

Лекция 3

Закономерности формирования результата измерений, понятие погрешности, источники погрешностей.

*«Любая ошибка, которая может вкратиться в
расчет, вкрадется в него!»*

Содержание лекции:

1. Закономерности формирования результатов измерений.
2. Погрешности измерений. Основные понятия и классификация.
3. Причины возникновения погрешностей измерения.
4. Исключение систематических погрешностей
5. Обработка результатов измерения с однократным наблюдением.
6. Обработка результатов измерения с многократными наблюдениями.

Измерение

- – совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

Критерии качества измерений

- **Точность** – близость измеренного значения к истинному значению измеряемой величины.

-
- ***Достоверность*** измерений характеризует степень доверия к результатам измерений.
 - Достоверность оценки погрешностей определяют на основе законов теории вероятностей и математической статистики.

-
- ***Правильность*** – близость среднего арифметического бесконечно большого числа повторно измеренных значений величины к опорному значению величины.

- **Сходимость** – это качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений одного и того же параметра, выполненных повторно одними и теми же средствами одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

- **Неопределенность** – параметр, характеризующий диапазон возможных значений величины.
- **Неопределенность (измерений)** - неотрицательный параметр, характеризующий рассеяние значений величины, приписываемых измеряемой величине на основании измерительной информации

-
- **Прецизионность (измерений)** – близость между показаниями или измеренными значениями величины, полученными при повторных измерениях для одного и того же или аналогичных объектов при заданных условиях.

- ***Повторяемость измерений*** – прецизионность измерений в условиях повторяемости измерений.
- ***Условия повторяемости (измерений)*** – один из наборов условий измерений, включающий применение одной и той же методики измерений, того же средства измерений, участие тех же операторов, те же рабочие условия, то же местоположение и выполнение повторных измерений на одном и том же или подобных объектах в течение короткого промежутка времени.

-
- **Воспроизводимость** – качество измерений, которое отражает близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в различных местах, различными методами и средствами.

- **Воспроизводимость** (измерений) - прецизионность измерений в условиях воспроизводимости измерений.
- **Условия воспроизводимости (измерений)** - один из наборов условий измерений, включающий разные местоположения, разные средства измерений, участие разных операторов и выполнение повторных измерений на одном и том же или аналогичных объектах.

Последовательность действий при формировании результата измерений

(Закономерности формирования результатов измерений)

1. Выбор объекта измерения.
2. Выбор измеряемой физической величины.
3. Определение единицы измерения физической величины.
4. Выбор метода измерения.
5. Определение условий измерения.
6. Определение методик выполнения измерений.
7. Выбор средств измерений.
8. Процесс измерения.
9. Получение результатов измерений.
10. Оценка границ истинного значения физической величины.

Номенклатура метрологических характеристик средств измерений

1. Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений (без введения поправки).
2. Характеристики погрешностей средств измерений.
3. Характеристики чувствительности средств измерений к влияющим величинам .
4. Динамические характеристики средств измерений.
5. Характеристики средств измерений, отражающие их способность влиять на инструментальную составляющую погрешности измерений вследствие взаимодействия средств измерений с любым из подключенных к их входу или выходу компонентов (таких как объект измерений, средство измерений и т. п.).
6. Неинформативные параметры выходного сигнала средства измерений.

-
- Нормируемые метрологические характеристики средств измерений регламентируются ГОСТ 8.009

Вторая аксиома метрологии

- ИЗМЕРЕНИЕ СУТЬ СРАВНЕНИЕ РАЗМЕРОВ ОПЫТНЫМ ПУТЕМ
- т.е. сравнение размеров опытным путем является единственным способом получения измерительной информации

Результат измерения $X_{изм}$

- значение величины, полученное путем ее измерения.

Результат измерения представляет собой приближенную оценку истинного значения величины

-
- ***Результат (измерения величины)*** - множество значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией

Классификация результатов измерений

1. Измеренное значение (величины)
 2. Опорное значение (величины)
 3. Истинное значение (величины)
 4. Принятое значение (величины)
 5. Действительное значение (величины)
-

-
- ***Измеренное значение (величины)*** - значение величины, которое представляет результат измерения.

-
- **Опорное значение (величины)** - значение величины, которое используют в качестве основы для сопоставления со значениями величин того же рода.

-
- ***Истинное значение (величины)*** - значение величины, которое соответствует определению измеряемой величины.

-
- ***Принятое значение (величины)*** - значение величины, по соглашению приписанное величине для данной цели.

-
- ***Действительное значение (величины)***
- значение величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Третья аксиома метрологии

- РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ БЕЗ ОКРУГЛЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ СЛУЧАЙНЫМ
- т.е. вероятность наступления какого-либо события может быть высокой или низкой, но никогда не равна нулю или единице

Любое измерение есть процесс сравнения.

Процедура нахождения отношения размера физической величины к размеру той же величины, принятому за единицу, может быть записана в математической форме (**уравнение измерения**):

$$Q/[Q]=x$$

где Q — размер измеряемой физической величины;

$[Q]$ — размер физической величины, принятый за единицу.

Погрешности

■ **Погрешность (результата измерения)** - разность между измеренным значением величины и опорным значением величины.

1. Истинное значение величины неизвестно, его применяют только в теоретических исследованиях.
2. На практике используют действительное значение величины
3. Погрешность измерения определяют по формуле

$$\Delta X_{\text{изм}} = X_{\text{изм}} - X_{\text{д}}$$

Классификация погрешностей

1. *Погрешность средств измерения и результатов измерения.*
2. *Инструментальные и методические погрешности.*
3. *Статическая и динамическая погрешности.*
4. *Систематические и случайные погрешности.*
5. *Погрешности адекватности и градуировки.*
6. *Абсолютная, относительная и приведенная погрешности.*
7. *Аддитивные и мультипликативные погрешности.*

Классификация погрешностей измерения

1. По способу нормирования метрологических характеристик

1. Абсолютная
2. Относительная
3. Приведенная

1. По способу нормирования метрологических характеристик

- ***Абсолютная погрешность (измерения)*** - погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

1. По способу нормирования метрологических характеристик

- **Относительная погрешность (измерения)** - погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к опорному значению измеряемой величины.

1. По способу нормирования метрологических характеристик

Приведенная погрешность (измерения) - относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона.

$$\gamma = \pm (\Delta / X_N) 100\%$$

2. По характеру режима измерений

1. Статические
2. Динамические

2. По характеру режима измерений

- **Статическая погрешность измерений** - погрешность результата измерений, свойственная условиям статического измерения

2. По характеру режима измерений

- **Динамическая погрешность измерений**
- погрешность результата измерений, свойственная условиям динамического измерения

3. По взаимодействию с выходным сигналом

1. Мультипликативная
2. Аддитивная

3. По взаимодействию с выходным сигналом

- **Мультипликативная форма представления функции** [*~multiplicative function*] — представление функции нескольких переменных в виде их произведения
- Если погрешность изменяется пропорционально измеряемой величине

3. По взаимодействию с выходным сигналом

- **Аддитивный** (лат. additio прибавление) получаемый путем сложения
- **Аддитивный** - составляющая погрешности средства измерения, не зависящая от значения измеряемой величины

4. По способу выявления

1. Случайная
2. Систематическая
3. Грубая (промах)

4. По способу выявления

- **Случайная погрешность** (измерения) - составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных в определенных условиях.

4. По способу выявления

- ***Систематическая погрешность*** (измерения) - составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

4. По способу выявления

- **Неисключенная систематическая погрешность (НСП)** - составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости.

-
- ***Поправка*** - значение величины, вводимое в показание с целью исключения систематической погрешности

-
- **Промах** - погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

5. По причинам возникновения

1. Методическая
2. Инструментальная
3. Субъективная
4. Внешние

5. По причинам возникновения

- **Погрешность метода** измерений (методическая) - составляющая погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений.

5. По причинам возникновения

- **Инструментальная погрешность** (измерения) - составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений.

5. По причинам возникновения

- **Субъективная погрешность** измерения - составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора.

- **Погрешность (измерения) из-за изменений условий измерения** (внешняя) - составляющая систематической погрешности измерения, являющаяся следствием неучтенного влияния отклонения в одну сторону какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений, от установленного значения.

6. По характеру проявления

1. Постоянная
2. Периодическая

7. По отношению к внешним воздействиям

1. Основная
2. Дополнительная (случайная, прогрессирующая).

7. По отношению к внешним воздействиям

- **Основная погрешность средства измерений** - погрешность средства измерений, применяемого в нормальных условиях.

7. По отношению к внешним воздействиям

- **Дополнительная погрешность средства измерений** - составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений

Погрешности средств измерений

Погрешность средства измерений – разность между показанием средства измерений и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

Исключение систематических погрешностей

Четыре основные группы способов исключения систематических погрешностей :

1. устранение источников погрешностей до начала измерений;
2. способ введения поправок в результат измерения (исключение погрешностей вычислением);
3. исключение погрешностей в процессе измерения способами замещения, компенсации погрешностей по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений;
4. оценка границ систематических погрешностей, если их нельзя исключить.

Описание случайных погрешностей с помощью функций распределения

Рассмотрим результат наблюдений X за постоянной физической величиной Q как случайную величину, принимающую различные значения Z , в различных наблюдениях за ней. Значения будем называть результатами отдельных наблюдений.

Наиболее общая характеристика случайной величины (погрешности) – закон (функция) распределения:

1. *Интегральная*
2. *дифференциальная*

Интегральная функция распределения

результатов наблюдений - зависимость вероятности того, что результат наблюдения X_i в i -м опыте окажется меньше некоторого текущего значения x , от самой величины x :

$$F_x(x) = P(X_i \leq x)$$

Большие буквы используются для обозначения случайных величин:

маленькие - значений, принимаемых случайными величинами.

Свойства функции распределения вероятности:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при $x \in (-\infty; +\infty)$,
- $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$,
- $F_X(x)$ – неубывающая функция x ,
- $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Примеры интегральных функций распределения вероятности

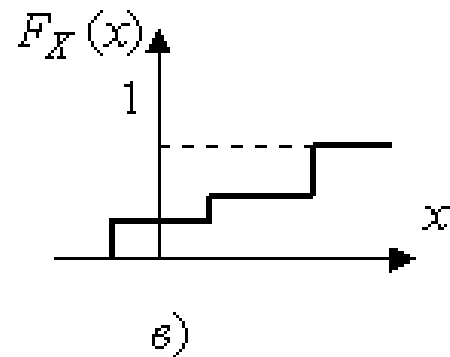
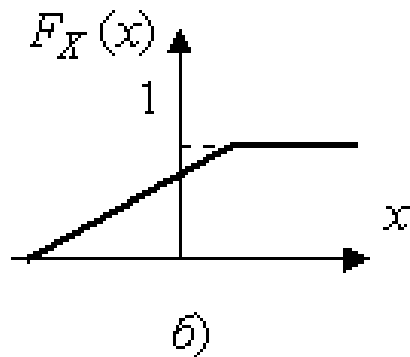
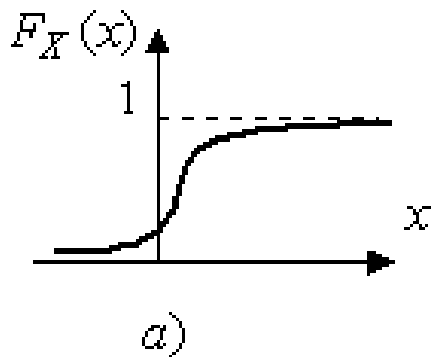


Рис.2

**Дифференциальная функция
распределения** (плотностью распределения
вероятностей):

$$p(\Delta) = d F(\Delta) / d \Delta$$

где $d F(\Delta)$ – вероятность нахождения значений погрешности в интервале $d\Delta$

Физический смысл состоит в том, что произведение $F(\Delta)d\Delta$ представляет вероятность попадания случайной величины X в интервал от x до $(x + dx)$

Вероятность попадания результата наблюдения или случайной погрешности в заданный полуоткрытый интервал равна площади, ограниченной кривой распределения, осью абсцисс и перпендикулярами к ней на границах этого интервала.

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) \text{ или } 0 \leq P \leq 1$$

- Вероятность, с которой погрешность измерений Δ находится в некотором заданном интервале погрешностей (Δ_1, Δ_2) , где Δ_1 и Δ_2 – нижняя и верхняя граница этого интервала

- Если $P=0,6$ и выполнено 100 измерений, то можно считать что 60 значений Δ попадают в интервал (Δ_1, Δ_2)

Для определения вероятности используют:

- и интегральный законы распределения погрешности Δ

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = F(\Delta_1) - F(\Delta_2)$$

- и дифференциальный законы распределения погрешности Δ

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \int p(\Delta) d\Delta$$

- Следует, что вероятность нахождения погрешности Δ на интервале всех возможных значений погрешностей измерений, т.е. в общем случае на интервале $(-\infty; \infty)$:

$$P(-\infty < \Delta < \infty) = \int p(\Delta) d\Delta = 1$$

- *Условие нормирования плотности распределения вероятностей $p(\Delta)$*

-
- **доверительные границы (погрешности измерения)** - верхняя и нижняя границы интервала, внутри которого с заданной вероятностью находится значение **погрешности измерений**

-
- Законы распределения $p(\Delta)$:
 1. Симметричные
 2. Несимметричные

-
- Случайную погрешность можно характеризовать некоторыми свойствами – *моментами*.

- *Начальным моментом k -го порядка* случайной величины x называется математическое ожидание k -й степени случайной величины x , т.е. $a_k = M_x^k$.

Результаты наблюдений в значительной степени сконцентрированы вокруг истинного значения измеряемой величины и по мере приближения к нему элементы вероятности их появления возрастают.

За оценку истинного значения измеряемой величины принимаем координату центра тяжести фигуры, образованной осью абсцисс и кривой распределения, и называемую *математическим ожиданием результатов наблюдений*:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx = m_x$$

- *Центральным моментом k -го порядка* случайной величины x называется величина m_k , определяемая формулой
$$m_k = M(x - M_x)^k.$$
- *дисперсия* - центральный момент второго порядка, $a_2 = M_x^2 = M(x - M_x)^2 = Dx$.

- Дисперсия D характеризует рассеяние погрешностей относительно центра распределения $\Delta=0$.

$$D = \int \Delta^2 p(\Delta) d(\Delta)$$

-
- Дисперсия имеет размерность квадрата погрешности, то используют *среднее квадратическое отклонение (СКО)*

$$\sigma^2 = D$$

Законы распределения погрешностей:

- Нормальный (Гаусса)
- Распределение Стьюдента
- Треугольный (Симпсона)
- Равномерный
- Трапециевидальный

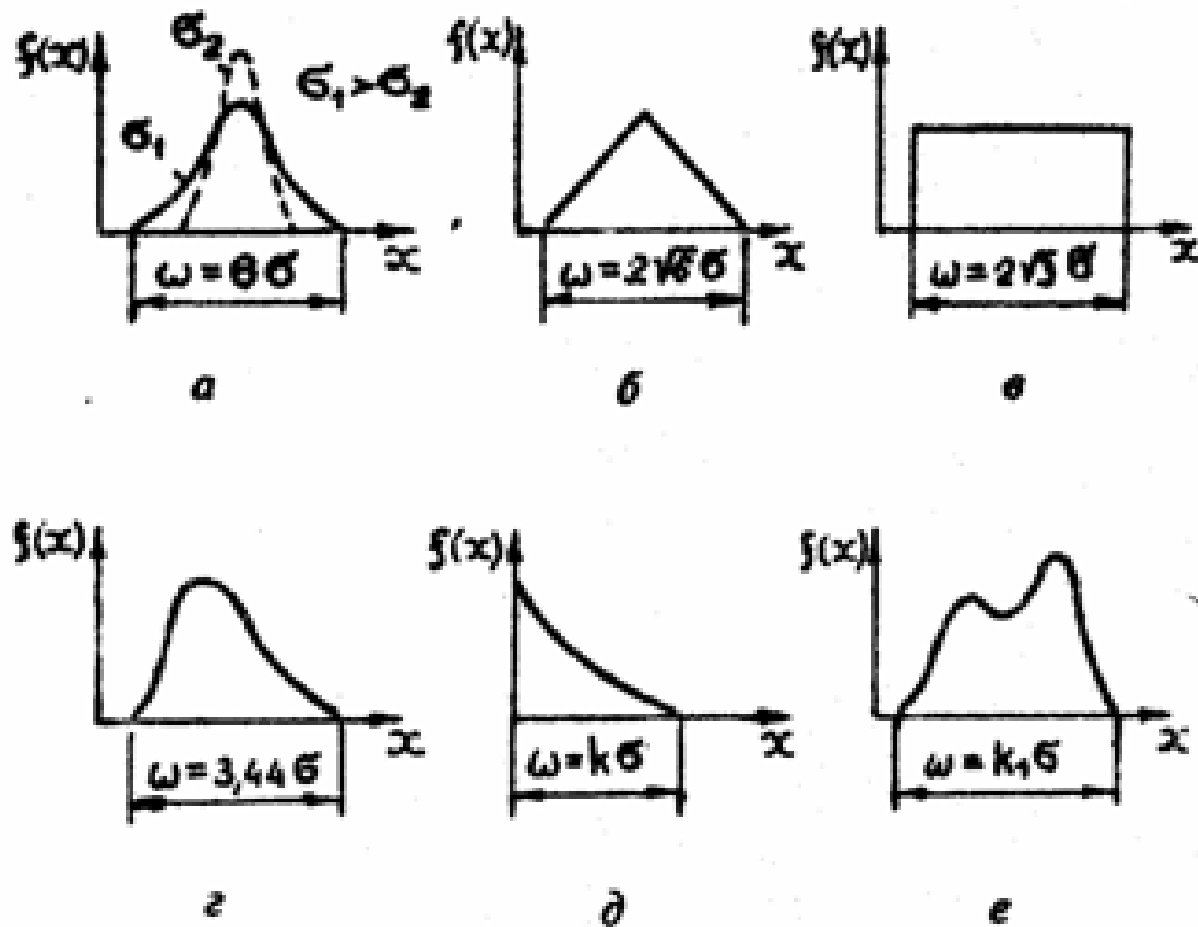


Рис. 2. Примеры графиков законов распределения:
 а — закон Гаусса; б — закон Симпсона; в — закон равномерного распределения; г — закон Релея; д — показательный закон;
 е — композиционный закон

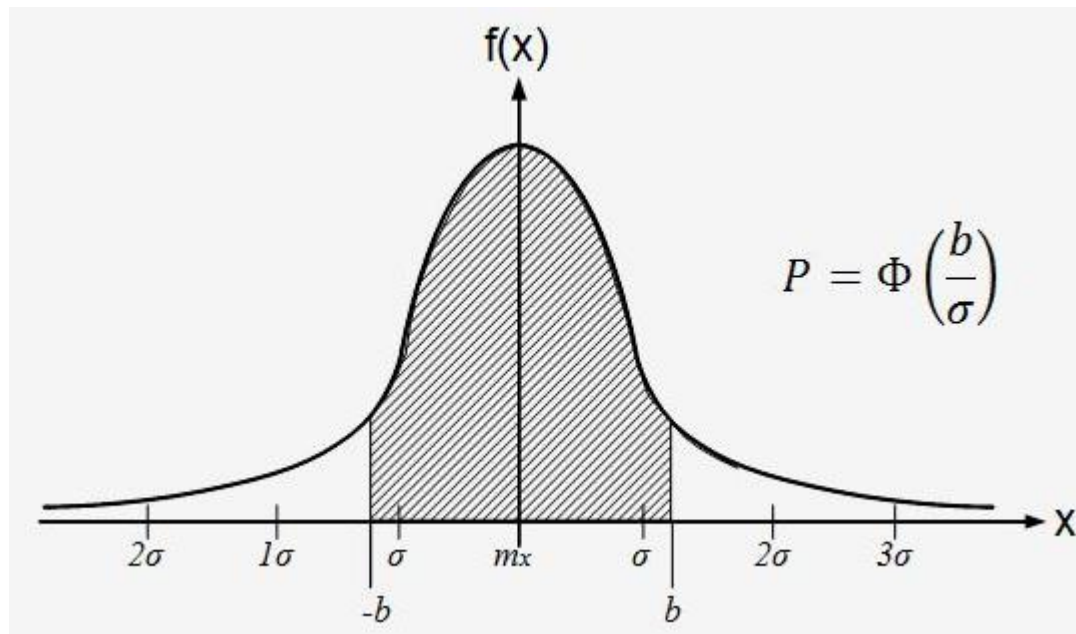
Предельная погрешность измерения в ряду измерений – максимальная погрешность измерения (плюс, минус), допускаемая для данной измерительной задачи.

Примечание - Во многих случаях погрешность $3S$ принимают за предельную, то есть $\Delta_{\text{пр}} = \pm 3S$.

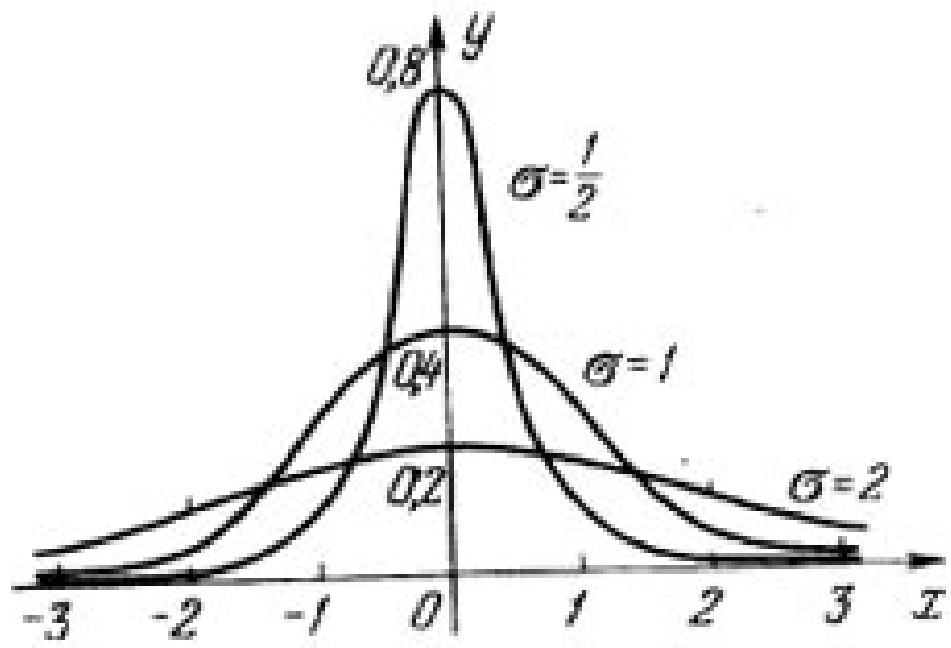
Нормальный закон распределения погрешностей – закон Гаусса

- погрешность может принимать непрерывный ряд значений в интервале $\pm\infty$;
- при выполнении значительного числа наблюдений большие погрешности Δ появляются реже, чем малые, а частота появления погрешностей, идентичных по абсолютной величине и противоположных по знаку, одинакова.

$$P_{\delta}(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}},$$



-
- Чем меньше σ , тем выше точность измерений.
 - По мере уменьшения σ рассеяние случайных погрешностей Δ относительно центра их распределения уменьшается



Вероятность для некоторых интервалов погрешностей

- $P(-2\sigma/3 < \Delta < 2\sigma/3) = 0,5$; тогда погрешность $2\sigma/3$ - *равновероятная*
- $P(-\sigma < \Delta < \sigma) = 0,683$
- $P(-3\sigma < \Delta < 3\sigma) = 0,997$; тогда погрешность 3σ - *максимальная*
- $P(-\infty < \Delta < \infty) = 1$

Закон распределения Стьюдента

- Применяется в процессе обработки результатов небольшого числа измерений ($2 \leq n \leq 20$) многократных наблюдений физической величины, когда случайные погрешности распределены по нормальному закону.

Логарифмически нормальное распределение

- Говорят, что случайная величина имеет логарифмически нормальное распределение (сокращённо **логнормальное распределение**), если её логарифм распределён нормально, то есть если

$$Y = e^X,$$

- Встречается такое распределение во всех задачах, где логарифм рассматриваемой величины можно представить в виде суммы большого количества независимых равномерно малых величин:

$$\ln Y = X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

то есть $Y = \prod_{k=1}^n e^{X_k}$, где e^{X_k} независимы.

-
- Доверительный интервал для выборочного среднего арифметического значения результатов наблюдений, имеющих нормальное распределение, при известной дисперсии можно найти с помощью **распределения Лапласа**

- функция Лапласа

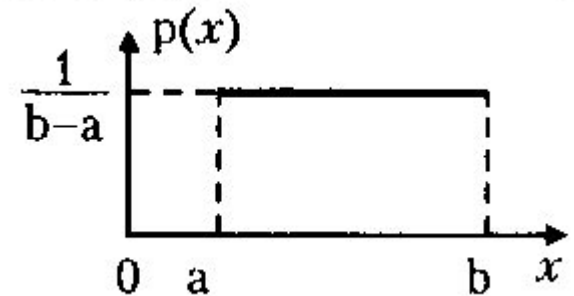
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dz = \frac{P}{2}$$

- Квантиль Лапласа Z

- Доверительный интервал для выборочного среднего арифметического значения измеряемой величины при неизвестном законе распределения результатов измерения и известной дисперсии можно оценить с помощью **неравенства Чебышева**

Формы представления результата измерения

- Закон – **равномерный**
- График плотности вероятности



- Дифференциальная функция

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

- Интегральная функция
- Энтропия
- Дополнительные сведения

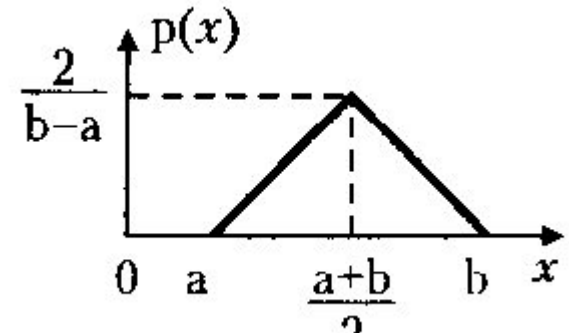
- Функция равномерного закона распределения

$$1/(2a) \text{ при } |\Delta| \leq a, \quad 0 \text{ при } |\Delta| > a$$

Формы представления результата измерения

- Закон – **треугольный (Симпсона)**

- График плотности вероятности



- Дифференциальная функция

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b \end{cases}$$

- Интегральная функция

- Энтропия

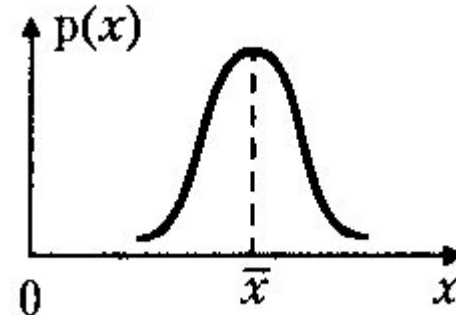
- Дополнительные сведения

- Функция треугольного закона распределения (Симпсона)

$$(1/a^2)(a - |\Delta|) \text{ при } |\Delta| \leq a, 0 \text{ при } |\Delta| > a$$

Формы представления результата измерения

- Закон – **нормальный (Гауса)**
- График плотности вероятности



- Дифференциальная функция

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

- Интегральная функция
- Энтропия
- Дополнительные сведения

- Функция нормального закона распределения (Гаусса)

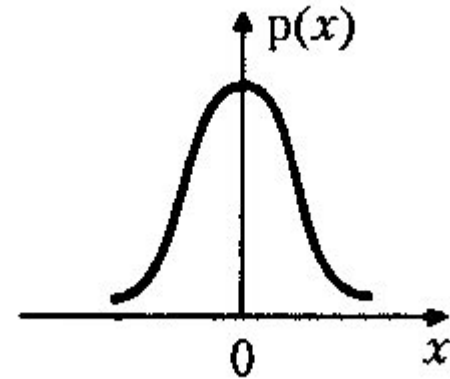
$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

Формы представления результата измерения

- Закон – **нормированный нормальный**
- График плотности вероятности

- Дифференциальная функция

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



- Интегральная функция
- Энтропия
- Дополнительные сведения

Источники погрешностей

- модель объекта измерения (ОИ),
- метод измерения,
- средство измерения (СИ),
- оператор (субъективные погрешности),
- влияющие факторы условий измерений,
- алгоритм обработки результатов наблюдений.

Алгоритм обработки результатов однократных измерений

- Для оценки погрешности *однократного* измерения, используют результаты предварительных исследований условий измерений, погрешностей использованных средств и методов измерений, погрешностей оператора.

Однократные прямые измерения

■ Методика обработки результатов прямых однократных измерений указана в нормативных документах и возможна при известных:

1. составляющие погрешности измерения,
2. закон распределения случайных составляющих - *нормальный*,
3. закон распределения неисключенных систематических погрешностей – *равномерный*.

1. Получение результата прямого однократного измерения X – показание средства измерения.

2. Исключение систематических погрешностей из результатов наблюдений Δ_S :

а) устранение источников погрешностей до начала измерений;

б) определение поправок и внесение их в результата измерения $Q = -\Delta_S$, где Q -поправка;

в) оценка границ неисключенных систематических погрешностей.

3. Определение доверительных границы случайной погрешности при доверительной вероятности $P = 0,95$ ($0,90$; $0,99$).

$$\varepsilon = \pm t_p \cdot \sigma; P = 0,95$$

t_p — коэффициент Стьюдента, определяемый по по заданной доверительной вероятности P

$$t_p = 1 \text{ при } P=0,90$$

$$t_p = 2 \text{ при } P=0,95$$

$$t_p = 3 \text{ при } P=0,99$$

4. Записываем результаты измерения в виде доверительной границы истинного значения

$$X_{ист} = X_{исп} \pm \varepsilon = X_{исп} \pm t_p \cdot \sigma; P = 0,95$$

ИЛИ

$$X_{изм} - \varepsilon \leq X_{ист} \leq X_{изм} + \varepsilon; P = 0,95$$

Однократные косвенные измерения

- **Косвенное измерение** - определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

1. При косвенных измерениях прямым измерениям подвергаются аргументы измеряемой физической величины x_1, x_2, \dots, x_m .

$$X = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Косвенное измерение при линейной зависимости

2. Искомая величина X связана с m измеряемыми аргументами уравнением

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^m b_i x_i$$

где b – постоянные коэффициенты

- погрешность измерения искомой величины при косвенных измерениях:

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \Delta x_i$$

где k – число измеряемых аргументов,
 dy/dx - частные производные или коэффициенты влияния аргументов на искомую величину,
 Δx_i - предельные погрешности измерений соответствующих аргументов

Алгоритм обработки результатов многократных измерений

Многократные равноточные измерения - измерения физической величины одного и того же размера, результат которого получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т.е. состоящее из ряда однократных измерений, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью.

Порядок обработки результатов прямых многократных равноточных измерений изложен в соответствии с *ГОСТ 8.207* и основан на гипотезе о распределении случайных погрешностей результатов по нормальному закону.

1. Получение результатов прямых измерений с многократными независимыми и равноточными наблюдениями $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, где n -количество измерений.

2. Исключение систематических погрешностей из результатов наблюдений Δ_S :

а) устранение источников погрешностей до начала измерений;

б) определение поправок и внесение их в результата измерения $Q = -\Delta_S$, где Q -поправка;

в) оценка границ неисключенных систематических погрешностей.

3. Находим оптимальную оценку истинной величины \bar{X} - *среднее арифметическое* значение (оценка математического ожидания M)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

4. Вычисляем оценку *среднеквадратического отклонения* (СКО) результата наблюдения (оценка рассеяния отдельных результатов).

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

5. Вычисляем оценку случайной погрешности \bar{X}
- *среднее квадратическое отклонение*
погрешности.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

6. Проверяем гипотезу о нормальности распределения результатов наблюдения.

При $n < 15$ нормальность распределения не проверяется.

При $n \geq 20$ результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению и отклонение от среднего арифметического значения не превышает 3σ .

7. Определяем наличие грубых погрешностей и промахов и, если они обнаружены, соответствующие результаты отбраковывают и вычисления повторяют.

- *Промех* – это результат x_n отдельного наблюдения, входящего в ряд из n наблюдений, который для данных условий измерений резко отличается от остальных результатов этого ряда.

- Если оператор в ходе измерения обнаруживает такой результат и достоверно находит его причину, он вправе его отбросить и провести (при необходимости) дополнительное наблюдение взамен отброшенного.
- При обработке уже имеющихся результатов наблюдений произвольно отбрасывать отдельные результаты нельзя, так как это может привести к фиктивному повышению точности результата измерения.

8. Определяем *доверительные границы случайной погрешности* при доверительной вероятности $P = 0,95$ ($0,98$; $0,99$).

Доверительная вероятность P учитывает *степень важности (ответственности) результата измерений*.

Например, если ошибка в измерении может привести к гибели людей или к тяжелым экологическим последствиям, значение P должно быть увеличено.

$$\varepsilon = \pm t_p \cdot \sigma_{\bar{X}} = \pm t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

t_p — коэффициент Стьюдента, определяемый по по заданной доверительной вероятности P и числу наблюдений n .

9. Определяем границы неисключенной систематической погрешности результата измерений.

Составляющие неисключенной систематической погрешности:

- а) погрешности метода измерений
- б) погрешности средств измерений
- в) погрешности, вызванные другими причинами и т.д.

Составляющие неисключенной систематической погрешности рассматриваются как случайные величины.

Границы неисключенной суммарной систематической погрешности результата измерений находят по формуле (при $N > 4$),

$$\Theta = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^N \Theta_i^2}$$

Θ_i – границы отдельных составляющих

N – число неисключенных систематических составляющих

k – коэффициент зависящий от доверительной вероятности (при $P=0,95$ - $k=1,1$ и при $P=0,99$ - $k=1,4$)

1) Если $\frac{\Theta}{S_{\bar{X}}} < 0,8$, то систематической

погрешностью можно пренебречь:

$$\Delta = \varepsilon = \pm t \cdot \sigma_{\bar{X}} ; P = 0,95 (P = 0,99)$$

2) Если же $\frac{\Theta}{S_{\bar{X}}} > 8$, то можно пренебречь

случайной погрешностью, и тогда

$$\Delta = \Theta \quad , \quad P = 0,95 \quad (P = 0,99).$$

3) Если $0,8 \leq \frac{\Theta}{S_{\bar{X}}} \leq 8$, при определении

границ погрешности следует учитывать случайную и систематическую составляющие.

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Theta_i^2}{3} - \sigma_{\bar{X}}^2 \right)}$$

- Границы погрешности результата измерения в этом случае вычисляют по формуле

$$\Delta = \pm K \cdot \sigma_{\Sigma}$$

- Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{\sigma_{\bar{X}} + \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Theta_i^2}{3} \right)}}$$

10. Записываем результаты измерения в виде доверительной границы истинного значения

$$X_{ист} = \bar{X} \pm \varepsilon = \bar{X} \pm t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; P = 0,95$$

или

$$\bar{X} - \varepsilon \leq X_{ист} \leq \bar{X} + \varepsilon; P = 0,95$$

Правила округления и записи результатов измерений

1. В выражении погрешности результата измерения удерживается не более двух значащих цифр, причем последняя цифра обычно *округляется до нуля или пяти*. Погрешность результата измерения указывается *двумя* значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и *одной* - если первая цифра 3 или более.

2. Числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Иначе говоря, результат измерения округляется до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерений оканчивается нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности.

3. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов (первая из отбрасываемых цифр, считая слева направо) *меньше пяти*, то остающиеся цифры не меняются. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются.

4. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов *больше или равна пяти*, но за ней следуют отличные от нуля цифры, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

5. Если отбрасываемая цифра *равна пяти*, а следующие за ней цифры неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

6. Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, поэтапное округление может привести к ошибкам.

7. Округление производят лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним-двумя лишними знаками.