ЛЕКЦИЯ 2 Проекция силы на ось и на плоскость/ Равновесие системы сил. Пара сил

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

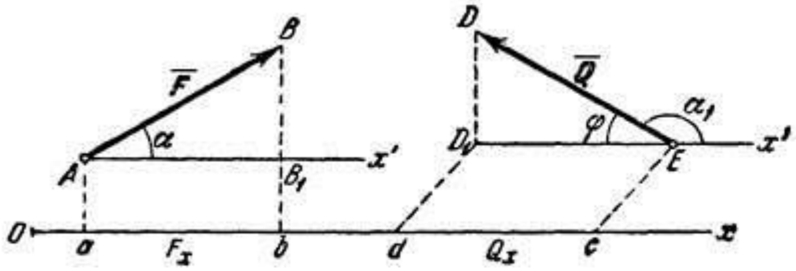


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось Ox будем символом F_x. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:

$$F_x = AB_1 = ab,\quad Q_x = -ED_1 = -ed.$$

Но из чертежа видно, что

$$AB_1 = F\cos\alpha,\quad ED_1 = Q\cos\beta = -Q\cos\alpha_1.$$

Следовательно,

$$F_x = F\cos\alpha,\quad Q_x = -Q\cos\varphi = Q\cos\alpha_1,$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным на правлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

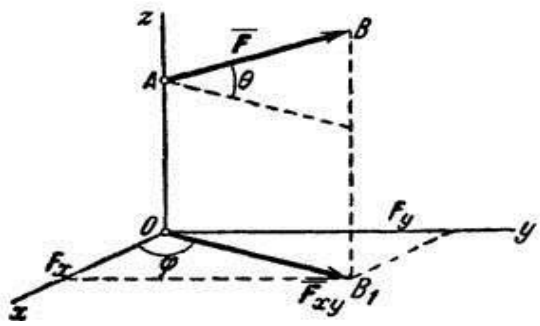


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость Оху называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Оху. По модулю $F_{xy} = F cos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что $F_x = F_{xy} \cdot cos\varphi = F \cdot cos\theta \cdot cos\varphi$, $F_y = F_{xy} \cdot sin\varphi = F \cdot cos\theta \cdot sin\varphi$

Геометрический способ сложения сил

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3,а), откладываем от произвольной точки О(рис. 3,б) вектор Оа, изображающий в выбранном масштабе силу F_1, от точки а откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F_2, от точки b откладываем вектор bc, изображающий силу F_3 и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn, изображающий силу F_n. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил: $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

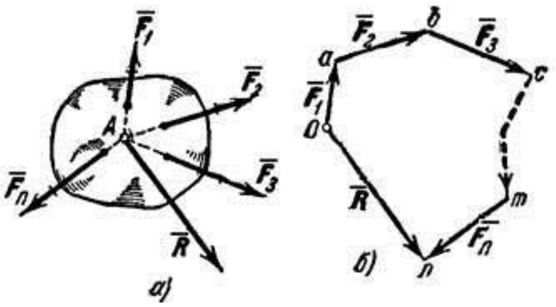


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,б, называется **силовым (в общем случае векторным) многоугольником.** Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ — в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики рассматриваем более простые системы сил переходим к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3,а).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3,а в точке А).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots, \bar{F}_n$ сходятся в точке А (рис. 3,а), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке А, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник, отличный от первого.
2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.

3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Равновесие системы сходящихся сил

Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое называется движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода:

1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции».

2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1.**Геометрическое условие равновесия.** Так как равнодействующая $\bar{R}$ сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то $\bar{R}$ может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы, сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. **Аналитические условия равновесия.** Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам: $\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0.$

Равенства выражают **условия равновесия в аналитической форме:** для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия $\sum F_{kx} = 0,$ $\sum F_{ky} = 0,$ Равенства выражают также необходимые условия (или
уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

Теорема о трех силах. Уравновешенная плоская система трех непараллельных сил является сходящейся.

Условие «плоская» в формулировке теоремы не является необходимым, можно убедиться, что любая уравновешенная система трех сил всегда будет плоской. Это следует из условий равновесия произвольной пространственной системы сил, которые будут рассмотрены далее. **Теорема о параллельном переносе силы.**

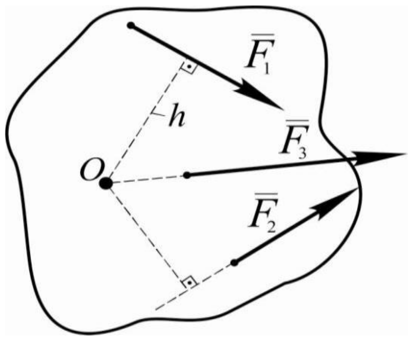
Одной из основных задач, решаемых статикой, является замена одной системы сил другой – эквивалентной ей.

Такая процедура позволяет все многообразие систем сил свести к простейшим каноническим системам, классифицировать их и получить уравнения равновесия, необходимые для решения практических задач. Ключевую роль в проведении таких преобразований систем сил играет следующая теорема, называемая **Лемма Пуансо**.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам. Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке.

2.1. Момент силы относительно точки.

Под действием силы тело может поворачиваться относительно какого-то центра (точки). В этом случае вращательный эффект силы характеризуется ее *моментом.*



Очевидно, что в этом случае эффективность действия силы будет зависеть от модуля силы F_1 и кратчайшего расстояния от линии действия силы до центра т. О.

1) Таким образом, ***моментом силы относительно выбранного центра (точки) на плоскости*** называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на плечо.

2) ***Плечом силы*** называется перпендикуляр, опущенный из точки (центра), относительно которой рассматривается (берется) момент силы, на линию действия силы.

Момент силы служит для количественной оценки вращательного эффекта силы. 3) Момент силы F относительно центра *O* будем обозначать символом $m_0(F)$. Следовательно,

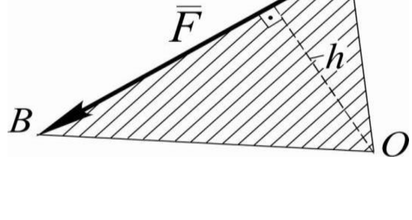
$$\boxed{m_0(F) = \pm F \cdot h} \quad (1)$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак *плюс*, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и знак *минус,* – если по ходу.

Момент силы относительно некоторого центра равен нулю, если линия действия этой силы проходит через этот центр.

Момент силы относительно некоторого центра не изменится, если силу перенести по линии ее действия в любое другое место.

Выражение момента силы с помощью площади треугольника.



Дана сила F и центр О. Определим площадь Δ АВО.

$$S_{\Delta\, ABO} = \frac{1}{2}F \cdot h \rightarrow \ 2S_{\Delta\, ABO} = F \cdot h.$$

Сравним с выражением момента силы $m_0(\bar{F}) = F \cdot h$.

Из сравнения получим $\boxed{m_0(\bar{F}) = 2S_{\Delta\, ABO}}$

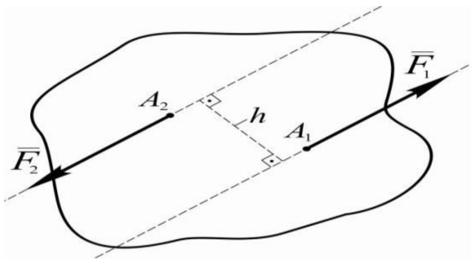
<u>Момент силы относительно некоторой точки выражается удвоенной площадью Δ, основанием которого является вектор силы, а высотой – плечо силы относительно заданной точки.</u>

Теорема о моменте равнодействующей силы (теорема Вариньона).

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторого центра, лежащего в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.

Теория пар сил на плоскости.

Пара сил. Момент пары.



Парой сил называется две равные по модулю параллельные, но противоположно направленные силы. (**F**$_1$. **F**$_2$) - пара сил.

Под действием пары сил тело не находится в равновесии – *оно вращается*.

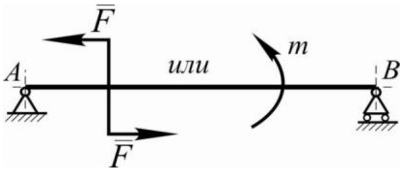
Эффективность вращательного действия пары сил выражается *моментом пары.*

Момент пары сил равен произведению модуля одной из сил на плечо пары и берется со знаком плюс, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и со знаком минус – если по ходу.

Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару.

Т. о. $\boxed{m_0\ F_1;\ F_2\ = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h}$

Пара сил обозначается следующим образом:



Момент пары учитывается только в уравнении моментов.

Условия равновесия плоской системы пар.

Если момент результирующей пары М=0, то твердое тело будет находиться в равновесии, при этом $\boxed{\Sigma m_i = 0}$

Для равенства плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы была равна нулю.

Приведение произвольной плоской системы сил к заданному центру (Лемма Пуансо)

Совокупность сил, расположенных на плоскости как угодно, называется ***произвольной плоской системой сил.***

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу $\bar{F}$ (рис.) перенести в какую-нибудь точку О, не расположенную на линии действия.

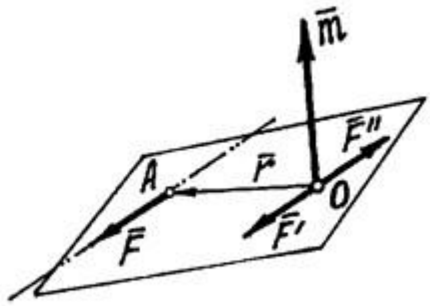


Рис.

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы $F' = F'' = F$

$\bar{F}' = \bar{F}$

и параллельные силе $\bar{F}$, и равные ей по величине:

В результате получим силу, приложенную к точке О, т. е. как бы перенесли заданную силу из точки А в точку О, но при этом появилась пара, образованная силами и $\bar{F}$ $\bar{F}''$. Момент этой пары $\bar{m} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F})$, равен моменту заданной силы $\bar{F}$ относительно точки О. Этот процесс замены силы $\bar{F}$ равной ей силой $\bar{F}'$ и парой называется приведением силы к точке О.

Точка О называется **точкой приведения**; сила $\bar{F}'$, приложенная к точке приведения, – **приведённой силой**. Появившаяся пара – **присоединённой парой**.