

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Физика и химия»

**Л. А. Фишбейн**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Квантовая физика и физика атома**

Екатеринбург  
Издательство УрГУПС  
2012

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Физика и химия»

**Л. А. Фишбейн**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Квантовая физика и физика атома**

Сборник задач  
для студентов очной, заочной форм обучения  
и дистанционного образования

Екатеринбург  
Издательство УрГУПС  
2012

УДК 531  
Ф 68

**Фишбейн, Л. А.**

Ф 68 Подготовка к Интернет-экзамену по физике в сфере профессионального образования. Квантовая физика и физика атома : сб. задач /Л. А. Фишбейн. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012. – 37, [3] с.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов к Интернет-экзамену по квантовой физике и физике атома в сфере профессионального образования. Содержится теоретический материал и тестовые задания с решениями. Все тесты взяты с сайта [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru). Материал разбит на отдельные темы в соответствии с тематической структурой АПИМ (аттестационно-педагогические и измерительные материалы).

УДК 531

*Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.*

*Автор:* Л. А. Фишбейн, доцент кафедры «Физика и химия»,  
канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

*Рецензент:* В. К. Першин, зав. кафедрой «Физика и химия»,  
д-р физ.-мат. наук, УрГУПС

## Оглавление

Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы .....	4
Тематическая структура АПИМ.....	4
Кодификатор .....	4
Спектры атома водорода. Правило отбора .....	7
Тесты с решениями.....	13
Дуализм свойств микрочастиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга .....	19
Тесты с решениями.....	20
Уравнение Шредингера (общие свойства).....	26
Тесты с решениями.....	27
Уравнение Шредингера (конкретные ситуации).....	31
Тесты с решениями.....	34

## Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	Федеральный компонент	
ЕН.Ф.03	Физика: основы атомной физики; квантовая физика: состояние частиц в квантовой механике, дуализм волн и частиц, соотношение неопределенностей, электронное строение атомов, молекул и твердых тел, теория химической связи	400

### Тематическая структура АПИМ

N ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	N задания	Тема задания
6	Квантовая физика, физика атома	25	Спектр атома водорода. Правило отбора
		26	Дуализм свойств микрочастиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга
		27	Уравнение Шредингера (общие свойства)
		28	Уравнение Шредингера (конкретные ситуации)

### КОДИФИКАТОР

Кодификатор элементов содержания дисциплины «Физика» цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин высшего профессионального образования

В кодификаторе зафиксирована преемственность между содержанием дисциплины «Физика» в государственных образовательных стандартах (ГОС) высшего профессионального образования (ВПО) и аттестационных педагогических измерительных материалах (АПИМ), используемых в рамках Интернет-экзамена в сфере профессионального образования. Кодификатор отражает содержание дисциплины в ГОС и содержит контролируемое содержание дисциплины, перечень контролируемых учебных элементов. Преемственность дидактических единиц, зафиксированных в кодификаторе, положена в основу содержания АПИМ единого Федерального банка заданий, используемого для проведения Интернет-экзамена в сфере профессионального образования.

**Контролируемое содержание дисциплины** включает код элемента содержания и наименование элемента содержания (темы задания). *Первый разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер группы заданий, связанный с объемом часов в ГОС, выделяемых на изучение дисциплины. В дисциплине «Физика» предложено выделить три группы (1 группа – от 100 до 279 часов, 2 группа – от 280 до 699 часов, 3 группа – от 700 до 1000 часов). *Второй разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер дидактической единицы (раздела) дисциплины, а *третий разряд в записи кода элемента со-*

*держания* идентифицирует номер темы задания. Все коды элементов содержания и их наименование распределяются в предложенном порядке для каждой дидактической единицы.

**Перечень контролируемых учебных элементов** отражает требования к знаниям, которые студент должен приобрести в результате освоения дисциплины или отдельных ее разделов. При этом уровень сложности заданий должен быть **БАЗОВЫМ**, то есть, все предлагаемые задания должны контролировать обязательную подготовку студентов на уровне требований, задаваемом государственными образовательными стандартами.

Ниже приведен кодификатор для 2 группы заданий (от 280 до 699 часов).

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен...
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
<b>6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА, ФИЗИКА АТОМА</b>		
2.6.1	Спектр атома водорода. Правило отбора	<b>знать:</b> энергетический спектр атома водорода; обозначение состояний электрона; закон сохранения момента импульса в системе фотон и электрон; спиновый момент импульса фотона (в единицах $\hbar$ ); формулы спектральных серий; связь изменения энергии электрона и частоты излучаемого кванта; <b>уметь:</b> анализировать информацию, представленную в виде диаграммы, вычислять частоты переходов
2.6.2	Дуализм свойств микрочастиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	<b>знать:</b> соотношение неопределенностей Гейзенберга для координат и проекций импульса микрочастицы и для энергии и времени жизни микрочастицы в некотором состоянии; <b>уметь:</b> пользуясь соотношением неопределенностей, вычислять неопределенности физических величин
2.6.3	Уравнения Шредингера (общие свойства)	<b>знать:</b> вид нестационарного уравнения Шредингера; вид стационарного уравнения Шредингера для линейного гармонического осциллятора, для частицы в потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками, для электрона в водородоподобной системе

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов Студент должен...
Код элемента содержания	Элементы содержания дисциплины (тема)	
2.6.4	Уравнение Шредингера (конкретные ситуации)	<b>знать:</b> плотность вероятности обнаружения микрочастицы; <b>уметь:</b> находить вероятность обнаружения электрона в некоторой области одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками

## СПЕКТРЫ АТОМА ВОДОРОДА. ПРАВИЛО ОТБОРА

Атом водорода Н – один протон с зарядом  $e$  в ядре и один электрон с зарядом  $-e$ , движущийся в кулоновском электрическом поле ядра. Водородоподобные ионы –  $\text{He}^+(Z = 2)$ ,  $\text{Li}^{++}(Z = 3)$ ,  $\text{Be}^{+++}(Z = 4)$  и т. д. имеют ядро с зарядом  $Ze$  и один электрон,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Формула Бальмера – Ридберга** для линейчатого спектра атома водорода

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad \lambda = \frac{c}{\nu}, \quad \lambda = \frac{c}{R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)},$$

где  $\nu, \lambda, c$  – частота, длина волны и скорость света в вакууме,  $R', R$  – постоянные Ридберга ( $R = 3,290 \cdot 10^{15} \text{с}^{-1}$ ,  $R' = R/c = 1,097 \cdot 10^7 \text{м}^{-1}$ );  $n < m$  – положительные целые числа. Для водородоподобных ионов –

$$\nu = ZR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad \lambda = \frac{1}{ZR'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)},$$

где  $Z$  – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева, число протонов в ядре. Группа линий с одинаковым числом  $n$  называется **серией**. Серии линий водородного спектра:  $n = 1$  – серия Лаймана,  $n = 2$  – серия Бальмера,  $n = 3$  – серия Пашена,  $n = 4$  – серия Брэкета,  $n = 5$  – серия Пфунда,  $n = 6$  – серия Хэмфри и т. д.

### Постулаты Бора

**I постулат Бора** (постулат стационарных состояний): в атоме существует набор стационарных состояний, находясь в которых атом не излучает электромагнитные волны. Стационарным состояниям соответствуют стационарные орбиты (траектории), по которым электроны движутся с ускорением.

**II постулат Бора** (правило квантования орбит): в стационарном состоянии атома электрон, движущийся по круговой орбите, имеет дискретный (квантовый) набор значений момента импульса относительно ядра

$$L = m_e v r = \hbar n, n = 1, 2, 3 \dots$$

Здесь  $m_e$  – масса электрона,  $v, r$  – его скорость и радиус  $n^{\text{ой}}$  орбиты,  $\hbar = h/2\pi$ .

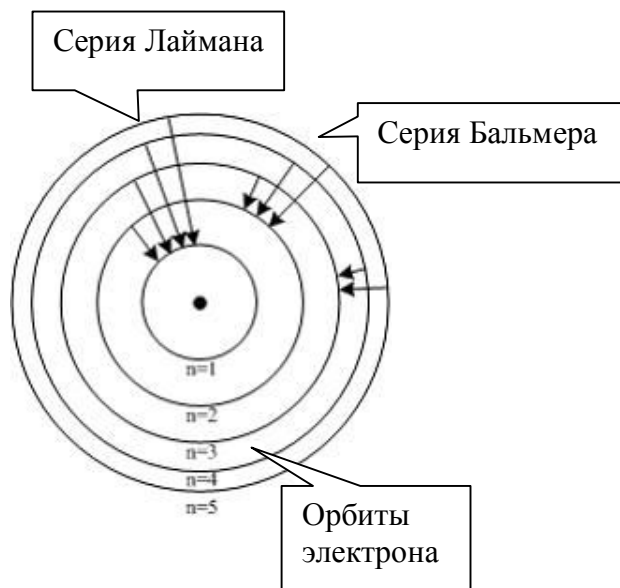
**III постулат Бора** (правило частот): при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Излучение фотона происходит при переходе атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией. При обратном переходе происходит поглощение фотона. Энергия  $h\nu$  фотона равна модулю разности энергий в двух состояниях атома

$$|E_n - E_m| = h\nu \quad \left(\lambda = \frac{hc}{|E_n - E_m|}\right).$$



$E_n$  – энергия атома (или электрона на орбите) в состоянии с номером (квантовым числом)  $n$ .

### Результаты расчета $E_n$ и $r_n$ на основании постулатов Бора

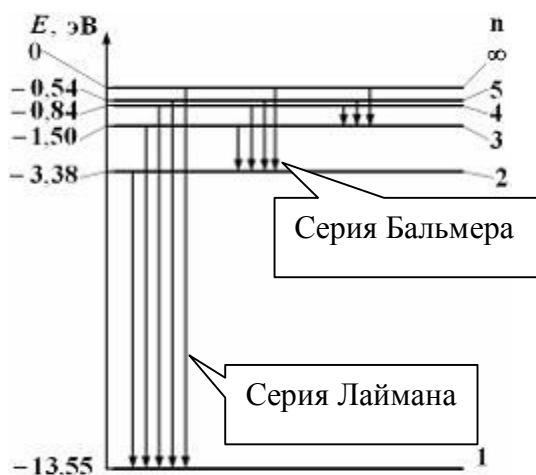


#### Радиус $n^{\text{ой}}$ стационарной орбиты

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2 = r_1 n^2 \text{ – для водорода,}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Z m_e e^2} n^2 = \frac{r_1}{Z} n^2 \text{ – для ионов,}$$

$r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  м – боровский радиус основной орбиты электрона в водороде



#### Энергия на $n^{\text{ой}}$ стационарной орбите

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \text{ – для водорода,}$$

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = \frac{E_1 Z^2}{n^2} \text{ – для ионов,}$$

$E_1 = -13,6$  эВ – энергия основного уровня для водорода.  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Излучение – стрелка ↓, поглощение – ↑.

#### Ионизация – процесс превращения атома в

ион или «вылетания» электрона из атома; происходит когда энергия атома (электрона в атоме) становится неотрицательной ( $E \geq 0$ ), а вылетевший электрон – **свободным** и может иметь любое значение энергии.

Минимальная энергия ионизации – энергия, передаваемая атому (электрону в атоме) для перехода из основного состояния  $E_1$  в состояние  $E_\infty = 0$ .

Минимальная энергия ионизации водорода –  $E_{\text{ион}} = E_\infty - E_1 = 0 - (-13,6) = 13,6$  эВ, потенциал ионизации –  $\varphi_{\text{ион}} = E_{\text{ион}}/e = 13,6$  В.

Минимальная энергия ионизации ионов –  $E_{\text{ион}} = E_\infty - E_1 = 0 - Z^2(-13,6) = Z^2 \cdot 13,6$  эВ, потенциал ионизации –  $\varphi_{\text{ион}} = E_{\text{ион}}/e = Z^2 \cdot 13,6$  В.

Из постулатов Бора можно определить константу Ридберга  $R$

$$\nu = \frac{|E_1|}{h} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0 \hbar^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

**Минимальная длина** волны излучения (максимальная частота и энергия перехода) серии с номером  $n$  (переход между  $m = \infty$  и  $n$  уровнями):

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R' \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)} = \frac{1}{R' \frac{1}{n^2}} = \frac{hc}{E_\infty - E_n} = -\frac{hc}{E_n}.$$

**Максимальная длина** волны излучения (минимальная частота и энергия перехода) серии с номером  $n$  (переход между  $m = n + 1$  и  $n$  (соседними) уровнями):

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)} = \frac{hc}{E_{n+1} - E_n}.$$

### Атом водорода. Пространственное квантование

Состояние электрона в атоме определяется его волновой функцией – решением уравнения Шредингера.  $\psi_{nlm_l m_s}(r, \vartheta, \varphi)$  – волновая функция в сферической системе координат. Функция зависит от значения целых (квантовых) чисел  $n, l, m_l$  и полуцелого  $m_s$ .

### Квантовые числа

$n$  – **главное** квантовое число,  $n = 1, 2, 3 \dots$  Определяет **энергию** стационарного состояния электрона в атоме. Связано с **размером** электронного облака.

$l$  – **орбитальное** (азимутальное) квантовое число,  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Определяет орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона. (Связаны с «движением» электрона по орбите). Определяет **форму** электронного облака.

$m_l$  – орбитальное **магнитное** квантовое число,  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ . Определяет проекцию орбитального момента импульса и орбитального магнитного момента электрона на выделенное направление в пространстве.

$s$  – **спиновое** квантовое число,  $s = \frac{1}{2}$ . Определяет спиновый момент импульса и спиновый магнитный момент электрона. (Связаны с «вращением» электрона вокруг своей оси).

$m_s$  – спиновое магнитное квантовое число,  $m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ . Определяет проекцию спинового момента импульса и спинового магнитного момента электрона на выделенное направление в пространстве.

**Физические величины, зависящие от определенных квантовых чисел**

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 n^2} \leq 0$$

– энергия электрона в атоме водорода (в отсутствии внешнего поля). Формула аналогична полученной из постулатов Бора.

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad M_l = (e/2m_e)\hbar\sqrt{l(l+1)}$$

– модуль орбитального момента импульса и орбитального магнитного момента электрона.

$$L_{lz} = \hbar m_l, \quad M_{lz} = (e/2m_e)\hbar m_l$$

– проекция орбитального момента импульса и орбитального магнитного момента электрона на выделенное направление в пространстве.

$$\cos\vartheta = \frac{L_{lz}}{L_l} = \frac{\hbar m_l}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

– дискретный набор углов между выделенным направлением и вектором  $\vec{L}_l$ .

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad M_s = (e/m_e)\hbar\sqrt{s(s+1)}$$

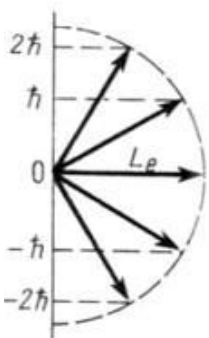
– модуль спинового момента импульса и спинового магнитного момента электрона.

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad M_{sz} = (e/m_e)\hbar m_s$$

– проекция спинового момента импульса и спинового магнитного момента электрона на выделенное направление в пространстве.

$$\cos\vartheta = \frac{L_{sz}}{L_s} = \frac{\hbar m_s}{\hbar\sqrt{s(s+1)}} = \frac{m_s}{\sqrt{s(s+1)}} = \pm \frac{s}{2\sqrt{s(s+1)}}$$

– дискретный набор углов между выделенным направлением и вектором  $\vec{L}_s$ .



**Пример.** Пространственная ориентация момента импульса  $\vec{L}_l$ . Так как  $L_{lz} = \hbar m_l$  и  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , то, по рисунку, максимальное число перед  $\hbar m_{l_{\max}} = l = 2$  и  $m_l = -2, -1, 0, 1, 2$ . Тогда

$$\cos\vartheta = \frac{L_{lz}}{L_l} = \frac{\hbar m_l}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m_l}{\sqrt{6}}$$

Углы между вектором  $\vec{L}_l$  и выделенным направлением – осью Y, направленной вверх:

$$m_l = -2, \cos\vartheta_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \vartheta_1 = 145^\circ, \quad m_l = -1, \cos\vartheta_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \vartheta_2 \approx 114^\circ,$$

$$m_l = 0, \cos\vartheta_3 = 0, \vartheta_3 = 90^\circ, \quad m_l = 1, \cos\vartheta_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \vartheta_4 \approx 66^\circ,$$

$$m_l = 2, \cos\vartheta_5 = \frac{2}{\sqrt{6}}, \vartheta_5 \approx 35^\circ.$$

Под выделенным направлением чаще всего понимается направление магнитного поля.

Состояние электрона в атоме определяет волновая функция  $\psi_{nlm_l m_s}$ . Волновая функция определяется набором  $n, l, m_l, m_s$  значений квантовых чисел. При обозначении состояния электрона в атоме указывают только **значение  $n$  – числом и  $l$  – буквой**.

Значение $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$	0 1 2 3 4 5
Спектроскопическое обозначение	<i>s p d f g h</i>

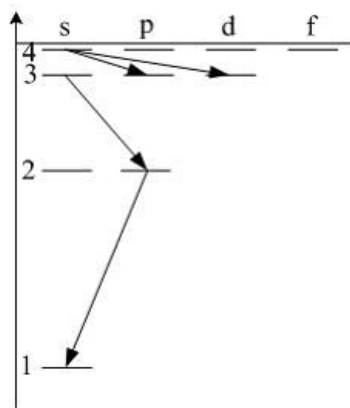
**Пример:** электрон в атоме в состоянии  $2p$ , т. е. электрон с  $n = 2$  и  $l = 1$ .

### Правила отбора

При переходе электрона в атоме из одного состояния в другое из закона сохранения энергии и импульса и момента импульса следует, что квантовые числа  $l$  и  $m$  должны меняться следующим образом:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1.$$

**Пример.** Какие переходы электрона в атоме водорода запрещены



$$4s \rightarrow 3d, l = 0 \rightarrow l = 2,$$

$$3s \rightarrow 2p, l = 0 \rightarrow l = 1,$$

$$4s \rightarrow 3p, l = 0 \rightarrow l = 1,$$

$$2p \rightarrow 1s, l = 1 \rightarrow l = 0.$$

Очевидно, что  $4s \rightarrow 3d$ , так как в этом случае  $\Delta l = 2$ .

### Многоэлектронные атомы

Состояние атома  $\equiv$  конфигурация всех электронов атома  $\equiv$  запись набора значений двух квантовых чисел **всех** электронов атома в основном состоянии.

**Принцип Паули:** в атоме **не может быть** двух и более электронов, имеющих одинаковый набор всех квантовых чисел  $n, l, m_l, m_s$ .

Электроны с одним и тем же  $n$ , образуют электронную оболочку. Электроны с одним и тем же  $l$ , образуют электронную подоболочку.

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , всего  $n$  значений,  
 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , всего  $2l + 1$  значений,  
 $s = 1/2$ , всего 1 значение,  
 $m_s = +1/2, -1/2$ , всего 2 значения.

Каждому  $n$  соответствует  $2n^2$  значений наборов квантовых чисел  $l, m_l$  и  $m_s$ .  
 Каждому  $l$  соответствует  $2(2l + 1)$  значений наборов квантовых чисел  $m_l$  и  $m_s$ .  
 В первой оболочке с  $n = 1$  может находиться  $2 \cdot 1^2 = 2$  электрона. Они же составляют единственную подоболочку с  $l = 0$ , в которую входят  $2(2 \cdot 0 + 1) = 2$  электрона.

Во второй оболочке с  $n = 2$  может находиться  $2 \cdot 2^2 = 8$  электронов. Они же составляют две подоболочки: с  $l = 0$ , в которую входят  $2(2 \cdot 0 + 1) = 2$  электрона, и с  $l = 1$  в которую входят  $2(2 \cdot 1 + 1) = 6$  электронов и т. д. Подоболочки могут быть не заполнены до конца.

### Пример

Электронная конфигурация  $1s^2 2s^2 2p$  основного состояния электронов в атоме бора (В) означает:

$1s^2$ - два электрона в состоянии с  $n = 1$  и  $l = 0$  ( $m_l = 0, s = 1/2, m_s = 1/2$  и  $m_s = -1/2$ ),

$2s^2$ - два электрона в состоянии с  $n = 2$  и  $l = 0$  ( $m_l = 0, s = 1/2, m_s = 1/2$  и  $m_s = -1/2$ ),

$2p$ - один электрон в состоянии с  $n = 2$  и  $l = 1$  ( $m_l = -1, s = 1/2, m_s = 1/2$  или  $m_s = -1/2$ ).

### Примеры электронных конфигураций некоторых многоэлектронных атомов

Н –  $1s$ , 1 электрон,

He –  $1s^2$ , 2 электрона,

Li –  $1s^2 2s$ , 3 электрона,

Be –  $1s^2 2s^2$ , 4 электрона,

B –  $1s^2 2s^2 2p$ , 5 электронов,

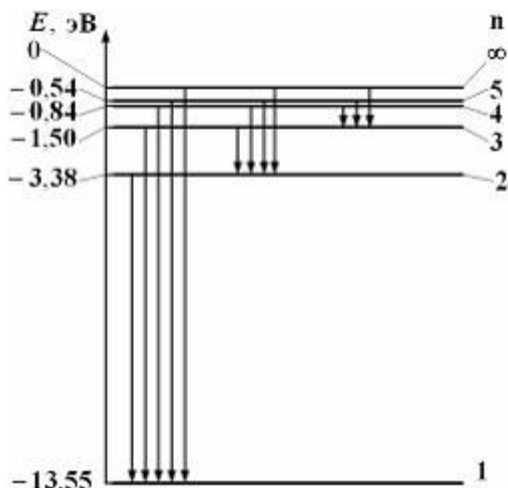
C –  $1s^2 2s^2 2p^2$ , 6 электронов,

N –  $1s^2 2s^2 2p^3$ , 7 электронов,

O –  $1s^2 2s^2 2p^4$ , 8 электронов и т. д.

## Тесты с решениями

1. На рисунке дана схема энергетических уровней атома водорода. Наибольшая длина волны спектральной линии (в нм) серии Лаймана равна ...**122** ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с).



### Решение

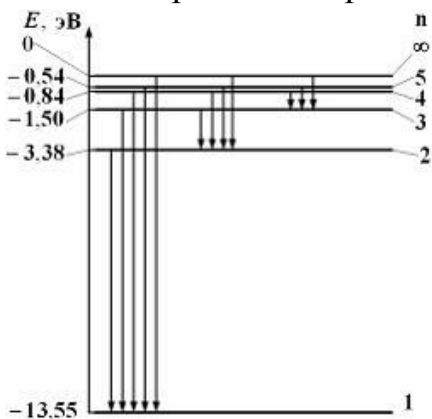
Серию Лаймана дают переходы в состояние с  $n = 1$  с излучением фотона. Учитывая связь длины волны и частоты  $\lambda \cdot \nu = c$  и третий постулат Бора  $h\nu = |E_n - E_m|$  получаем

$$\lambda = \frac{hc}{E_m - E_1}.$$

Тогда

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}}{(13,55 - 3,38) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.22 \cdot 10^{-7} = 122 \text{ нм}.$$

2. На рисунке дана схема энергетических уровней атома водорода, а также условно изображены переходы электрона с одного уровня на другой, сопровождающиеся излучением кванта энергии. В ультрафиолетовой области спектра эти переходы дают серию Лаймана, в видимой области – серию Бальмера, в инфракрасной области – серию Пашена и т.д. Отношение минимальной частоты линии в серии Бальмера  $\nu_{\min \text{Б}}$  к максимальной частоте линии в серии Пашена  $\nu_{\max \text{Л}}$  спектра атома водорода равно ...**5/4**.



## Решение

Серию Пашена дают переходы на третий энергетический уровень  $n = 3$ , серию Бальмера – на второй уровень  $n = 2$ . Воспользуемся формулой Бальмера-Ридберга

$$\nu = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Тогда

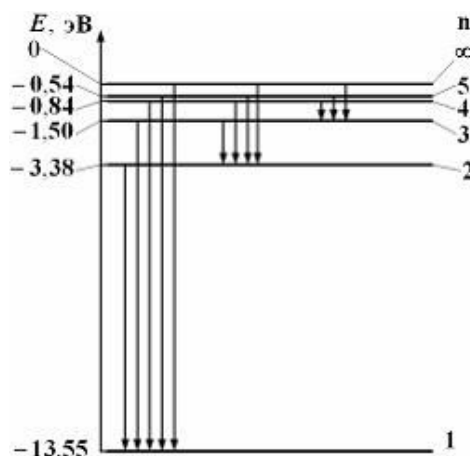
$$\nu_{\max\Pi} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{R}{9},$$

$$\nu_{\min\text{Б}} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5R}{36}.$$

$$\frac{\nu_{\min\text{Б}}}{\nu_{\max\Pi}} = \frac{5R}{36} \cdot \frac{9}{R} = \frac{5}{4}.$$

**Примечание.** На сайте [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru) правильный ответ – 4/5.

3. На рисунке дана схема энергетических уровней атома водорода. Наименьшая длина волны спектральной линии (в нм) серии Пашена равна ..... **829** ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с).



## Решение

Серию Пашена дают переходы в состояние с  $n = 3$ . Учитывая связь длины волны и частоты  $\lambda \cdot \nu = c$  и третий постулат Бора  $h\nu = |E_n - E_m|$

$$\lambda = \frac{hc}{E_m - E_3}.$$

Тогда

$$\lambda_{\min\Pi} = \frac{hc}{E_\infty - E_3} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}}{(0 - (-13,55)) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 8.29 \cdot 10^{-7} = 829 \text{ нм}.$$

4. Главное квантовое число  $n$  определяет ...

**энергию стационарного состояния электрона в атоме**

орбитальный механический момент электрона в атоме

собственный механический момент электрона в атоме

проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление

## Решение

Собственные функции электрона в атоме водорода  $\psi_{nlm_l m_s}(r, \vartheta, \varphi)$  содержат четыре параметра:  $n, l, m_l, m_s$ . Параметр  $n$  называется главным квантовым числом, параметры  $l$  и  $m_l$  – орбитальным (азимутальным) и орбитальным магнитным квантовыми числами соответственно. Главное квантовое число  $n$  определяет энергию стационарного состояния электрона в атоме.

5. Собственные функции электрона в атоме водорода  $\psi_{nlm_l m_s}(r, \vartheta, \varphi)$  содержат четыре параметра:  $n, l, m_l, m_s$ . Параметр  $n$  называется главным квантовым числом, параметры  $l$  и  $m_l$  – орбитальным (азимутальным) и орбитальным магнитным квантовыми числами соответственно. Магнитное квантовое число  $m_l$  определяет ...

## проекцию орбитального момента импульса электрона на некоторое направление

энергию электрона в атоме водорода

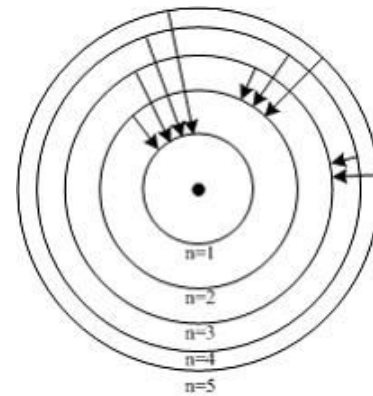
модуль орбитального момента импульса электрона

модуль собственного момента импульса электрона

## Решение

Магнитное квантовое число  $m$  определяет проекцию орбитального момента импульса электрона на некоторое направление:  $L_{lz} = m_l \hbar$ , причем  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ .

6. На рисунке схематически изображены стационарные орбиты электрона в атоме водорода согласно модели Бора, а также показаны переходы электрона с одной стационарной орбиты на другую, сопровождающиеся излучением кванта энергии. В ультрафиолетовой области спектра эти переходы дают серию Лаймана, в видимой – серию Бальмера, в инфракрасной – серию Пашена. Наибольшей длине волны кванта в серии Лаймана (для переходов, представленных на рисунке) соответствует переход ...



$$n = 2 \rightarrow n = 1$$

$$n = 3 \rightarrow n = 2$$

$$n = 4 \rightarrow n = 3$$

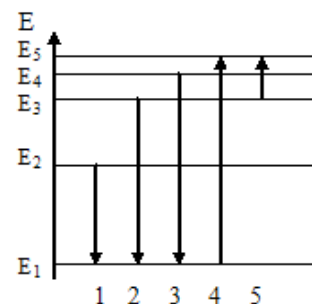
$$n = 5 \rightarrow n = 1$$

## Решение

Серию Лаймана дают переходы на первый энергетический уровень  $n = 1$ . Наибольшая длина волны кванта света (наименьшая частота) при поглощении возникает при переходе между соседними уровнями, т. е.  $n = 2$  и  $n = 1$ .



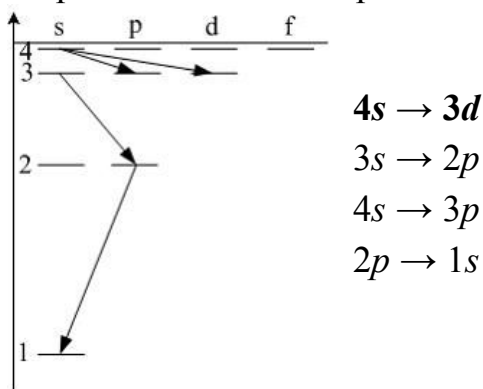
7. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома водорода. Излучение фотона с наименьшей длиной волны происходит при переходе, обозначенном стрелкой под номером ... 3



**Решение**

Излучение фотона происходит при переходе электрона с более высокого энергетического уровня на более низкий, т. е. по стрелке ↓. Наименьшая длина волны соответствует наибольшей частоте, а значит и разнице энергий при переходе. В соответствии с рисунком это означает наибольшее расстояние между линиями энергий, т. е. переход, обозначенный стрелкой 3.

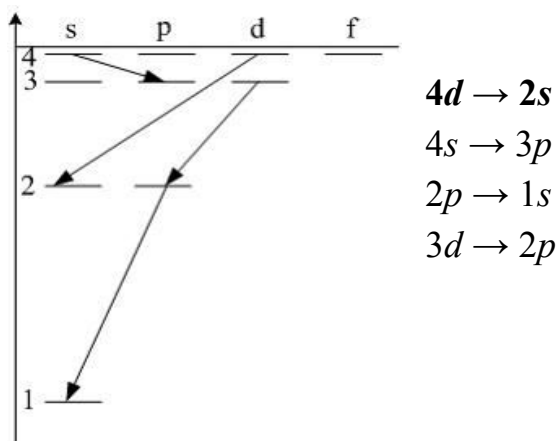
8. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода запрещенным переходом является ...



**Решение**

Для орбитального квантового числа  $l$  существует правило отбора  $\Delta l = \pm 1$ . Это означает, что возможны только такие переходы, в которых  $l$  изменяется на единицу. Поэтому запрещенным является переход  $4s \rightarrow 3d$ , так как в этом случае  $\Delta l = 2 - 0 = 2$ .

9. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода запрещенным является переход ...



### Решение

Для орбитального квантового числа  $l$  существует правило отбора  $\Delta l = \pm 1$ . Это означает, что возможны только такие переходы, в которых  $l$  изменяется на единицу. Поэтому запрещенным переходом является переход  $4d \rightarrow 2s$  так как в этом случае  $\Delta l = 0 - 2 = -2$ .

10. Серия Пашена в спектре излучения атомарного водорода характеризует переходы электрона на третий энергетический уровень. Согласно правилам отбора в ней запрещены переходы между электронными состояниями ...

$$5s \rightarrow 3d$$

$$4p \rightarrow 3s$$

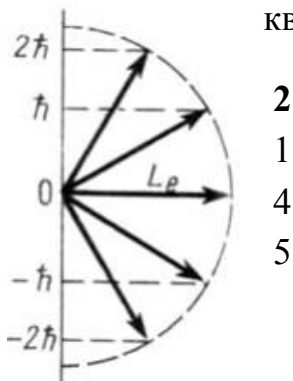
$$5d \rightarrow 3p$$

$$4d \rightarrow 3p$$

### Решение

$5s \rightarrow 3d$ , так как  $\Delta l = 2 - 0 = 2$ , а разрешено только  $\Delta l = \pm 1$ .

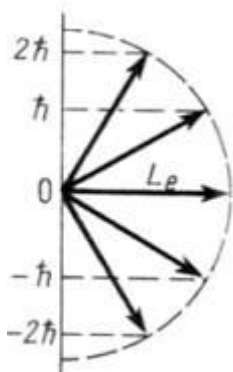
11. Момент импульса электрона в атоме и его пространственные ориентации могут быть условно изображены векторной схемой, на которой длина вектора пропорциональна модулю орбитального момента импульса  $\vec{L}_l$  электрона. На рисунке приведены возможные ориентации вектора  $\vec{L}_l$ . Значение орбитального квантового числа для указанного состояния равно ...



### Решение

Магнитное квантовое число  $m_l$  определяет проекцию вектора  $\vec{L}_l$  орбитального момента импульса на направление внешнего магнитного поля  $L_{lz} = m_l \hbar$ , где  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  (всего  $2l + 1$  значений). Поэтому для указанного состояния  $l = 2$ , так как  $2l + 1 = 5$ . Другой способ – максимальное значение коэффициента перед  $\hbar$  на рисунке  $m_{l_{\max}} = l = 2$ .

12. Момент импульса электрона в атоме и его пространственные ориентации могут быть условно изображены векторной схемой, на которой длина вектора пропорциональна модулю орбитального момента импульса  $\vec{L}_l$  электрона. На рисунке приведены возможные ори-



ентации вектора  $\vec{L}_l$ . Величина орбитального момента импульса (в единицах  $\hbar$ ) для указанного состояния равна ...

$$\sqrt{6}$$

$$\sqrt{2}$$

$$2$$

$$5$$

### Решение

Магнитное квантовое число  $m_l$  определяет проекцию вектора  $\vec{L}_l$  орбитального момента импульса на направление внешнего магнитного поля  $L_{lz} = m_l \hbar$ , где  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  (всего  $2l + 1$  значений). Поэтому для указанного состояния  $l = 2$ , так как  $2l + 1 = 5$ . Другой способ – максимальное значение коэффициента перед  $\hbar$  на рисунке  $m_{l_{\max}} = l = 2$ .

Величина момента импульса электрона определяется по формуле  $L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ . Тогда  $L_l = \sqrt{2 \cdot (2+1)} = \sqrt{6}$  (в единицах  $\hbar$ ).

## ДУАЛИЗМ СВОЙСТВ МИКРОЧАСТИЦ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Длина волны де Бройля движущейся частицы, связанная с ее волновыми свойствами, имеет вид

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad \text{или} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k \quad \hbar k = \vec{p} = \hbar \vec{k},$$

где  $m$  – масса частицы,  $v$  – ее скорость,  $p = mv$  – импульс,  $h$  – постоянная Планка,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении распространения волны,  $\vec{k} = k\vec{n}$  – волновой вектор,  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Не релятивистский случай –  $p = mv = \sqrt{2mE_k}$ , так как  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ .

Релятивистский случай –  $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2m_0 c^2)}$ ,

где  $E_k$  – кинетическая энергия частицы. Если частица с зарядом  $q$  набирает скорость в электрическом поле, то  $E_k = |q|\Delta\phi$ , где  $\Delta\phi$  – разность потенциалов поля.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга для импульса и координаты имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar.$$

Здесь  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  означают интервалы координат, в которых может быть локализована частица, описываемая волной де Бройля, если проекции ее импульса по осям координат заключены в интервалах  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  и  $\Delta p_z$  соответственно.

$(\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta p_x}{p_x}$  – относительная точность).

**Соотношение неопределенностей Гейзенберга** для энергии  $E$  и времени  $t$  имеет вид

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где  $\Delta E$  – неопределенность энергии частицы, которая находится в течение времени  $\Delta t$  в состоянии с энергией  $E$ .  $(\frac{\Delta E}{E} - \text{относительная точность})$ .

### Тесты с решениями

**1.** Если протон и  $\alpha$ -частица прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, то отношение их длин волн де Бройля равно ...  $2\sqrt{2}$ .

#### Решение

$\alpha$ -частица – это ядро атома гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где  $p$  – импульс частицы. Импульс частицы для нерелятивистского случая можно выразить через ее кинетическую энергию

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \text{ или } p = \sqrt{2mE_k}.$$

Так как (предполагаем, что первоначально частица покоится) заряженная частица прошла разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , то

$$E_k = |q|\Delta\varphi.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m|q|\Delta\varphi}}$$

Учитывая, что  $m_\alpha \cong 4m_p$  и  $q_\alpha = 2q_p > 0$ , получаем

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{\sqrt{m_\alpha q_\alpha}}{\sqrt{m_p q_p}} = \sqrt{\frac{4m_p 2q_p}{m_p q_p}} = 2\sqrt{2}.$$

**2.** Отношение скоростей двух микрочастиц  $v_1/v_2 = 4$ . Если их длины волн де Бройля удовлетворяют соотношению  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ , то отношение масс этих частиц  $m_1/m_2$  равно ...  $1/2$ .

#### Решение

Так как

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

то

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{h}{v_1 \lambda_1}}{\frac{h}{v_2 \lambda_2}} = \frac{v_2 \lambda_2}{v_1 \lambda_1} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

**3.** Отношение длин волн де Бройля для протона и  $\alpha$ -частицы, имеющих одинаковую кинетическую энергию, равно ...**2**.

### Решение

$\alpha$ -частица – это ядро атома гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов, то  $m_\alpha \cong 4m_p$ . Так как  $p = mv = \sqrt{2mE_k}$ , то

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$$

и

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2m_p E_k}}}{\frac{h}{\sqrt{2m_\alpha E_k}}} = \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_p}} = \sqrt{4} = 2.$$

**4.** В опыте Дэвиссона и Джермера исследовалась дифракция прошедших ускоряющее напряжение электронов на монокристалле никеля. Если ускоряющее напряжение увеличить в 8 раз, то длина волны де Бройля электрона .....**уменьшится в.....  $2\sqrt{2}$  раз(-а)**.

### Решение

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где  $p$  – импульс частицы. Импульс частицы для нерелятивистского случая можно выразить через ее кинетическую энергию

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \text{ или } p = \sqrt{2mE_k}.$$

Так как (предполагаем, что первоначально частица покоится) заряженная частица прошла разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , то

$$E_k = |q|\Delta\varphi.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m|q|\Delta\varphi}}$$

Так как частица – электрон, то

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e \Delta\varphi}},$$

где  $m_e$  и  $e$  – масса и модуль заряд электрона. При увеличении ускоряющего напряжения в 8 раз длина волны де Бройля электрона

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e \Delta\varphi_2}} \frac{\sqrt{2m_e e \Delta\varphi_1}}{h} = \sqrt{\frac{\Delta\varphi_1}{8\Delta\varphi_1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

т. е.  $\lambda$  уменьшится в  $2\sqrt{2}$  раз.

**5.** Если молекула водорода, позитрон, протон и  $\alpha$ - частица имеют одинаковую длину волны де Бройля, то наибольшей скоростью обладает ...

**позитрон**

молекула водорода

протон

$\alpha$ -частица

**Решение**

$\alpha$  -частица – это ядро атома гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов, то  $m_\alpha \approx 4m_p$ . Молекула водорода  $H_2$  – два протона, два электрона, т. е.  $m_{H_2} \approx 2m_p$ . Масса позитрона (та же, что и у электрона) примерно в 2000 раз меньше массы протона. Таким образом, имеем

$$m_{e^+} < m_p < m_{H_2} < m_\alpha \text{ и } \lambda_{e^+} = \lambda_p = \lambda_{H_2} = \lambda_\alpha.$$

Так как

$$\lambda = \frac{h}{mv} \text{ и } v = \frac{h}{m\lambda} \sim \frac{1}{m}.$$

Тогда наибольшей скоростью обладает частица, имеющая наименьшую массу, т. е. позитрон.

**6.** Если протон и дейтрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, то отношение их длин волн де Бройля равно ... $\sqrt{2}$ .

### Решение

Дейтрон  $D$  – ядро тяжелого изотопа водорода (дейтерия), состоящее из одного протона и одного нейтрона, т. е.  $m_D \approx 2m_p, q_D = q_p > 0$ .

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где  $p$  – импульс частицы. Импульс частицы для нерелятивистского случая можно выразить через ее кинетическую энергию

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \text{ или } p = \sqrt{2mE_k}.$$

Так как (предполагаем, что первоначально частица покоится) заряженная частица прошла разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , то

$$E_k = |q|\Delta\varphi.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m|q|\Delta\varphi}}.$$

Отношение их длин волн де Бройля протона и дейтрона равно

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_d} = \sqrt{\frac{m_D q_D}{m_p q_p}} = \sqrt{\frac{m_D}{m_p}} = \sqrt{2}.$$

7. Положение пылинки массой  $m = 10^{-9}$  кг можно установить с неопределенностью  $\Delta x = 0,1$  мкм. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, неопределенность скорости  $\Delta v_x$  (в м/с) будет не менее ...  **$1,05 \cdot 10^{-18}$** .

### Решение

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для координаты и соответствующей компоненты импульса  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$  следует, что  $\Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \geq \hbar$ . Здесь  $\Delta x$  – неопределенность координаты,  $\Delta p_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты импульса,  $\Delta v_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты скорости,  $m$  – масса частицы;  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$

Таким образом,

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-9}} = 1,05 \cdot 10^{-18} \text{ м/с}.$$

8. Неопределенность в определении местоположения частицы, движущейся вдоль оси  $x$ , равна длине волны де Бройля для этой частицы. Относительная неопределенность ее скорости не меньше .... **16 %**.

### Решение



Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для координаты и соответствующей компоненты импульса  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$  следует, что  $\Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \geq \hbar$ . Здесь  $\Delta x$  – неопределенность координаты,  $\Delta p_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты импульса,  $\Delta v_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты скорости,  $m$  – масса частицы;  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . По условию  $\Delta x = \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны де Бройля, определяемая соотношением

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Здесь  $h$  – постоянная Планка. Подставляя это выражение в соотношение неопределенностей, получаем

$$\frac{h}{mv_x} \cdot m\Delta v_x \geq \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} \geq \frac{1}{2\pi} = 0,159 \approx 0,16 = 16\%.$$

**9.** Высокая монохроматичность лазерного излучения обусловлена относительно большим временем жизни электронов в метастабильном состоянии, равном  $10^{-3}$  с. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, ширина метастабильного уровня будет не менее ... **0,66 пэВ**.

### Решение

Соотношение неопределенностей для энергии и времени имеет вид

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где  $\Delta E$  – неопределенность в задании энергии (ширина энергетического уровня),  $\Delta t$  – время жизни частицы в данном состоянии. Тогда

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-3}} = 1,05 \cdot 10^{-31} \text{ Дж},$$

$$\Delta E \geq \frac{1,05 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,66 \cdot 10^{-12} \text{ эВ} = 0,66 \text{ пэВ}.$$

**10.** Отношение неопределенностей проекций скоростей нейтрона и  $\alpha$ -частицы на некоторое направление при условии, что соответствующие координаты частиц определены с одинаковой точностью, равно ... **4**.

### Решение

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для координаты и соответствующей компоненты импульса  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$  следует, что

$$\Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \geq \hbar.$$

Здесь  $\Delta x$  – неопределенность координаты,  $\Delta p_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты импульса,  $\Delta v_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты скорости,  $m$  – масса частицы;  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Неопределенность  $x$ -компоненты скорости можно найти из соотношения

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x}.$$

Поскольку соответствующие координаты частиц определены с одинаковой точностью, то есть  $\Delta x_n = \Delta x_\alpha$  с учетом того, что  $m_\alpha = 2m_p + 2m_n \cong 4m_n$ , искомое отношение равно (решение с сайта [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru))

$$\frac{\Delta v_{x_n}}{\Delta v_{x_\alpha}} = \frac{m_\alpha}{m_n} = 4.$$

**Примечание.** Из неравенств  $\Delta v_{x_n} \geq \hbar/(m_n \cdot \Delta x)$  и  $\Delta v_{x_\alpha} \geq \hbar/(m_\alpha \cdot \Delta x)$  нельзя сделать вывод, что  $\Delta v_{x_n}/\Delta v_{x_\alpha} = m_\alpha/m_n$ .

**11.** Ширина следа электрона на фотографии, полученной с использованием камеры Вильсона, составляет 1мм. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, а масса электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг неопределенность в определении скорости электрона будет не менее... **0,12 м/с.**

### Решение

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для координаты и соответствующей компоненты импульса  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$  следует, что

$$\Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \geq \hbar,$$

где  $\Delta x$  – неопределенность координаты,  $\Delta p_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты импульса,  $\Delta v_x$  – неопределенность  $x$ -компоненты скорости,  $m$  – масса частицы,  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Неопределенность  $x$ -компоненты скорости электрона можно найти из соотношения

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m_e} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-3}} = 0,12 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**12.** Время жизни атома в возбужденном состоянии 10 нс. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$  эВ · с, ширина энергетического уровня (в эВ) составляет не менее ...

- $6,6 \cdot 10^{-8},$
- $6,6 \cdot 10^{-10},$
- $1,5 \cdot 10^{-8},$
- $1,5 \cdot 10^{-10}.$

### Решение

Соотношение неопределенностей для энергии и времени имеет вид  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ , где  $\Delta E$  – неопределенность в задании энергии (ширина энергетического уровня),  $\Delta t$  – время жизни частицы в данном состоянии. Тогда

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6,6 \cdot 10^{-16}}{10 \cdot 10^{-9}} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{эВ.}$$

## УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА (ОБЩИЕ СВОЙСТВА)

$\Psi(x, y, z, t)$  – волновая функция частицы в декартовой системе координат,  $U, E$  – потенциальная и полная энергия частицы,  $m$  – масса частицы.

**Классификация уравнений Шредингера по зависимости от размерности пространства и времени**

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

– трехмерное **нестационарное** уравнение Шредингера (координаты  $x, y, z$  и  $t$ )

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Если

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

то для  $\psi(x, y, z)$  имеем

– трехмерное **стационарное** уравнение Шредингера (координаты  $x, y, z$ )

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x, y, z)) \psi = 0,$$

– одномерное **нестационарное** уравнение Шредингера (координата  $x$  и время  $t$ )

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

– одномерное **стационарное** уравнение Шредингера (координата  $x$ )

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi = 0.$$

**Классификация уравнений Шредингера по видам потенциальной энергии  $U$**

$U = 0$  – **свободная** частица **или** частица в бесконечно глубоком потенциальном ящике (**яме**), с бесконечно высокими стенками.

$U = kx^2/2$  – частица в поле **упругой** силы **или** гармонический **осциллятор**.

$U = m\omega^2 x^2 / 2$  – гармонический осциллятор.

$U = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  – частица в кулоновском поле или (только 3<sup>x</sup> мерный случай) в водородоподобном атоме.

$U = U_0 = \text{const}$  – частица в области пространства с постоянной потенциальной энергией.

### Тесты с решениями

#### 1. Стационарное уравнение Шредингера

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

описывает движение свободной частицы, если потенциальная энергия  $U$  имеет вид ...

$$U = 0,$$

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$U = 0 = \text{const}.$$

#### 2. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Это уравнение описывает ...

**линейный гармонический осциллятор,**

движение свободной частицы,

электрон в трехмерном потенциальном ящике,

электрон в водородоподобном атоме.

#### 3. Верным для уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0,$$

где  $U_0 = \text{const}$  является утверждение

**уравнение характеризует движение микрочастицы в области пространства, где потенциальная энергия – постоянная величина,**

уравнение соответствует трехмерному случаю,

уравнение является нестационарным,

уравнение описывает линейный гармонический осциллятор.

4. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

Это уравнение описывает движение ...

**частицы в трехмерном бесконечно глубоком потенциальном ящике**

частицы в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике

линейного гармонического осциллятора

электрона в водородоподобном атоме

5. Нестационарным уравнением Шредингера является уравнение ...

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

6. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Здесь  $U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия микрочастицы. Одномерное движение свободной частицы описывает уравнение ...

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right) \psi = 0,$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0.$$

7. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Здесь  $U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия микрочастицы. Трехмерное движение свободной частицы описывает уравнение ...

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0,$$

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0.$$

### 8. Стационарное уравнение Шредингера

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

описывает электрон в водородоподобном атоме, если потенциальная энергия  $U$  имеет вид ...

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

$$U = 0,$$

$$U = U_0 = \text{const.}$$

### 9. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Здесь  $U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия микрочастицы. Движение частицы вдоль оси  $Ox$  под действием квазиупругой силы описывает уравнение ...

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right) \psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0,$$

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

**10.** Стационарное уравнение Шредингера. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0$$

описывает линейный гармонический осциллятор, если потенциальная энергия  $U$  имеет вид ...

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$U = 0,$$

$$U = U_0 = \text{const.}$$

**11.** Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0.$$

Здесь  $U = U(x, y, z)$  — потенциальная энергия микрочастицы. Электрону в одномерном потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками соответствует уравнение ...

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right) \psi = 0,$$

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0.$$

### УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА (КОНКРЕТНЫЕ СИТУАЦИИ)

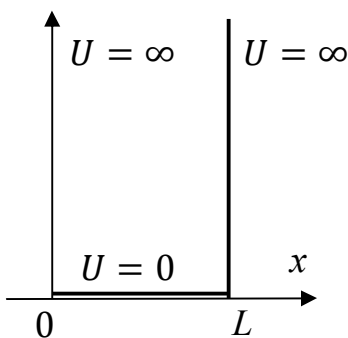
Для одномерного стационарного случая вероятность  $dW$  обнаружить частицу на оси  $X$  в интервале от  $x$  до  $x + dx$  равна ( $W(x_1, x_2)$  – **вероятность обнаружить частицу** в интервале  $x_1 \leq x \leq x_2$ )

$$dW = |\psi(x)|^2 dx, \quad W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1,$$

где  $|\psi(x)|^2$  – **плотность вероятности**, **квадрат модуля волновой функции** частицы. Если частица движется в ограниченном пространстве от 0 до  $L$ , то вероятность  $W$  обнаружить частицу в интервале от  $0 \leq a \leq x \leq b \leq L$  равна

$$W(a, b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx, \quad W = \int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

#### Потенциальная яма (ящик) длиной $L$ с бесконечно высокими стенками



Частица с энергией  $E$  и массой  $m$  находится в бесконечно глубокой потенциальной яме с  $U(x)$

$$\begin{cases} U = \infty & \text{при } x \leq 0, x \geq L, \\ U = 0 & \text{при } 0 < x < L. \end{cases}$$

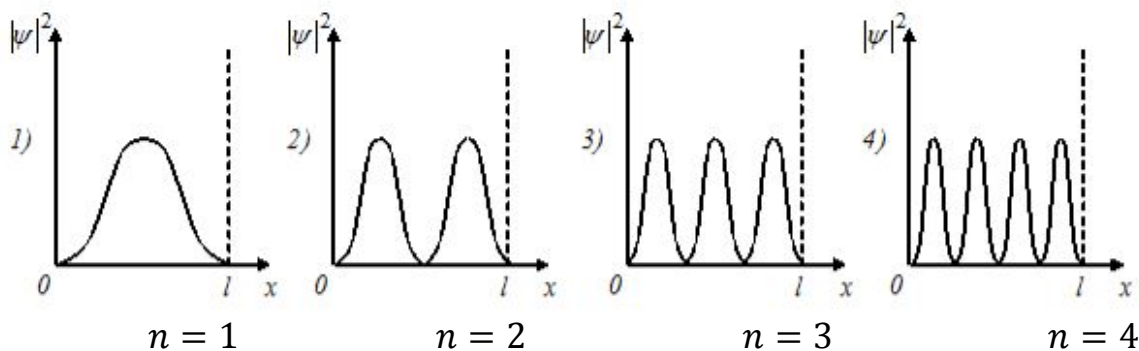
Решение уравнения Шредингера для этой частицы имеют вид (энергия, импульс, волновая функция)

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}, \quad p_n = \frac{n\pi\hbar}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = 0, \quad x \leq 0, x \geq L,$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad 0 < x < L, \quad |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi n}{L} x, \quad \int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1.$$





У графика  $|\psi_n|^2$  от  $x$  ровно  $n$  максимумов.

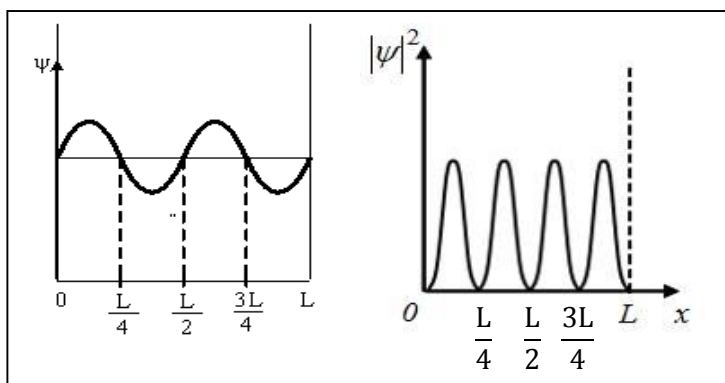
Рассчитаем

$$W(a, b) = \int_a^b |\psi_n(x)|^2 dx$$

для  $n^{\text{го}}$  уровня бесконечно глубокой потенциальной ямы.

$$W(a, b) = \int_a^b |\psi_n(x)|^2 dx = \int_a^b \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi n}{L} x dx = \left( \frac{x}{L} - \frac{\sin \frac{2\pi n}{L} x}{2\pi n} \right) \Big|_a^b.$$

**Пример.** Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме в состоянии с квантовым числом  $n = 4$ . Найти вероятность обнаружить частицу в интервале  $\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}$ .

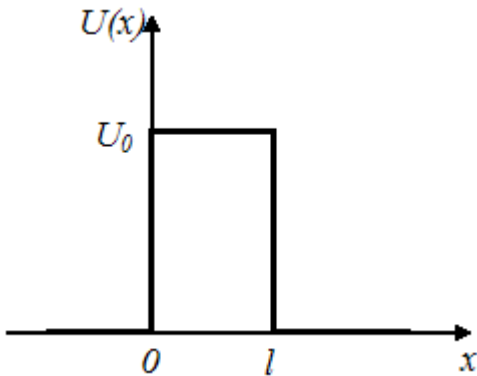


По определению

$$W\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right) = \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} |\psi_4(x)|^2 dx = \left( \frac{x}{L} - \frac{\sin \frac{4\pi}{L} x}{4\pi} \right) \Big|_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Исходя из симметрии графика  $|\psi_4|^2$  от  $x$  можно определить вероятность нахождения частицы в интервале от  $\frac{L}{4}$  до  $\frac{L}{2}$  без вычисления интеграла, который представляет собой площадь под кривой  $|\psi_4|^2$  от  $\frac{L}{4}$  до  $\frac{L}{2}$ . Так как площадь под всей кривой  $|\psi_4|^2$  от 0 до  $L$  равна 1, то площадь под кривой от  $\frac{L}{4}$  до  $\frac{L}{2}$ , очевидно, равна  $\frac{1}{4}$ .

### Потенциальный барьер (туннельный эффект)



Частицы с энергией  $E$ , массой  $m$ , движущиеся слева направо, встречают на своем пути потенциальный барьер «высоты»  $U_0$  и ширины  $l$ .  $0 \leq P \leq 1$  – вероятность прохождения барьера.

#### Классическая частица:

$$E < U_0, P = 0; \quad E > U_0, P = 1.$$

#### Квантовая частица:

$$E < U_0, P \neq 0; \quad E > U_0, P < 1.$$

При  $E < U_0$  **классическая** частица не проходит барьер («отражается»), т. е.  $P = 0$ , при  $E > U_0$  – проходит свободно с вероятностью  $P = 1$ .

При  $E < U_0$  **квантовая** частица имеет ненулевую вероятность  $P \neq 0$  прохождения энергетического барьера (**туннельный эффект**), при  $E > U_0$  – проходит, но не свободно с вероятностью  $P < 1$ , т. е. имеется ненулевая вероятность «отражения» от барьера.

Для случая  $E < U_0$  ( $U_0 - E > 0$ ) для **квантовой** частицы определяем коэффициент **прозрачности**  $D$  (вероятность прохождения  $P$ )

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right),$$

где  $D_0$  – постоянный коэффициент, близкий к единице, но меньше ее.

$D \uparrow$ , если

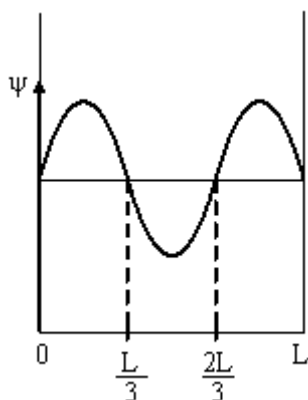
$$\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \downarrow, \text{ т. е. } l \downarrow, m \downarrow U_0 - E \downarrow.$$

$D \downarrow$ , если

$$\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \uparrow, \text{ т. е. } l \uparrow, m \uparrow U_0 - E \uparrow.$$

### Тесты с решениями

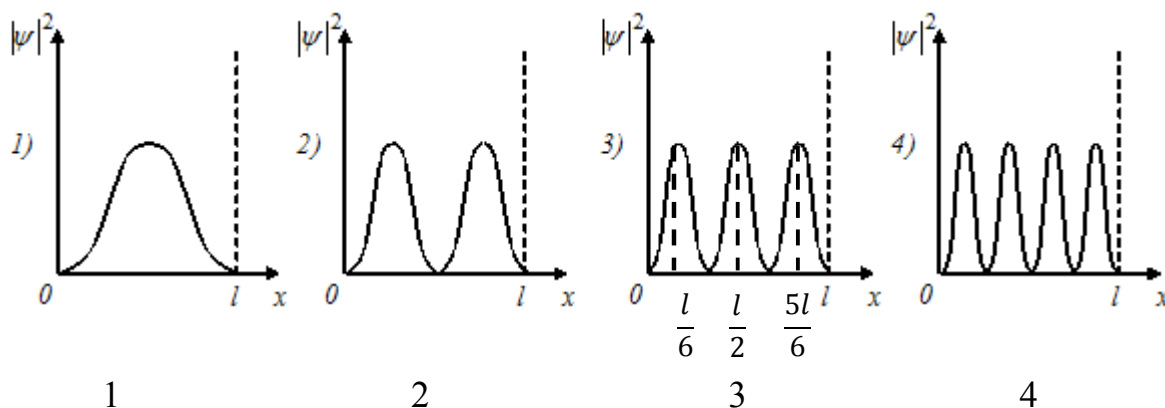
1. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками в состоянии с квантовым числом  $n = 3$ . Если  $\psi$  – функция электрона в этом состоянии имеет вид, указанный на рисунке, то вероятность обнаружить электрон в интервале от  $L/6$  до  $5L/6$  равна ...



$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$

**Решение**

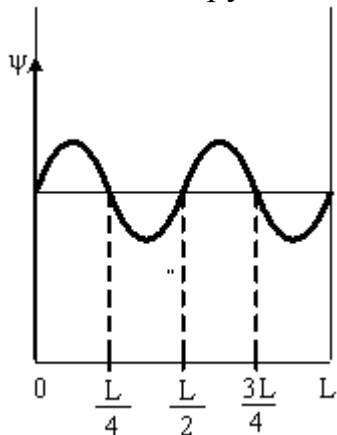
Вероятность обнаружить микрочастицу в интервале  $(a, b)$  для состояния, характеризуемого определенной  $\psi$  – функцией, равна  $W = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ . Выбираем график зависимости  $|\psi|^2$  от  $x$  для  $n = 3$ . Это третий график с тремя максимумами.



Так как площадь под кривой равна 1, а интервалу от  $L/6$  до  $5L/6$  соответствует  $4/6 = 2/3$  площади, то вероятность обнаружить электрон равна  $2/3$ .

**Примечание.**  $L$  на одном графике соответствует  $l$  на другом.

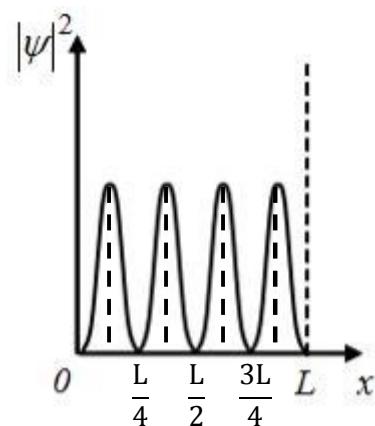
2. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками в состоянии с квантовым числом  $n = 4$ . Если  $\psi$  – функция электрона в этом состоянии имеет вид, указанный на рисунке, то вероятность обнаружить электрон в интервале от  $L/8$  до  $L/2$  равна ...



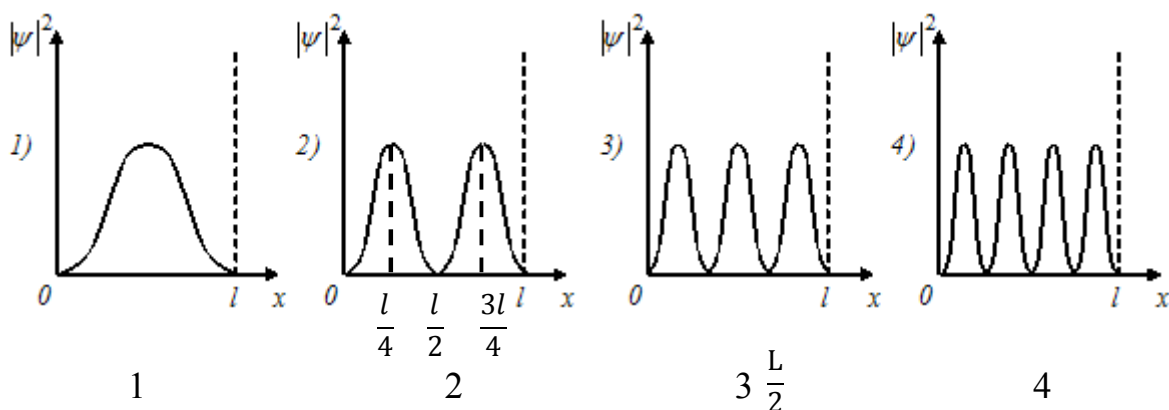
$\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

**Решение**

Вероятность обнаружить микрочастицу в интервале  $(a, b)$  для состояния, характеризуемого определенной  $\psi$  – функцией, равна  $W = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ . По зависимости  $\psi(x)$  строим зависимость  $|\psi(x)|^2$  от  $x$  и ищем площадь под этой кривой от  $L/8$  до  $L/2$  с учетом того, что площадь под кривой от 0 до  $L$  равна 1. Из симметрии кривой очевидно, что искомая площадь равна  $3/8$ .



3. На рисунках схематически представлены графики распределения плотности вероятности по ширине одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками для состояний электрона с различными значениями главного квантового числа  $n$



В состоянии с  $n = 2$  вероятность обнаружить электрон в интервале от  $1/4 l$  до  $3/4 l$  равна ...

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$

**Решение**

Вероятность обнаружить микрочастицу в интервале  $(a, b)$  для состояния, характеризуемого определенной  $\psi$ -функцией, равна  $W = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ . Выберем график зависимости  $|\psi|^2$  от  $x$  для  $n = 2$ . Это второй график с двумя максимумами. Ищем площадь под этой кривой от  $l/4$  до  $3l/4$  с учетом того, что площадь под кривой от 0 до  $l$  равна 1. Из симметрии кривой 2 очевидно, что искомая площадь равна  $1/2$ .

**4.** В результате туннельного эффекта вероятность прохождения частицей потенциального барьера увеличивается с ...

**уменьшением массы частицы,**  
увеличением ширины барьера,  
уменьшением энергии частицы,  
увеличением высоты барьера.

### Решение

Вероятность прохождения частицей потенциального барьера или коэффициент прозрачности определяется формулой

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right),$$

где  $D_0$  – постоянный коэффициент, близкий к единице,  $l$  – ширина барьера,  $m$  – масса частицы,  $U_0$  – высота барьера,  $E$  – энергия частицы. Следовательно, вероятность прохождения увеличивается с уменьшением массы частицы.

**5.** В результате туннельного эффекта вероятность прохождения частицей потенциального барьера уменьшается с ...

**увеличением ширины барьера,**  
уменьшением массы частицы,  
увеличением энергии частицы,  
уменьшением высоты барьера.

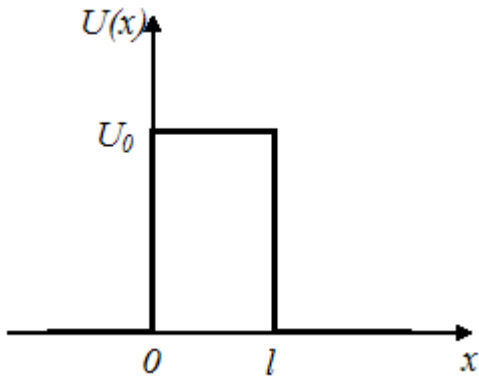
### Решение

Вероятность прохождения частицей потенциального барьера или коэффициент прозрачности определяется формулой

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right),$$

где  $D_0$  – постоянный коэффициент, близкий к единице,  $l$  – ширина барьера,  $m$  – масса частицы,  $U_0$  – высота барьера,  $E$  – энергия частицы. Следовательно, вероятность прохождения уменьшается с увеличением ширины барьера.

**6.** Квантовая и классическая частицы с энергией  $E$ , движущиеся слева направо, встречаются на своем пути потенциальный барьер высоты  $U_0$  и ширины  $l$ .



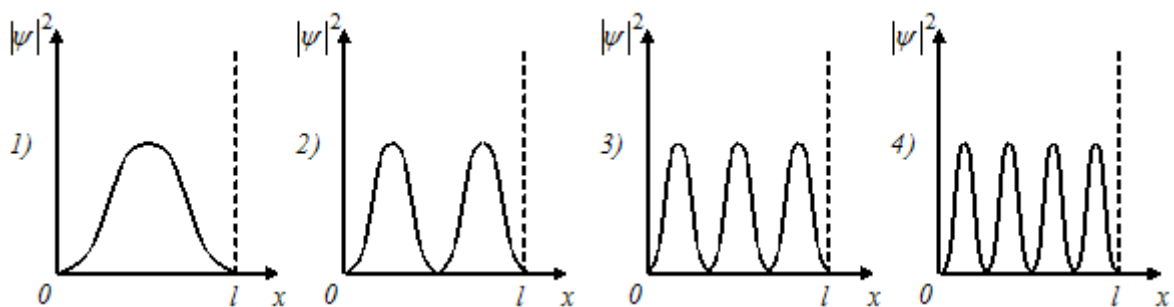
Если  $P$  – вероятность преодоления барьера, то для ...

**квантовой частицы при  $E < U_0$   $P \neq 0$ , а при  $E > U_0$   $P < 1$ ,**  
 классической частицы при  $E < U_0$   $P = 0$ , а при  $E > U_0$   $P = 1$ ,  
 квантовой частицы при  $E < U_0$   $P = 0$ , а при  $E > U_0$   $P = 1$ ,  
 квантовой частицы  $P$  зависит только от  $U_0$  и не зависит от  $l$ .

7. Квадрат модуля волновой функции, входящий в уравнение Шредингера, равен

импульсу частицы в соответствующем месте пространства,  
**плотности вероятности обнаружения частицы в соответствующем месте пространства,**  
 энергии частицы в соответствующем месте пространства.

8. На рисунке приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Состоянии с квантовым числом  $n = 2$  соответствует.....



**Решение**

Число  $n$  равно числу максимумов, т. е. второй рисунок.

*Учебное издание*

**Фишбейн Лев Абрамович**

**ПОДГОТОВКА К ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ  
ПО ФИЗИКЕ В СФЕРЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Квантовая физика и физика атома**

Сборник задач  
для студентов очной, заочной форм обучения  
и дистанционного образования

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать 28.12.12. Формат 60x84/16.  
Бумага офсетная . Усл. печ. л. 2,3.  
Тираж 130 экз. Заказ 347.

Издательство УрГУПС  
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66