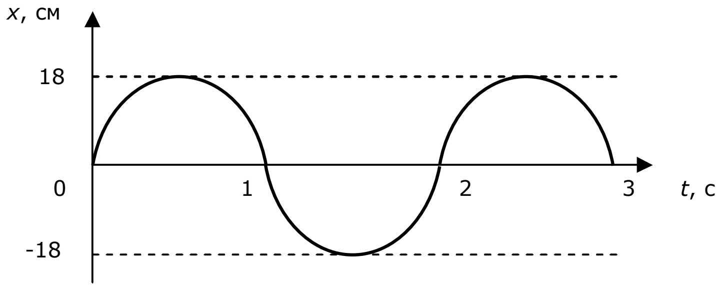
то

$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{2}, \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$x = 0{,}04\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}).$$

8. Из графика колебаний материальной точки следует, что модуль скорости в момент времени $t = 1/3$ с равен…



9π см/с,
0,
9 см/с,
$9\pi\sqrt{3}$ см/с,

Решение

Так как в момент $t = 0$ с $x(0) = 0$ см, то $x(t) = A\sin\omega t$ и $v_x(t) = \dot{x}(t) = \omega A\cos\omega t$. Так как $T = 2$ с, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Тогда

$$v(1/3) = |\,v_x(1/3)| = \omega A\left|\cos\omega\frac{1}{3}\right| = \pi 18\cos\frac{\pi}{3} = 9\pi\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

9. При свободных колебаниях маятника максимальное значение потенциальной энергии равно 10 Дж, максимальное значение кинетической энергии равно 10 Дж. Полная механическая энергия …

– изменяется в пределах от 0 до 10 Дж,
– не изменяется и равна 20 Дж,
– **не изменяется и равна 10 Дж**,
– изменяется в пределах от 0 до 20 Дж.

Решение

Для свободных незатухающих колебаниях маятника полная механическая энергия не меняется и равна максимальной потенциальной и максимальной кинетической энергии. Таким образом, правильный ответ – не изменяется и равна 10 Дж.

Свободные затухающие механические

10. Тело совершает колебания по закону $\varphi = 0{,}03e^{-0{,}25t}\cos 30t$. Время релаксации (в с) равно …**4**

Решение

Так как амплитуда колебаний $A(\mathrm{t}) = A_0 e^{-\beta t} = \varphi_0 e^{-\beta t}$ и время релаксации $\tau = 1/\beta$, то

$$\tau = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ с.}$$

11. Амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в e^2 раз (e – основание натурального логарифма) за 100 мс. Коэффициент затухания (в с^{-1}) равен …**20**

Решение

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону колебаний $A(\mathrm{t}) = A_0 e^{-\beta t}$, где β – коэффициент затухания. По условию $A_0/e^2 = A_0 e^{-\beta t}$. Тогда $\beta t = 2$ и

$$\beta = \frac{2}{0{,}1} = 20\text{с}^{-1}.$$

12. Маятник совершает колебания, которые подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}5\frac{dx}{dt} + 900x = 0.$$

Время релаксации равно …..**4** с.

Решение

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\beta -$ коэффициент затухания, $\omega_0 -$ собственная круговая частота колебаний. Время релаксации связано с коэффициентом затухания формулой $\tau = 1/\beta$ Так как $2\beta = 0{,}5 \text{ с}^{-1}$, то коэффициент затухания равен: $\beta = 0{,}25 \text{ с}^{-1}$. Значит время релаксации $\tau = 1/\beta = 1/0{,}25 = 4$ с.

13. В колебательном контуре за один период колебаний в тепло переходит 4,0 % энергии. Добротность контура равна …**157**.

Решение

Формула для добротности, при малых затуханиях, выраженная через потери энергии за период имеет вид

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)},$$

где $W(t)$ и $W(t+T) -$ энергия контура в некоторый момент времени и спустя период соответственно. Следовательно,

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{0{,}04W(t)} = 157.$$

14. Уравнение движения пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

является дифференциальным уравнением …
– вынужденных колебаний,
– **свободных затухающих колебаний**,
– свободных незатухающих колебаний.

15. Уменьшение амплитуды колебаний в системе с затуханием характеризуется временем релаксации. Если при неизменном омическом сопротивлении в колебательном контуре увеличить в 2 раза индуктивность, то время релаксации …
– **увеличится в 2 раза**,
– уменьшится в 2 раза,
– увеличится в 4 раза,
– уменьшится в 4 раза.

Решение

Так как

$$\tau = \frac{2L}{R},$$

то правильный ответ – первый.

Вынужденные

16. Маятник совершает вынужденные колебания со слабым коэффициентом затухания ($\beta \ll \omega_0$), которые подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}5\frac{dx}{dt} + 900x = 0{,}1\cos 150t.$$

Амплитуда колебаний будет максимальна, если частоту вынуждающей силы уменьшить в ….**5** раз(-а).

Решение

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$

где $\beta -$ коэффициент затухания, $\omega_0 -$ собственная круговая частота колебаний, f_0 $-$амплитудное значение вынуждающей силы, деленное на массу; $\omega -$ частота вынуждающей силы. При слабом затухании (коэффициент затухания значительно меньше собственной частоты колебаний маятника

$\beta \ll \omega_0$) амплитуда колебаний будет максимальна, если частота вынуждающей силы совпадет с собственной частотой колебаний маятника (явление резонанса). Собственная частота колебаний равна: $\omega_0 = \sqrt{900} = 30\ c^{-1}$, частота вынуждающей силы $\omega = 150\ c^{-1}$. Следовательно, частоту вынуждающей силы необходимо уменьшить в 5 раз.

17. Пружинный маятник с жесткостью пружины $k = 90 Н/м$ совершает вынужденные колебания с малым коэффициентом затухания ($\beta \ll \omega_0$), которые подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}5\frac{dx}{dt} + 900x = 0{,}1\cos 10t.$$

Амплитуда колебаний будет максимальна, если массу груза увеличить в... **9** раз.

Решение

Амплитуда колебаний будет максимальна, если частота вынуждающей силы будет приблизительно равна собственной частоте свободных незатухающих колебаний данной системы для малого коэффициента затухания.

Сравнивая указанное выше уравнение с его общим видом

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$

получаем, что $\omega_0 = \sqrt{900} = 30\ с^{-1}$, а $\omega = 10\ с^{-1}$. Меняя характеристики системы, можно уменьшить собственную частоту колебаний так, чтобы она совпала с частотой вынуждающей силы.

Для пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и, соответственно

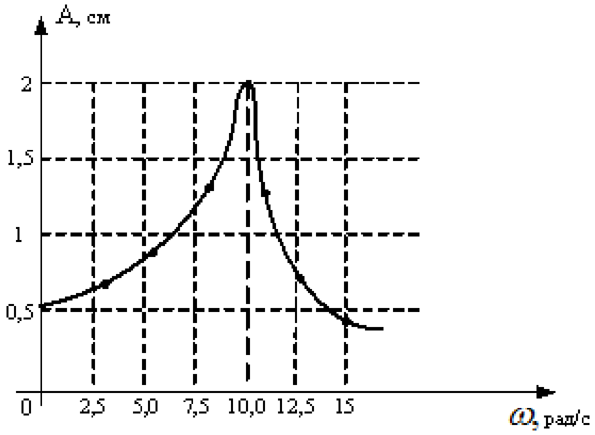
$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{90}{900} = 0{,}1\ кг.$$

Чтобы частота вынуждающей силы ω совпала с собственной частотой колебаний маятника $\acute{\omega}_0$, масса должна быть равна ($\acute{\omega}_0 = \omega$)

$$m = \frac{k}{\acute{\omega}_0^2} = \frac{k}{\omega^2} = \frac{90}{100} = 0{,}9\ кг.$$

Следовательно, массу груза нужно увеличить в 9 раз.

18. На рисунке представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний математического маятника от частоты внешней силы при слабом затухании.



Длина нити маятника (в *см*) равна …**10** см

Решение

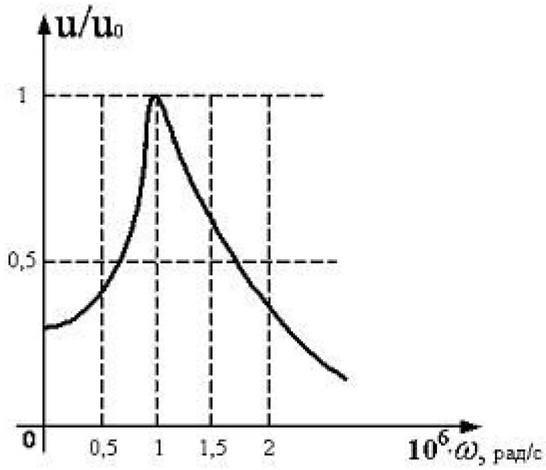
На графике представлена резонансная кривая. Если частота вынуждающей силы равна резонансной частоте, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. При слабом затухании резонансная частота практически равна собственной частоте колебаний математического маятника

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$l = \frac{g}{\omega_{\text{рез}}^2} = \frac{10}{100} = 0{,}1 \text{ м} = 10 \text{ см}.$$

19. На рисунке представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе емкостью 1 нф, включенного в колебательный контур.



При малом затухании индуктивность катушки этого контура равна...

0,1 мГн, **1 мГн**, 100 мГн, 10 мГн

Решение

При малом затухании резонансная частота вынужденных колебаний электрического контура приблизительно равна собственной частоте свободных незатухающих колебаний LC контура, т. е.

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Тогда

$$L = \frac{1}{C\omega_{\text{рез}}^2} = \frac{1}{10^{-9} \cdot (10^6)^2} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}\text{Гн} = 1\ \text{мГн}.$$

20. Свободные незатухающие, свободные затухающие и вынужденные колебания заряда конденсатора в колебательном контуре описываются уравнениями…

1. $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0,$
2. $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = 0,$
3. $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{U_0}{L}\cos\omega t.$

Решение

Свободные незатухающие – 1, свободные затухающие – 2, вынужденные – 3.

СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Общий вид движения (колебания) в результате **сложения колебаний с разными амплитудами** A_1, A_2 **и фазами** φ_1, φ_2 **вдоль одного направления с одинаковой частотой** ω

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где

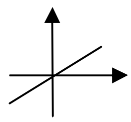
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

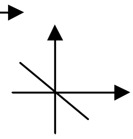
Общий вид движения (колебания) в результате **сложения колебаний с разными амплитудами** A_1, A_2 **и фазами** φ_1, φ_2 **вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений с одинаковой частотой** ω

$$x(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad y(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \pm 2\pi, \ldots$, то $y = \frac{A_2}{A_1}x$ – **прямая линия**

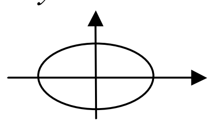




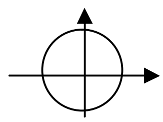
Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, то $y = -\frac{A_2}{A_1}x$ – **прямая линия**

Если и $A_1 = A_2$, то прямые идут по биссектрисе угла, т. е. $y = x$ и $y = -x$.

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm \ldots$, то $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ – **эллипс**

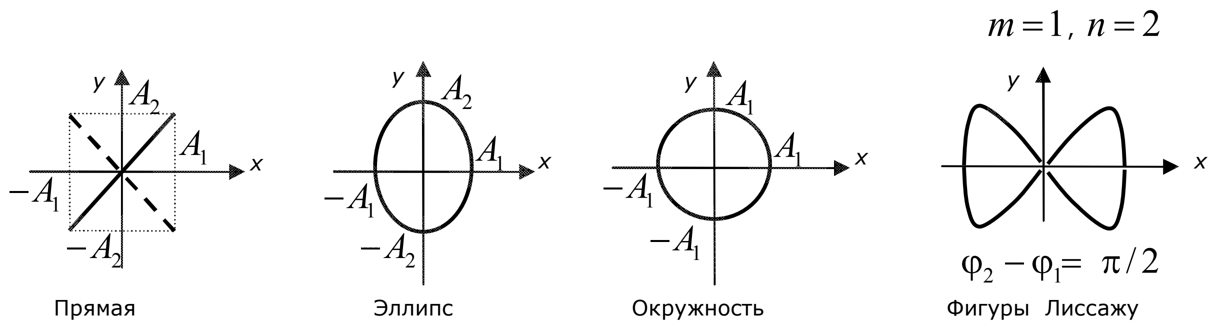


Если и $A_1 = A_2 = A$, то $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$ – **окружность**



Общий вид движения в результате **сложения колебаний с разными амплитудами** A_1, A_2 **и фазами** φ_1, φ_2 **вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений с кратными частотами** (Фигуры Лиссажу)

$$x(t) = A_1\cos(m\omega t + \varphi_1), \quad y(t) = A_2\cos(n\omega t + \varphi_2), \; m \neq n$$

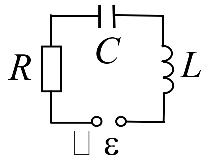


Вынужденные электрические колебания. Переменный ток

Генератор переменного тока – источник вынужденных колебаний RLC контура. Если $\varepsilon(t) = U(t) = U_0\cos\omega t$, то U_0 – амплитуда напряжения на генераторе, ω – частота колебания напряжения на генераторе.

Уравнение колебаний

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon(t)}{L}, \beta = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$



Определения

$$I = \frac{dq}{dt},\ U_R = RI,\ U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2},\ U_C = \frac{q}{C}.$$

R – **омическое (активное) сопротивление по переменному току**

$X_L = \omega L$ – **индуктивное (реактивное) сопротивление по переменному току**

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – **емкостное (реактивное) сопротивление по переменному току**

$X = X_L - X_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ – **полное реактивное сопротивление**

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}$ – **полное сопротивление**

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Изменение электрических характеристик при прохождении переменного тока по RLC контуру

$I = I_0\cos(\omega t - \varphi)$	$I_0 = \dfrac{U_0}{Z} = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ – амплитуда тока в контуре
$U_R = U_{Rm}\cos(\omega t - \varphi)$	$U_{Rm} = I_0 R$ – амплитуда напряжения на резисторе
$U_L = U_{Lm}\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$	$U_{Lm} = I_0 X_L = I_0\omega L$ – амплитуда напряжения на катушке
$U_C = U_{Cm}\cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$	$U_{Cm} = I_0 X_C = \dfrac{I_0}{\omega C}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе
$q = q_m\cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$	$q_m = I_0\omega$ – амплитуда заряда на конденсаторе

(U_L на $\dfrac{\pi}{2}$ опережает по фазе U_R и I, U_C на $\dfrac{\pi}{2}$ отстает по фазе от U_R и I)

Метод вектор-амплитуд

Ставим в соответствие:

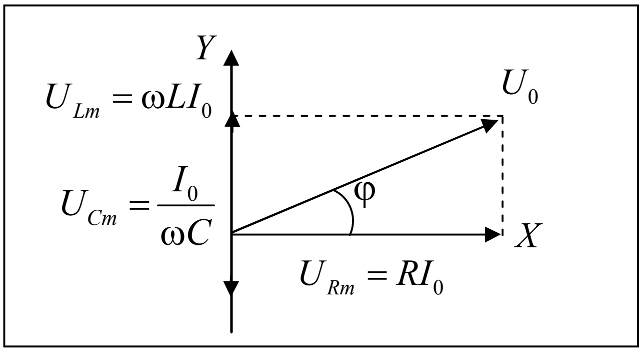
амплитудному напряжению на сопротивлении $U_{Rm} = RI_0$ вектор $\vec{U}_{Rm}$, направленный по оси OX.

амплитудному напряжению на катушке индуктивности $U_{Lm} = \omega L I_0$ вектор $\vec{U}_{Lm}$, направленный по оси OY.

амплитудному напряжению на конденсаторе $U_{Cm} = \dfrac{I_0}{\omega C}$ вектор $\vec{U}_{Cm}$, направленный по оси –OY.

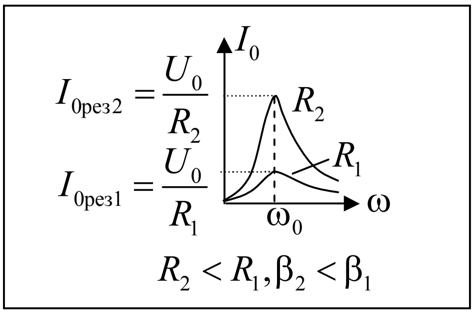
амплитудному напряжению на источнике (генераторе) U_0 вектор $\vec{U}_0$, равный векторной сумме векторов напряжений $\vec{U}_0 = \vec{U}_{Rm} + \vec{U}_{Lm} + \vec{U}_{Cm}$ Тогда

$$U_0 = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2} \quad \text{или} \quad U_0^2 = (RI_0)^2 + I_0^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2.$$



Резонанс тока

Если $\omega = \omega_{рез} = \omega_0$, то $I_{0рез} = I_0(\omega_{рез}) = \dfrac{U_0}{R}$. Если $R = 0$, то $I_{0рез} = \dfrac{U_0}{0} = \infty$.



Средняя за период *T* мощность на катушке, конденсаторе, резисторе и в цепи по переменному току

$$< P_L >_T = < U_L I > = < P_C >_T = < U_C I >_T = 0, \quad < P_R >_T = < U_R I >_T = < P >_T = < \varepsilon I >_T = \frac{RI_0^2}{2}.$$

Эффективные значения переменного тока и напряжения на элементах цепи

$$I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, U_{эфф} = I_{эфф} Z = \frac{U_0}{\sqrt{2}};$$

$$U_{Lэфф} = I_{эфф} X_L = \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}}, \; U_{Cэфф} = I_{эфф} X_C = \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}}, \; U_{Rэфф} = I_{эфф} R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}}.$$

Тесты с решениями
Общий вид колебаний вдоль одного направления

1. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. Результирующее колебание имеет максимальную амплитуду при разности фаз, равной

π, $\pi/2$, $\pi/4$, **0**

Решение

Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами, определяется по формуле $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где A_1 и A_2 – амплитуды, $(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз складываемых колебаний. Так как A_1 и A_2 положительны, то максимальное A будет, если $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, т. е. $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$.

2. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. Результирующее колебание имеет минимальную амплитуду при разности фаз, равной

π, $\pi/2$, $\pi/4$, **0**.

Решение

Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами, определяется по формуле $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где A_1 и A_2 – амплитуды, $(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз складываемых колебаний. Так как A_1 и A_2 положительны, то минимальное A будет, если $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, т. е. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$.

3. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и равными амплитудами A_0. Установите соответствие между разностью фаз складываемых колебаний и амплитудой результирующего колебания.

1. $\pi/2$ 2. $2\pi/3$ 3. 0

- [ ] $A_0\sqrt{2}$
- [ ] A_0
- [ ] $2A_0$
- [1] 0

Решение

Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами, определяется по формуле $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где A_1 и A_2 – амплитуды, $(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз складываемых колебаний. Тогда имеем

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0A_0\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 2A_0^2(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)).$$

Если разность фаз
$(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi/2$, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, то $A^2 = 2A_0^2$ и $A = A_0\sqrt{2}$.
Если разность фаз
$(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi/3$, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1/2$, то $A^2 = 2A_0^2(1 - (1/2)) = A_0^2$ и $A = A_0$.
Если разность фаз
$(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, то $A^2 = 2A_0^2(1 + 1) = 4A_0^2$ и $A = 2A_0$.

4. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и амплитудами, равными $A_1 = A_0$ и $A_2 = 2A_0$. Установите соответствие между амплитудой результирующего колебания и разностью фаз складываемых колебаний.

1. A_0 2. $A_0\sqrt{5}$ 3. $A_0\sqrt{3}$

- [ ] π
- [1] $\pi/2$
- [ ] $2\pi/3$
- [ ] $\pi/3$

Решение

Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами, определяется по формуле $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где A_1 и A_2 – амплитуды, $(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз складываемых колебаний. Тогда имеем
$A^2 = A_0^2 + 4A_0^2 + 4A_0A_0\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$

Если амплитуда результирующего колебания $A = A_0$, то
$A_0^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$ или $1 = 5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.
Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, т. е. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$.

Если амплитуда результирующего колебания $A = A_0\sqrt{5}$, то
$5A_0^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$ или $5 = 5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.
Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, т. е. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi/2$.

Если амплитуда результирующего колебания $A = A_0\sqrt{3}$, то
$3A_0^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$ или $3 = 5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.
Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1/2$, т. е. $(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi/3$.

5. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и амплитудами, равными $A_1 = A_0$ и $A_2 = 2A_0$. Установите соответствие между разностью фаз складываемых колебаний и амплитудой результирующего колебания.

1. 0 2. $\pi/3$ 3. π

- [1] $3A_0$
- [ ] $A_0\sqrt{7}$
- [ ] A_0
- [ ] $A_0\sqrt{5}$

Решение

Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами, определяется по формуле $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где A_1 и A_2 – амплитуды, $(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз складываемых колебаний. Тогда имеем

$$A^2 = A_0^2 + 4A_0^2 + 4A_0A_0\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$$

Если разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, $\cos 0 = 1$, то

$A^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = A_0^2(5 + 4) = 9A_0^2$ и $A = 3A_0$.

Если разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi/3$, $\cos \pi/3 = 1/2$, то

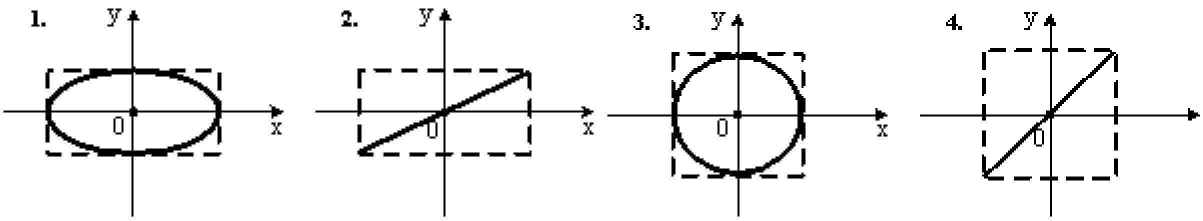
$A^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = A_0^2(5 + 4/2) = 7A_0^2$ и $A = A_0\sqrt{7}$.

Если разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$, $\cos \pi = -1$, то

$A^2 = A_0^2(5 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = A_0^2(5 - 4) = A_0^2$ и $A = A_0$.

Общий вид колебаний вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений

6. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания. Установите соответствие между номером соответствующей траектории и законами колебаний точки M вдоль осей координат OX, OY.



☐ $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t) \end{cases}$

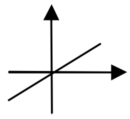
1 $\begin{cases} x = A \sin(\omega t), \\ y = A \sin\left(\omega t + \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = A \sin(\omega t), \\ y = A \sin(\omega t) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$

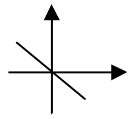
Решение

Если частоты одинаковы и разность фаз $0, \pm 2\pi$,.. прямая линия



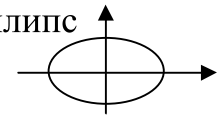
$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t) \end{cases} - 2. \qquad \begin{cases} x = A \sin(\omega t), \\ y = A \sin(\omega t) \end{cases} - 4.$$

Если частоты одинаковы и разность фаз $\pi, \pm 3\pi$,.. – прямая линия



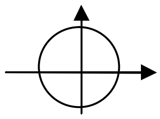
$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$$ – нет графика.

Если частоты одинаковы и разность фаз $\pm(1/2)\pi, \pm(3/2)\pi$,..– эллипс



$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} - 1.$$

и одинаковые амплитуды – окружность.



$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t), \\ y = A \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} - 3.$$

7. Складываются взаимно перпендикулярные колебания. Установите соответствие между формой траектории и законами колебания точки M вдоль осей координат OX, OY.

1. Прямая линия 2. Окружность 3. Фигура Лиссажу

[1] $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$

[2] $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_1 \cos(\omega t) \end{cases}$

[3] $\begin{cases} x = A_1 \cos(3\omega t), \\ y = A_2 \cos\left(4\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

[ ] $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Решение

Для анализа формы траектории оба уравнения должны быть выражены относительно одной гармонической функции (sin и sin или cos и cos). Отметим, что $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ и $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$

Если частоты одинаковы и разность фаз $0, \pm\pi, \ldots$ – прямая линия.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$$ – 1.

Если частоты одинаковы и разность фаз $\pm(1/2)\pi, \pm(3/2)\pi, \ldots$ – эллипс.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$ – нет графика.

и одинаковые амплитуды – окружность.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_1 \cos(\omega t) \end{cases}$$ – 2.

Если частоты кратны друг другу – фигуры Лиссажу.

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(3\omega t), \\ y = A_2 \cos\left(4\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$ -3.

8. Складываются взаимно перпендикулярные колебания. Установите соответствие между законами колебания точки M вдоль осей координат OX, OY и формой траектории.

1. $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(2\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

1 прямая линия

2 эллипс

3 фигура Лиссажу

☐ синусоида

Решение

Если частоты одинаковы и разность фаз $0, \pm\pi, \ldots$ – прямая линия.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin(\omega t + \pi) \end{cases}$$ – 1.

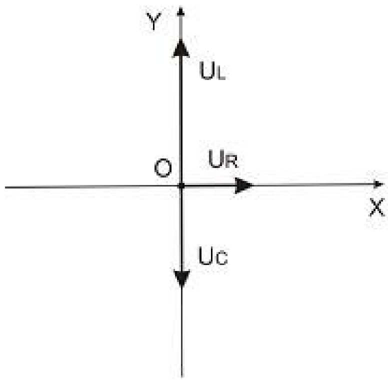
Если частоты одинаковы и разность фаз $\pm(1/2)\pi, \pm(3/2)\pi, \ldots$ – эллипс.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} - 2.$$

Если частоты кратны друг другу – фигуры Лиссажу.

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t), \\ y = A_2 \sin\left(2\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} - 3.$$

Вынужденные электрические колебания. Переменный ток

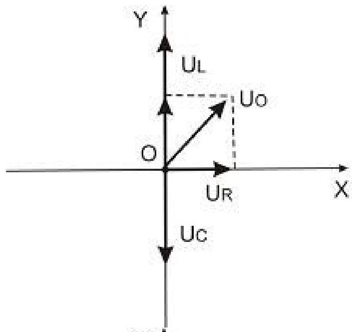


9. Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = U_0\cos\omega t$ (B). На рисунке представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах. Установите соответствие между амплитудными значениями напряжений на этих элементах и амплитудным значением напряжения источника.

1. $U_R = 4\,B; U_L = 5\,B; U_C = 2\,B$
2. $U_R = 2\,B; U_L = 1\,B; U_C = 2\,B$

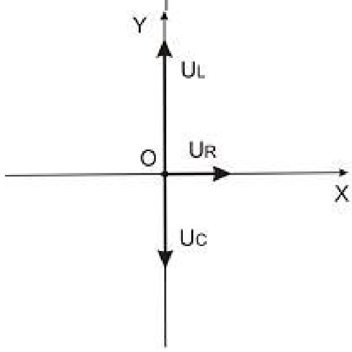
☐ 5В
☐ √5В
[1] 11 В

Решение



Амплитудное значение напряжения источника $U_0 = \sqrt{(U_L - U_C)^2 + U_R^2}$. Следовательно, в первом случае $U_0 = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ В, а во втором $U_0 = \sqrt{(1-2)^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,B.$

Примечание. U_L, U_C, U_R –амплитудные значения.

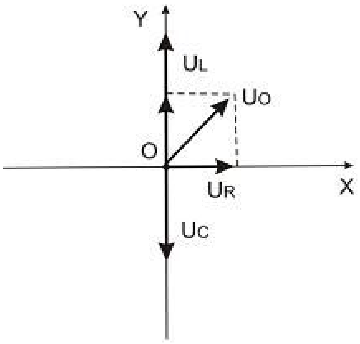


10. Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и включены в цепь переменного тока, изменяющегося по закону $I = 0{,}1\cos(3{,}14t)$ (A). На рисунке представлена фазовая диаграмма падений напряжения на указанных элементах. Амплитудные значения напряжений соответственно равны: на сопротивлении $U_R = 4$В; на катушке индуктивности $U_L = 5$В; на конденсаторе $U_C = 2$В. Установите соответствие между сопротивлением и его численным значением.

1. Активное сопротивление 2. Реактивное сопротивление 3. Полное сопротивление

- [ ] 40 Ом
- [ ] 30 Ом
- [ ] 50 Ом
- [1] 20 Ом

Решение



По определению

$$U_0 = \sqrt{(U_L - U_C)^2 + U_R^2} = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = 5 \text{ В},$$

$$R = \frac{U_R}{I_0} = \frac{4}{0{,}1} = 40 \; Ом - 1,$$

$$X_L = \frac{U_L}{I_0} = \frac{5}{0{,}1} = 50 \; Ом,$$

$$X_C = \frac{U_C}{I_0} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \; Ом,$$

$$X = X_L - X_C = 50 - 20 = 30 \; Ом - 2,$$

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{5}{0{,}1} = 50 \; Ом - 3.$$

Другой способ расчета реактивного сопротивления X.

Так как $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, то $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ Ом.

11. Резистор с сопротивлением $R = 25$ Ом, катушка с индуктивностью $L = 30$ мГн и конденсатор с емкостью $C = 12$ мкФ соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = 127\cos(3140t)$ (В). Установите соответствие между элементом цепи и эффективным значением напряжения на нем.

1. Сопротивление 2. Катушка индуктивности 3. Конденсатор

- [1] 31 В
- [ ] 118 В
- [ ] 33 В
- [ ] 85 В

Решение

Определим сопротивления по переменному току:

$X_L = \omega L = 3140 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 94{,}2 \; Ом.$

$X_C = 1/\omega C = 1/(3140 \cdot 12 \cdot 10^{-6}) = 26{,}5 \; Ом.$

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{25^2 + (94{,}2 - 26{,}5)^2} = 72{,}2 \; Ом.$

Определим амплитуду и эффективное значение переменного тока:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{127}{72{,}2} = 1{,}76 \; А, \qquad I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 1{,}25 \; А,$$

Определим эффективные значения напряжений:

$U_{Rэфф} = I_{эфф}R = 1{,}25 \cdot 25 = 31\,B - 1,$

$U_{Lэфф} = I_{эфф}X_L = 1{,}25 \cdot 94{,}2 = 118\,B - 2,$

$U_{Cэфф} = I_{эфф}X_C = 1{,}25 \cdot 26{,}5 = 33\,B - 3.$

12. Сопротивление $R = 100$ Ом катушка индуктивности $L = 10$ Гн и конденсатор $C = 1$ млФ соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = 5\cos(100t)$ (В). Установите соответствие между сопротивлениями различных элементов цепи и их численными значениями.

1. Активное сопротивление 2. Индуктивное сопротивление 3. Емкостное сопротивление

- [ ] 100 Ом
- [ ] 1000 Ом
- [1] 10 Ом
- [ ] 1Ом

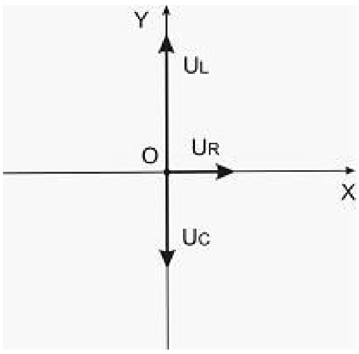
Решение

Активное сопротивление $R = 100$ Ом – 1,

Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 100 \cdot 10 = 1000$ Ом – 2,

Емкостное сопротивление $X_C = 1/\omega C = 1/(100 \cdot 10^{-3}) = 10$ Ом –3.

13. Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и включены в цепь переменного тока, изменяющегося по закону $I = 0{,}05\cos(628t)$ (А). На рисунке схематически представлена фазовая диаграмма падений напряжения на указанных элементах. Амплитудные значения напряжений соответственно равны: на сопротивлении $U_R = 4\,B$; на катушке индуктивности $U_L = 7\,B$; на конденсаторе $U_C = 4\,B$. Установите соответствие между сопротивлением и его численным значением.



1. Полное сопротивление 2. Активное сопротивление 3. Реактивное сопротивление

- [1] 100 Ом
- [2] 80 Ом
- [3] 60 Ом
- [ ] 20 Ом

Решение

Активное сопротивление $R = U_R/I_0 = 4/0{,}05 = 80$ Ом – 2.

Индуктивное сопротивление $X_L = U_L/I_0 = 7/0{,}05 = 140$ Ом.

Емкостное сопротивление $X_C = U_C/I_0 = 4/0{,}05 = 80$ Ом.

Реактивное сопротивление $X = X_L - X_C = 140 - 80 = 60$ Ом – 3.

Полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$ Ом –1.

14. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $L = 10$ Гн, конденсатора $C = 10$ мкФ и сопротивления $R = 5$ Ом. Добротность контура равна…

Решение

Добротность контура равна

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{10}{10 \cdot 10^{-6}}} = 200.$$

15. Генератор синусоидального напряжения включён в цепь, содержащую последовательно включённые катушку индуктивности, конденсатор и резистор. Если действующие значения напряжений на катушке $U_L = 120$ В, на конденсаторе $U_C = 114$ В, на резисторе $U_R = 8$ В, то действующее значение U напряжения на выходе генератора равно…**10 В**.

Решение

Связь между амплитудными и действующими значениями одна и та же:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{8^2 + (120 - 114)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,B.$$

ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ВОЛНЫ

Общие свойства упругих и электромагнитных волн

Волна (волновой процесс) – процесс, обладающий повторяемостью во времени и пространстве. Минимальный интервал повторяемости во времени – **период колебания** $\boldsymbol{T}$, минимальный интервал повторяемости в пространстве – **длина волны** $\boldsymbol{\lambda}$. Связь между минимальными интервалами повторяемости

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu} = 2\pi\frac{\upsilon}{\omega},$$

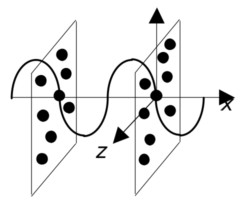
где υ – фазовая скорость волны, ν – линейная и ω – круговая частота.

Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$

Если $\xi = \xi(x,t)$, то волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Одним из его решений является **плоская, монохроматическая, гармоническая** волна**,** бегущая в сторону положительного направления оси ОХ

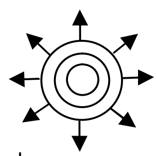


плоская

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) + \varphi_0] = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, ω – круговая частота, υ – скорость (фазовая), φ_0 – начальная фаза волны, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\upsilon T} = \dfrac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число, $\varphi(x,t)$ – фаза волны, $\varphi(x,t) = \omega(t - \dfrac{x}{\upsilon}) + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0$. При описании движения в обратном направлении необходимо «–» заменить на «+» .

Если $\xi = \xi(r,t)$**,** то уравнение **сферической, монохроматической, гармонической** волны, бегущей от источника


сферическая

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{\upsilon}) + \varphi_0] = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где r – расстояние от источника сферической волны до точки пространства.

Уравнение плоской, **стоячей волны** (следствие суперпозиции двух плоских бегущих навстречу друг другу волн с одинаковыми частотами, амплитудами и нулевыми начальными фазами)

$$\xi(x,t) = A\sin\omega t\sin kx.$$

Продольные волны – частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.
Поперечные волны – частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Волны в газе и объеме жидкости – **продольные**; на поверхности жидкости – **поперечные**; в твердом теле **– и продольные и поперечные.**

Скорость колебаний частиц среды для упругих продольных (поперечных) волн, бегущих вдоль оси ОХ, определяется выражением

$$\mathrm{v}_x = \xi_t'(x,t) \ (\mathrm{v}_y = \xi_t'(x,t)), \ \mathrm{v}_{\max} = \omega A.$$

Отметим, что $\mathrm{v}_{\max} \neq \upsilon -$ фазовая скорость волны.

Разность фаз $\Delta\varphi$ **между двумя точками волны, расстояние между которыми равно** Δx

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \ \text{или} \ \Delta x = \lambda\frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Если $\Delta x = \lambda$, то $\Delta\varphi = 2\pi$ (в **фазе),** $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2}$, то $\Delta\varphi = \pi$ (в **противофазе),**

$\Delta x = \dfrac{\lambda}{4}$, то $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Электромагнитные волны

Электромагнитные (световые) волны **– поперечные**, $c = 3\cdot 10^8$ м/с– скорость электромагнитных волн (света) в вакууме.

Шкала электромагнитных волн

$\lambda = 0$ м $\lambda = \infty$ м

Гамма, ренгеновский, ультрофиолетовый, видимый, инфракрасный, радио

$\nu = \infty$ с$^{-1}$ $\nu = 0$ с$^{-1}$

Видимый свет

$\lambda = 350$ нм $\lambda = 750$ нм

Фиолетовый, синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный

Волновое уравнение -
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H} -$ вектора напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне, $\upsilon = c/n -$ скорость распространения электромагнитной волны в среде с коэффициентом преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$ ($\mu \approx 1$), $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

Если $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$, то уравнение **плоской, монохроматической, гармонической** волны, бегущей вдоль положительного направления оси OX

$$\begin{cases} E(x,t)=E_y(x,t)=E_0\cos[\omega(t-\dfrac{x}{\upsilon})+\varphi_0]=E_0\cos(\omega t-kx+\varphi_0), \\ H(x,t)=H_z(x,t)=H_0\cos[\omega(t-\dfrac{x}{\upsilon})+\varphi_0]=H_0\cos(\omega t-kx+\varphi_0). \end{cases}$$

Если $\vec{E}=\vec{E}(r,t)$, то уравнение **сферической, монохроматической, гармонической** волны

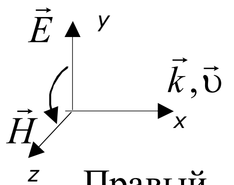
$$\begin{cases} E(r,t)=\dfrac{A_E}{r}\cos[\omega(t-\dfrac{r}{\upsilon})+\varphi_0]=\dfrac{A}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0), \\ H(r,t)=\dfrac{A_H}{r}\cos[\omega(t-\dfrac{r}{\upsilon})+\varphi_0]=\dfrac{A}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0). \end{cases}$$

Свойства электромагнитных волн

1. Электромагнитная волна **поперечна** – $\vec{E}\perp\vec{k}, \vec{H}\perp\vec{k}$, $\vec{k}=k\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$ – волновой вектор.

2. Вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ **взаимно ортогональны** – $\vec{E}\perp\vec{H}, \left|\left[\vec{E}\cdot\vec{H}\right]\right|=EH.$

3. Вектора $\vec{k}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – **правая тройка векторов** – $(\vec{k},\vec{E},\vec{H})\leftrightarrow(x,y,z)$.



Правый винт

Вращаем правый винт от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{H}$ по кратчайшему пути. Поступательное движение правого винта задает направление вектора $\vec{k},\vec{\upsilon}$. Вдоль этого направления в монохроматической гармонической волне переносится энергия.

4. Вектора $\vec{E},\vec{H}$ изменяются **синфазно** – $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu\mu_0}H.$

Граница раздела двух сред

Закон отражения

$$\alpha=\beta,$$

где α,β – углы падения и отражения.

Закон преломления (для упругих волн)

$$\frac{1}{\upsilon_1}\sin\alpha=\frac{1}{\upsilon_2}\sin\gamma,$$

где α,υ_1 – угол падения и скорость волны в первой среде; γ,υ_2 – угол преломления и скорость волны во второй среде.

Закон преломления (для электромагнитных волн)

$$n_1\sin\alpha=n_2\sin\gamma,$$

где α, $n_1 = \dfrac{c}{\upsilon_1}$ – угол падения и коэффициент преломления 1 среды; γ, $n_2 = \dfrac{c}{\upsilon_2}$ – угол преломления и коэффициент преломления 2 среды.

При переходе из среды 1 в среду 2

Не меняются колебательные характеристики волны – $\nu,\ \omega,\ T$.

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu,\ \omega_1 = \omega_2 = \omega,\ T_1 = T_2 = T.$$

Меняются волновые характеристики, зависящие от среды – $\upsilon,\ \lambda,\ k$.

$$\upsilon_1 = \frac{c}{n_1},\ \upsilon_2 = \frac{c}{n_2} \qquad \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

$$\lambda_1 = \upsilon_1 T = \frac{c}{n_1}T,\ \lambda_2 = \upsilon_2 T = \frac{c}{n_2}T \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{2\pi\lambda_1}{2\pi\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Тесты с решениями

1. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, имеет вид $\xi = 0,01\sin(10^3 t - 2x)$. Амплитуда ускорения колебаний частиц среды (в м/с^2) равна …

10^4

10

500

5

Решение

Так как $\xi = A\sin(\omega(t - \frac{x}{\upsilon})) = A\sin(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon})$, то получаем, что A = 0,01 м, $\omega = 10^3$ рад/с. Амплитуда колебаний ускорения частиц среды

$$a_{\max} = A\,\omega^2 = 0,01\cdot(10^3)^2 = 10^4 \text{ м/с}^2.$$

2. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, имеет вид $\xi = 0,01\sin 10^3 (t - x/500)$. Длина волны (в м) равна …

3,14

3140

1

0,5

Решение

Так как $\xi = A\sin(\omega(t - \frac{x}{\upsilon})) = A\sin(\omega t - kx) = A\sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$, то получаем, что $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{1000}{500} = 2$ м$^{-1}$. Тогда $\lambda = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3,14$ (м).

3. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01\sin(\omega t - 2x)$. Циклическая частота ω равна…

0,001 с$^{-1}$, **1000 с$^{-1}$**, 159 с$^{-1}$

Решение

Так как $\xi = A\sin(\omega(t - \frac{x}{\upsilon})) = A\sin(\omega t - kx) = A\sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$, то получаем, что $\frac{2\pi}{\lambda} = 2$ м$^{-1}$. По определению $\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu} = 2\pi\frac{\upsilon}{\omega}$. Тогда

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{2\pi\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon} = 2 \text{ м}^{-1} \text{ и } \omega = 2\cdot 500 = 1000 \text{ с}^{-1}.$$

4. Сейсмическая упругая волна, падающая под углом 45° на границу раздела между двумя слоями земной коры с различными свойствами, испытывает преломление, причем угол преломления равен 30°. Во второй среде волна распространяться со скоростью 4,0 км/с. В первой среде скорость волны была равна…

7,8 км/с, 1,4 км/с, **5,6 км/с**, 2,8 км/с.

Решение

Так как

$$\frac{1}{\upsilon_1}\sin\alpha = \frac{1}{\upsilon_2}\sin\beta,$$

где α – угол падения, а β – угол преломления, то

$$\upsilon_1 = \upsilon_2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 4\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{1} = 4\sqrt{2} = 4\cdot 1{,}4 = 5{,}6 \text{ км/с.}$$

5. Электромагнитная волна частоты 3,0 МГц переходит из вакуума в диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 4{,}0$. При этом ее длина волны уменьшится на …. м.

50

100

$5\cdot 10^4$

0,50

Решение

По определению $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{4\cdot 1} = 2$ ($\mu \approx 1$ для всех веществ, кроме ферромагнетиков), $\upsilon = \frac{c}{n}$, $T = \frac{1}{\nu}$. Тогда

$$\lambda_1 = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^6} = 100 \text{ м},\ \lambda_2 = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 3\cdot 10^6} = \frac{100}{2} = 50 \text{ м}$$

и

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 50 \text{ (м).}$$

Примечение. Не ясно дана частота линейная или круговая. По ответам – линейная.

6. Уравнение бегущей волны имеет вид: $\xi = 6\cos(1570t - 4{,}6x)$, где ξ выражено в миллиметрах, t – в секундах, x – в метрах. Отношение амплитудного значения скорости частиц среды к скорости распространения волны равно …

0,028

28

0,036

36

Решение

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси OX, имеет вид: $\xi = A\sin(\omega(t-\frac{x}{\upsilon})) = A\sin(\omega t-\frac{\omega}{\upsilon}x)$. Тогда $A = 6$ мм, $\omega = 1570$ с$^{-1}$,

$\frac{\omega}{\upsilon} = 4{,}6$ м$^{-1}$. Следовательно $\upsilon = \frac{1570}{4{,}6} = 341\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Проекция скорости колебаний частиц среды (на ось OX если волна продольная и на ось OY – если поперечная) равна

$$\mathrm{v}_x = \frac{d\xi}{dt} = (A\sin(\omega(t-\frac{x}{\upsilon})))' = A\omega\cos(\omega(t-\frac{x}{\upsilon})).$$

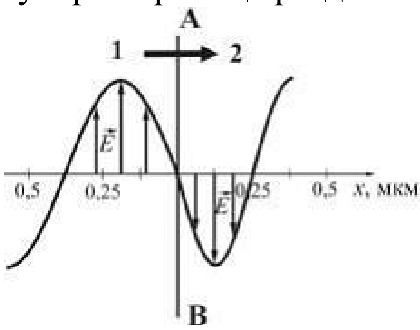
Тогда амплитуда скорости колебаний частиц равна

$$\mathrm{v}_{\max} = A\omega = 6\cdot 10^{-3}\cdot 1570 = 9{,}42\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{\mathrm{v}_{\max}}{\upsilon} = \frac{9{,}42}{341} = 0{,}028.$$

7. На рисунке представлена мгновенная фотография электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды **1** в среду **2** перпендикулярно границе раздела AB.



Относительный показатель преломления n_{21} двух сред равен …

1,50

1,33

0,67

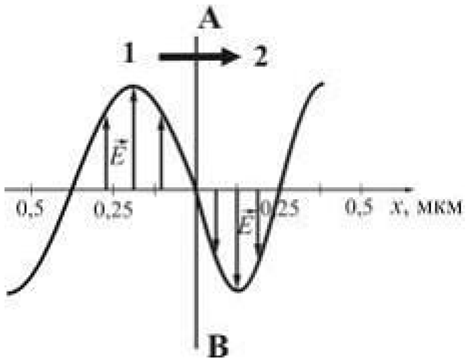
0,84

Решение

Из графика следует, что $\lambda_1 = 0{,}375\cdot 2 = 0{,}75$ мкм, а $\lambda_2 = 0{,}25\cdot 2 = 0{,}5$ мкм. Так как $\lambda = \upsilon T$, где υ – скорость света в среде и период колебаний T не меняется при переходе границы, то $\lambda_1 = \upsilon_1 T = \frac{c}{n_1}T$ и $\lambda_2 = \upsilon_2 T = \frac{c}{n_2}T$. Тогда

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{cT}{n_1}\frac{n_2}{cT} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \text{ и } n_{21} = \frac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5.$$

8. На рисунке представлена мгновенная фотография электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды **1** в среду **2** перпендикулярно границе раздела АВ.



Если среда **1** – вакуум, то скорость света в среде **2** равна …….м/с.

2,0·10⁸

$1{,}5\cdot10^8$

$2{,}4\cdot10^8$

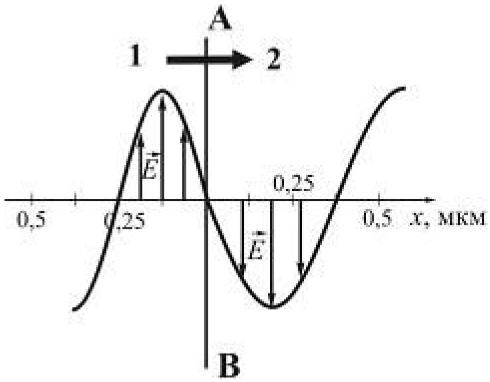
$2{,}8\cdot10^8$

Решение

Из графика следует, что $\lambda_1 = 0,375\cdot 2 = 0,75$ мкм, а $\lambda_2 = 0,25\cdot 2 = 0,5$ мкм. Так как $\lambda = \upsilon T$, где υ – скорость света в среде и период колебаний T не меняется при переходе границы, то $\lambda_1 = \upsilon_1 T = cT$ и $\lambda_2 = \upsilon_2 T$. Тогда

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_2 T}{cT} = \frac{\upsilon_2}{c} \text{ и } \upsilon_2 = c\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 3,0\cdot 10^8 \cdot \frac{0,5}{0,75} = \frac{3,0\cdot 10^8}{1,5} = 2,0\cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

9. На рисунке представлена мгновенная фотография электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды **1** в среду **2** перпендикулярно границе раздела сред AB.



Отношение скорости света в среде **2** к его скорости в среде **1** равно …

1,5

0,67

1,7

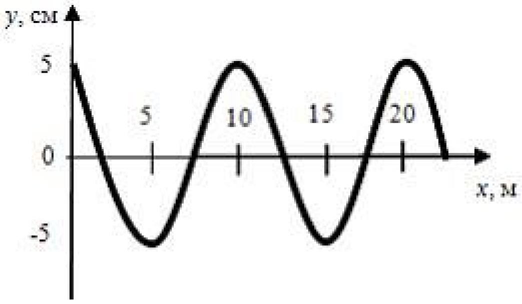
0,59

Решение

Из графика следует, что $\lambda_1 = 0,25\cdot 2 = 0,5$ мкм, а $\lambda_2 = 0,375\cdot 2 = 0,75$ мкм. Так как при переходе из одной среды в другую ω, v и T не меняются и $\lambda = \upsilon T$, то

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\lambda_2/T}{\lambda_1/T} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5.$$

10. На рисунке представлен профиль поперечной бегущей волны, которая распространяется со скоростью $v = 200\ м/с$. Амплитуда скорости колебаний точек среды (в $м/с$) равна …**6,28**

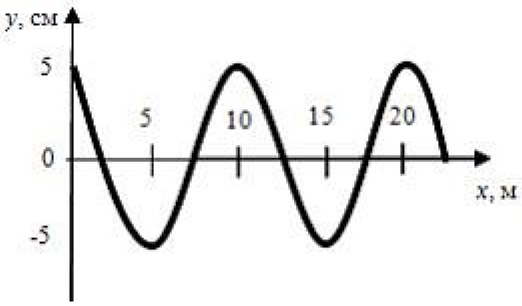


Решение

Из графика следует, что амплитуда колебаний частиц среды $A = 5\cdot 10^{-2}$ м, $\lambda = 10$ м. Амплитуда колебаний скорости частиц среды $\upsilon_{\max} = A\omega = A\dfrac{2\pi}{T}$. ω – частота колебаний, T – период. Так как $\lambda = \upsilon T$, то $T = \dfrac{\lambda}{\upsilon}$. Следовательно,

$$\upsilon_{\max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = A\frac{2\pi}{\lambda}\upsilon = 5\cdot 10^{-2}\,\frac{2\pi}{10}\,200 = 2\pi = 6,28 \text{ м/с}.$$

11. На рисунке представлен профиль поперечной бегущей волны, которая распространяется со скоростью $v = 200\ м/с$. Уравнением данной волны является выражение …



$\boldsymbol{y(x,t) = 0,05\cos(125,6t - 0,628x)}$

$y(x,t) = 0,05\sin(125,6t - 0,628x)$

$y(x,t) = 5\cos(1256t - 6,28x)$

$y(x,t) = 5\cos(125,6t + 0,628x)$

Решение

Выберем уравнение плоской гармонической волны в виде (без φ_0)

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \text{ или } y(x,t) = A\sin(\omega t - kx),$$

где A – амплитуда волны; ω – циклическая частота волны; $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ – волновое число; λ – длина волны; $\varphi_0 = 0$ – начальная фаза.

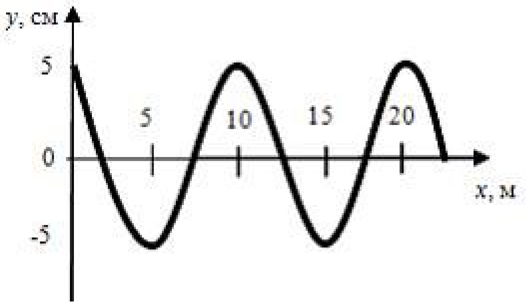
Амплитуду, длину волны и начальную фазу можно определить из графика: $A = 0{,}05\,м$, $\lambda = 10\,м$. Тогда $k = 2\pi/\lambda = 6{,}28/10 = 0{,}628\,м^{-1}$, $\omega = kv = 0{,}628 \cdot 200 = 125{,}6\,с^{-1}$ и уравнением данной волны будет выражение $y(x,t) = 0{,}05\cos(125{,}6t - 0{,}628x)$ или $y(x,t) = 0{,}05\sin(125{,}6t - 0{,}628x)$.

В первом случае, так как $y(0,t) = 0{,}05\cos(125{,}6t) = 0{,}05$ м, то $\cos(125{,}6t) = 1$ и график построен для $t = 0$ с.

Во втором случае, так как $y(0,t) = 0{,}05\sin(125{,}6t) = 0{,}05$ м, то $\sin(125{,}6t) = 1$ и график построен для $t = \pi/(2 \cdot 125{,}6)$ с.

На сайте www.i-exam.ru правильный ответ – первый.

12. На рисунке представлен профиль поперечной упругой бегущей волны, распространяющейся со скоростью $v = 1000\,м/с$. Циклическая частота волны равна …



628
314
1256
2512

Решение

Так как дано распределение смещения в упругой бегущей волне в пространстве, а не во времени, то из графика можно найти длину волны $\lambda = 10$ м.

Так как $\lambda = vT = 2\pi v/\omega$, то

$$\lambda = vT = 2\pi v/\omega = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{1000}{10} = 628\frac{рад}{с}.$$

13. Две точки лежат на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью 330 м/с. Период колебаний 0,02 с, расстояние между точками 55 см. Разность фаз колебаний в этих точках составляет …

$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{12}$

Решение

Разность фаз $\Delta\varphi$ между двумя точками волны, находящимися на расстоянии Δx в один и тот же момент времени равна

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda},$$

где $\lambda = \upsilon T$, υ — скорость распространения волны, T — период колебаний. Таким образом,

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\upsilon T} = 2\pi\frac{0{,}55}{330\cdot 0{,}02} = \frac{\pi}{6}.$$

14. Световые волны в вакууме являются …

поперечными
продольными
упругими
волнами, скорость распространения которых в веществе больше, чем в вакууме

Решение

Световые волны – электромагнитные волны. В электромагнитной волне векторы напряженностей электрического и магнитного полей колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны, следовательно, световые волны являются поперечными.

Примечание. Фазовая скорость гармонической монохроматической электромагнитной волны в веществе **может быть** больше скорости света в вакууме. Скорость, с которой переносится энергия совокупности электромагнитных волн в веществе (групповая), **всегда** меньше скорости света в вакууме.

15. Продольными волнами являются …

звуковые волны в воздухе
световые волны в вакууме
волны, распространяющиеся вдоль струн музыкальных инструментов
радиоволны

Решение

Световые волны и радиоволны – электромагнитные, т. е. поперечные волны. Струны музыкальных инструментов колеблются в поперечном направлении. Звуковые – продольные.

16. Для плоской волны справедливо утверждение …

– амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (в непоглощающей среде)
– волновые поверхности имеют вид концентрических сфер.

– **амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь)**.

Решение

Первое и второе утверждение относится к сферическим волнам, третье – к плоским.

ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ВОЛНОЙ

Энергия волны в объеме V – W, Дж.

Объемная плотность энергии $\mathrm{w} = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{V}}$ – энергия волны в единице объема вещества, Дж/м^3.

Плотность потока энергии $j = \mathrm{w}\upsilon$ – энергия волны, переносимая через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны за единицу времени, Дж/с·м^2.

Мощность излучения $P = jS_\perp = \mathrm{w}\upsilon S_\perp$ – энергия волны, переносимая через участок площади $S_\perp$ перпендикулярно направлению распространения волны за единицу времени, Дж/с = Вт.

Усреднение $<\ldots.>$производится по $t \gg T$ – период колебаний. Для световых волн $T \sim 10^{-15}$ с.

Плоские гармонические волны

Упругие

$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

Электромагнитные

$E(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

Объемная плотность энергии

Упругие:

$\mathrm{w} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$,

ρ – плотность среды.

Электромагнитные:

$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}EH = \frac{EH}{\upsilon},$$ E, H – в среде,

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} : \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{c}{n}$$ – скорость света в среде, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Вектор Умова

$\vec{j} = \mathrm{w}\vec{\upsilon} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}$ – фазовая скорость волны,

$j = \mathrm{w}\upsilon$.

Вектор Умова-Пойтинга

$\vec{j} = \vec{S} = \mathrm{w}\vec{\upsilon} = [\vec{E}\cdot\vec{H}] \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}, \vec{k}$,

$S = \mathrm{w}\upsilon = EH$.

Средняя объемная плотность энергии

$< \mathrm{w} > = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$.

$<\mathrm{w}> = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$.

Интенсивность волны

$I = < \mathrm{w} > \upsilon = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\upsilon$.

$I = < \mathrm{w} > \upsilon = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2\upsilon = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}nE_0^2$,

n - коэффициент преломления среды.

Для вакуума – $I = < \mathrm{w} > c = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 c = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$.

Иногда знак $<\ldots.>$ **усреднения плотности энергии** не пишут.

Тесты с решениями

1. Если в электромагнитной волне, распространяющейся в среде с показателем преломления $n = 2$, значения напряженностей электрического и магнитного полей соответственно равны $E = 750\ В/м, H = 2\ А/м,$ то объемная плотность энергии составляет…. **10 мкДж/м³**.

Решение

Мгновенная плотность потока энергии электромагнитной волны (модуль вектора Умова – Пойнтинга) равна $S = EH\sin 90^{\circ} = EH.$

С другой стороны $S = \mathrm{w}v,$ где w – объемная плотность энергии, $v = c/n$ –скорость электромагнитной волны в среде, c –скорость электромагнитной волны в вакууме, n –показатель преломления. Из равенства

$$\mathrm{w}v = EH$$

следует, что

$$\mathrm{w} = \frac{EH}{v} = \frac{EHn}{c} = \frac{750 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} = 10 \cdot 10^{-6}\frac{Дж}{м^3} = 10\,\frac{мкДж}{м^3}.$$

2. Если в электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме, значение напряженности электрического поля равно $E = 600\ В/м$, объемная плотность энергии $w = 10^{-5} Дж/м^3$, то напряженность магнитного поля составляет .. **5 А/м**.

Решение

Мгновенная плотность потока энергии электромагнитной волны (модуль вектора Умова – Пойнтинга) равна $S = EH\sin 90^{\circ} = EH.$

С другой стороны $S = wc,$ где w – объемная плотность энергии, c – скорость света (в вакууме). Из равенства

$$EH = \mathrm{w}c$$

следует, что

$$H = \frac{c\mathrm{w}}{E} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{600} = 5\frac{А}{м}.$$

3. Показатель преломления среды, в которой распространяется электромагнитная волна с напряженностями электрического и магнитного полей соответственно $E = 750\ В/м, H = 2\ А/м,$ и объемной плотностью энергии $\mathrm{w} = 10 мкДж/м^3$, равен …..**2**.

Решение

Плотность потока энергии электромагнитной волны (модуль вектора Умова-Пойнтинга) равна: $S = EH\sin 90^{\circ} = EH$. С другой стороны $S = \mathrm{w}v = \mathrm{w}c/n,$ где w – объемная плотность энергии, v – скорость света в среде с коэффициентом преломления n, c –скорость света (в вакууме). Из равенства

$$EH = \mathrm{w}\frac{c}{n}$$

следует, что

$$n = \frac{\mathrm{w}c}{EH} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{750 \cdot 2} = \frac{3000}{1500} = 2.$$

4. Если увеличить в 2 раза амплитуду волны и при этом увеличить в 2 раза скорость распространения волны (например, при переходе из одной среды в другую), то плотность потока энергии увеличится в ……**8** раз(-а).

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle \mathrm{w} \rangle v.$$

Для упругой и электромагнитной волны имеем, соответственно,

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 v, \qquad I = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 v,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний, ε – диэлектрическая проницаемость среды, E_0 –амплитуда колебаний электрического поля.

Следовательно, плотность потока энергии увеличится в 8 раз.

5. Если частоту упругой волны увеличить в 2 раза, не изменяя ее скорости, то интенсивность волны увеличится в …..**4** раз(-а).

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle \mathrm{w} \rangle v.$$

Для упругой волны имеем,

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 v,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний. Таким образом, если частоту упругой волны увеличить в 2 раза, не изменяя ее скорости, то интенсивность волны увеличится в 4 раза.

6. Если частоту упругой волны увеличить в 2 раза, не изменяя ее длины волны, то интенсивность волны увеличится в …**8** раз(-а).

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle \mathrm{w} \rangle v.$$

Для упругой волны имеем

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний. Так как

$$\lambda = vT = 2\pi\frac{v}{\omega}, то \quad v = \frac{\lambda\omega}{2\pi},$$

λ – длина волны. Если частота увеличится в два раза при постоянной длине волны, то это значит, что в 2 раза увеличится скорость волны. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v = \frac{1}{4\pi}\rho\lambda A^2\omega^3$$

увеличится в 8 раз.

7. Плоская электромагнитная волна распространяется в диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Если амплитудное значение электрического вектора волны $E_0 = 0{,}55\ мВ/м$, то интенсивность волны равна …**8**. (Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} Ф/м$.) Полученный ответ умножьте на 10^{10} и округлите до целого числа.)

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle w \rangle v.$$

Для электромагнитной волны имеем

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 v,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, E_0 –амплитуда колебаний электрического поля, $v = c/n, n = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{2}c\sqrt{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{3 \cdot 10^8\sqrt{4} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}55 \cdot 10^{-3})^2}{2},$$

$$I = 8{,}03 \cdot 10^{-10}\frac{Вт}{м^2}.$$

Таким образом, ответ – $8{,}03 \cdot 10^{-10} Вт/м^2$.

8. Плотность потока энергии, переносимой волной в упругой среде плотностью ρ, увеличилась в 16 раз при неизменной скорости и частоте волны. При этом амплитуда волны возросла в ….**4** раз(а).

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle w \rangle v.$$

Для упругой волны имеем

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний. Тогда

$$A = \sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 v}}.$$

Если только интенсивность увеличилась в 16 раз, то это значит, что амплитуда колебаний увеличилась в 4 раза.

9. В упругой среде плотностью ρ распространяется плоская синусоидальная волна с частотой ω и амплитудой A. При переходе волны в другую среду, плотность которой в 2 раза меньше, амплитуду увеличивают в 4 раза, тогда объемная плотность энергии, переносимой волной, увеличится в …. **8** раз(-а).

Решение

Среднее значение объемной плотности энергии равно

$$\langle \mathrm{w} \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 ,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний. За счет уменьшения плотности среды объемная плотность энергии уменьшится в 2 раза, а за счет увеличения амплитуды – увеличится в 16 раз, следовательно, объемная плотность энергии увеличится в 8 раз.

10. В физиотерапии используется ультразвук частотой 800 кГц и интенсивностью $1\ Вт/м^2$. При воздействии таким ультразвуком на мягкие ткани человека плотностью 1060 $кг/м^3$ амплитуда колебаний молекул будет равна … **2 $\mathbf{\mathring{A}}$**. (Считать скорость ультразвуковых волн в теле человека равной 1500 $м/с$. Ответ выразите в ангстремах ($1\ \mathring{A} = 10^{-10}$ м) и округлите до целого числа.)

Решение

Средняя плотность потока энергии (интенсивность волны)

$$I = \langle \mathrm{w} \rangle v.$$

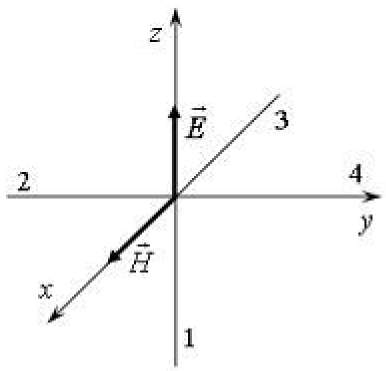
Для упругой волны имеем

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v,$$

где ρ – плотность среды, A – амплитуда колебаний частиц среды, ω – частота колебаний. Отсюда

$$A = \frac{1}{2\pi v}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^5}\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{1{,}06 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}} = 2{,}2 \cdot 10^{-10} м = 2\ \mathring{A}.$$

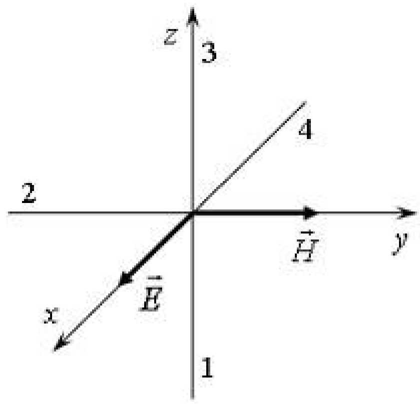
11. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении …**4**.



Решение

Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова – Пойнтинга) равен векторному произведению: $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$, где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – соответственно векторы напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны. Векторы $\vec{S}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют правую тройку векторов, т. е. если вращать правый винт от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{H}$ по кратчайшему пути, то поступательное движение винта покажет направление вектора $\vec{S}$. Значит, вектор Умова – Пойнтинга ориентирован в направлении 4.

12. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей в электромагнитной волне. Вектор Умова – Пойнтинга ориентирован в направлении …**3**.



Решение

Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова – Пойнтинга) равен векторному произведению: $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$, где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – соответственно векторы напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны. Векторы $\vec{S}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют правую тройку векторов, т. е. если вращать правый винт от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{H}$ по кратчайшему пути, то поступательное движение винта покажет направление вектора $\vec{S}$. Значит, вектор Умова – Пойнтинга ориентирован в направлении 3.

Учебное издание

Фишбейн Лев Абрамович

ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Механические и электромагнитные колебания и волны

Сборник задач
для студентов очной, заочной форм обучения
и дистанционного образования

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать28.11.12. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная . Усл. печ. л. 3,0.
Тираж 130 экз. Заказ 315.

Издательство УрГУПС
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66